Algebra liniowa 1A, lista 4

Ćwiczenia(Kartkówka 4 listopada)

1. Sprawdź, że przekształcenia liniowe płaszczyzny z operacjami dodawania i mnożenia przez skalar spełniają aksjomaty przestrzeni liniowej.

2. Udowodnij, że $\det(tA) = t^2 \det(A)$.

3. Które z ponizszych przekształceń zachowują, a które zmieniają orientację (oznaczenia jak w zad. 7 listy 3)? Które z nich zachowują pole?

(a) S_y, (b) $R_\pi \circ S_x$, (c) P_x, (d) $S_x \circ S_y$, (e) D_r.

4. Uzasadnij wprost z definicji A^{-1}, że $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = Id$. Wywnioskuj analogiczny wzór dla macierzy.

5. Policz M^{-1} dla następujących macierzy M: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Rozwiąż układy równań:

(a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -4x - 2y = -2 \end{cases}$.

Zadania (kartkówka 4 listopada)

1. Pokaż, że odcinek o końcach U, V można zapisać jako

$$\{tU + (1-t)V \ : \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Wywnioskuj, że obrazem odcinka o końcach U, V przez przekształcenie liniowe A jest odcinek o końcach $A(U)$, $A(V)$.

2. Używając zadania 1 pokaż, że obrazem trójkąta o wierzchołkach D, B, C przez przekształcenie liniowe A jest trójkąt o wierzchołkach $A(D)$, $A(B)$, $A(C)$.

3. Uzasadnij, że obrazem trójkąta o polu P przez przekształcenie liniowe A jest trójkąt o polu $|\det(A)|P$.

4. Udowodnij dla dowolnych macierzy odwracalnych wzory $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$, $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

5. Rozwiąż podane równania macierzowe posługując się macierzami odwrotnymi:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Czy prawdziwy jest wzór $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$? Udowodnij lub podaj kontrprzykład.

7. Udowodnij, że $\det(A) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatnio zorientowanej pary wektorów (U, V) para $(A(U), A(V))$ jest zorientowana ujemnie.