Algebra liniowa 1A, lista 8

Ćwiczenia(kolokwium 2 grudnia)

1. Oblicz sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb $1-3i$ oraz $4+5i$.

2. Przedstaw w postaci $a+bi$: $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i}{2-i}$, $\frac{1}{i^5}$, $\frac{1}{(-2+i)(1-3i)}$, $\frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}$.

3. Oblicz wartości wyrażeń: $\mathrm{Re}z+i\mathrm{Im}w$, $\mathrm{Im}z/i\mathrm{Re}w$, z^2/w jeśli $z=5-2i$, $w=3-\frac{2}{3}i$.

4. Znajdź liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:
(a) $(2+yi)(x-3i)=7-i$, (b) $(1+i)(x+iy)=2+i$.

5. Rozwiąż (w liczbach zespolonych):
(a) $(3+i)+z=7+2i$, (b) $(1+i)z+2=0$, (c) $(1+i)z+3(z-i)=0$.

6. Oblicz moduły liczb: i, $-1+3i$, $1-\sqrt{3}i$, $-5-12i$.

7. Znajdź argumenty liczb: 2, i, $-\pi$, $3-3i$, $1+\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}+i$.

8. Zapisz w postaci trygonometrycznej: -1, $1+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $7-7i$, $-5+5\sqrt{3}i$.

9. Zapisz w postaci $a+bi$ liczbę o module $3/2$, której argument wynosi (a) $210°$, (b) $\frac{3}{2}\pi$, (c) $-\pi$.

10. Oblicz podane iloczyny posługując się postacią trygonometryczną:
(a) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$, (b) $(4+4i)(-3+3i)$, (c) $(10-10\sqrt{3}i)(2-2i)$.

11. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz: $(1+i)^{10}$, $(\sqrt{3}-i)^7$, $(\sqrt{2}i-\sqrt{2})^{12}$.

12. Oblicz $\overline{(2+3i)(7-i)}$.

13. Sprawdź aksjomaty ciała dla liczb zespolonych.

14. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb zespolonych z, w zachodzi:
(a) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, (b) $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$, (c) $z\overline{z}=|z|^2$.

Zadania (kolokwium 2 grudnia)

1. Uzasadnij, że dla dowolnych z, w zachodzą równości:
(a) $\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}z+\mathrm{Re}w$, (b) $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}z$, (c) $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}z$.

2. Uzasadnij, że jeśli z ma postać trygonometryczną $r(\cos\phi+i\sin\phi)$, to $1/z$ ma postać trygonometryczną $(1/r)(\cos(-\phi)+i\sin(-\phi))$, a $\overline{z}$ ma postać trygonometryczną $r(\cos(-\phi)+i\sin(-\phi))$.

3. Wyprowadź wzór de Moivre'a dla ujemnych wykładników.

4. Bezpośrednio lub korzystając z zadania 2 wyprowadź wzór na postać trygonometryczną ilorazu dwóch liczb zespolonych (o zadanych postaciach trygonometrycznych). Użyj go do obliczenia ilorazów:
(a) $(2+2i)/(1-i)$, (b) $(1-\sqrt{3}i)/(\sqrt{3}+i)$, (c) $3i/(1+i)$.

5. Posługując się postacią trygonometryczną oblicz i narysuj podane pierwiastki:
(a) 3 stopnia z $8i$; (b) 6 stopnia z 27; (c) 4 stopnia z $-(1/2)-(\sqrt{3}/2)i$; (d) 8 stopnia z 1.

6. Uzasadnij wzory:
(a) $|-z|=|z|$, (b) $|z/w|=|z|/|w|$, (c) $|z/|z||=1$.

7. Rozwiąż (w $\mathbf{C}$):
(a) $z^2-z+1=0$, (b) $z^2+3z+3-i=0$, (c) $z^2+(2i-1)z+1+5i=0$, (d) $z^2+iz=2$, (e) $2z+\overline{z}=6-5i$.

8. Opisz geometrycznie przekształcenie płaszczyzny $z\mapsto iz$.

9. Rozwiąż układy równań

$$(a)\begin{cases} z+iw=1 \\ iz+w=1+i \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} (1+i)z-iw=3+i \\ (2+i)z+(2-i)w=2i \end{cases}$$

10. Znajdź wzory na $\cos(3\phi)$ oraz $\sin(3\phi)$ w terminach $\cos\phi$ i $\sin\phi$, obliczając $(\cos\phi+i\sin\phi)^3$ na dwa sposoby: bezpośrednim wymnożeniem oraz ze wzoru de Moivre'a.