Algebra liniowa 1A, lista 6

Na tej liście słowo "symetria" oznacza symetrię względem pewnej prostej przechodzącej przez O, "obrót" zaś obrót wokół O, chyba że jest explicite powiedziane inaczej.

Ćwiczenia(Kartkówka 18 listopada)

1. Sprawdź, czy macierz jest macierzą izometrii. Jeśli tak, stwierdź czy jest to macierz obrotu czy symetrii. O jaki kąt / względem której prostej?

(a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2. Dla dowolnych macierzy A, B, C uzasadnij wzory $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$.

3. Dla dowolnych macierzy A, B i dowolnej liczby rzeczywistej t sprawdź wzór $t(AB) = (tA)B = A(tB)$.

4. Uzasadnij, że jeśli λ jest wartością własną pewnej izometrii liniowej, to $\lambda = \pm 1$.

5. Obrazem wektora $\binom{2}{1}$ przez izometrię liniową A jest wektor $\binom{1}{3}$.
Wyjaśnij, dlaczego powyższe zdanie jest fałszywe.

6. Czy istnieje liniowa izometria A, taka że $A\binom{1}{1} = \binom{1}{-1}$, $A\binom{1}{-1} = \binom{-1}{1}$?

7. Liniowa izometria A przekształca wektor $\binom{1}{0}$ na wektor $\binom{-1/2}{\sqrt{3}/2}$ i zmienia orientację. Znajdź $A\binom{0}{1}$.

8. Złożenie $S_{\binom{1}{1}} \circ S_{\binom{0}{2}}$ jest obrotem. Znajdź jego macierz i stwierdź, o jaki kąt jest to obrót.

9. Przedstaw w postaci $T_U \circ A$ (a) symetrię względem prostej $x = 1$; (b) obrót (w kierunku przeciwzegarowym) o kąt $\pi/2$ wokół punktu $\binom{0}{1}$.

Zadania (kartkówka 25 listopada)

1. Niech A i B będą liniowymi przekształceniami płaszczyzny. Czy $A \circ B$ zachowuje orientację, jeśli
(a) A i B zachowują orientację,
(b) jedno z przekształceń A, B zachowuje orientację, a drugie ją zmienia,
(c) A i B zmieniają orientację.
Jak stwierdzić, czy złożenie większej liczby przekształceń liniowych zachowuje / zmienia orientację, jeśli wiadome to jest dla każdego z poszczególnych przekształceń? Np. czy złożenie siedmiu symetrii zmienia orientację? A złożenie 58 symetrii? (Pojedyncza symetria zmienia orientację, patrz zad 13, lista 5).

2. (a) Używając klasyfikacji izometrii liniowych sprawdź, że wyznacznik liniowej izometrii wynosi ± 1. Dokładniej, pokaż że dla obrotu wynosi on 1, a dla symetrii -1.
(b) Uzasadnij, że żaden obrót nie jest złożeniem pięciu symetrii.
(c) Uzasadnij, że złożenie dwóch symetrii jest obrotem. O jaki kąt?
(d) Uzasadnij, że złożenie symetrii i obrotu jest symetrią. Względem której prostej?

3. Uzasadnij, że izometrie liniowe zachowują pole. Podaj przynajmniej 3 przykłady przekształceń zachowujących pole a nie będących izometriami.

4. Niech A będzie izometrią liniową. Uzasadnij, że A jest odwracalne i A^{-1} też jest izometrią.

5. Znajdź macierz symetrii względem prostej $y = ax$.

6. Dla $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zdefiniujmy $M^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Uzasadnij, że M jest macierzą izometrii wtedy i tylko wtedy gdy $M(M^\top) = (M^\top)M = I$.

7. Udowodnij, że jeśli U, V są liniowo niezależne, to dla dowolnych X_1, X_2 istnieje jedyne przekształcenie liniowe A takie że $A(U) = X_1$, $A(V) = X_2$.