Algebra liniowa 1A, lista 5

Ćwiczenia (Kartkówka 18 listopada)

1. Korzystając z wzorów z listy 4 uzasadnij równość $\det(M^{-1}NM) = \det(N)$.

2. Sprawdź wzory $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$, $\mathrm{tr}(M+N) = \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)$, $\mathrm{tr}(M^{-1}NM) = \mathrm{tr}(N)$.

3. Oblicz ślad macierzy (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 70 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Sprawdź bezpośrednio z definicji, które spośród wektorów $\binom{1}{-1}$, $\binom{-1}{2}$, $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{-2}$ są wektorami własnymi przekształcenia liniowego (a) $A\binom{x}{y} = \binom{y}{2x-y}$, (b) zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Podaj wartości własne odpowiadające znalezionym wektorom.

5. Dla jakich wartości parametru c macierz $\begin{pmatrix} 2 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$ ma (a) zero, (b) jedną, (c) dwie wartości własne.

6. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy
(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Oblicz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^7$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^6$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^4$.

8. Udowodnij indukcyjnie wzór $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dla n całkowitych dodatnich. Czy jest on również prawdziwy dla n ujemnych?

Zadania (kartkówka 25 listopada)

1. Które z poniższych przekształceń diagonalizują się (w bazie wektorów własnych)? Dla tych które diagonalizują się, znajdź wartości własne oraz bazę wektorów własnych. (Wsk.: Rozwiązuj to zadanie geometrycznie, bez odwoływania się do macierzy)
(a) R_θ, (b) S_ℓ (ℓ – pewna prosta przechodząca przez O), (c) D_r, (d) P_U.

2. Napisz warunek na liczby a, b, c, d gwarantujący, że macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ma dwie różne wartości własne.

3. Sprawdź, że jedyną wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ jest 5. To samo zrób dla macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że jedna z tych macierzy diagonalizuje się w bazie wektorów własnych, a druga nie.

6. Znajdź macierz przekształcenia liniowego, dla którego $\binom{1}{0}$ jest wektorem własnym o wartości własnej $-\frac{1}{2}$, zaś $\binom{1}{1}$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1.

7. Załóżmy, że przekształcenie liniowe E spełnia warunek $E \circ E = E$. Jakie wartości własne może mieć to przekształcenie? Czy koniecznie musi być przekształceniem zerowym lub identycznościowym?

8. Przedstaw macierz $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną. Zastosuj tę postać do obliczenia 6-tej potęgi macierzy M.

9. Wykaż, że jeśli macierz M ma dwie różne wartości własne λ, μ, to $\det(M) = \lambda\mu$, $\mathrm{tr}(M) = \lambda + \mu$
(a) Stosując wzory Viète'a do wielomianu charakterystycznego M;
(b) przedstawiając M w postaci PDP^{-1} z diagonalną macierzą D i stosując wzory z ćwiczeń powyżej.
Co się dzieje gdy $\lambda = \mu$?

10. Znajdź jawny wzór na c_n, jeśli $c_0 = 2$, $c_1 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + 6c_n$.

11. (Heisenberga Zasada Nieoznaczoności; próba pierwsza, nieudana.) Używając śladu uzasadnij, że nie istnieją macierze M, N spełniające $MN - NM = I$.

12. Niech $X_1 = \binom{x_1}{y_1}$, $X_2 = \binom{x_2}{y_2}$ będą liniowo niezależne. Niech $\binom{x}{y} = \alpha X_1 + \beta X_2$. Uzasadnij, że $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \binom{x}{y} = \binom{\alpha}{\beta}$.

13. Załóżmy, że przekształcenie liniowe płaszczyzny A ma dwie różne wartości własne λ, μ. Uzasadnij, że A zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu > 0$, zaś zmienia orientację wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu < 0$. Wywnioskuj, że przekształcenie S_ℓ (gdzie ℓ jest dowolną prostą przechodzącą przez O) zmienia orientację.