Awaryjna lista zadań z algebry liniowej IA

Zadania (kolokwium 2 grudnia)

1. Dla $n \in \mathbf{N}$ rozważmy elipsę C_n zadaną równaniem $\frac{x^2}{n} + \frac{(y-n)^2}{n^2} = 1$.
a) Naszkicuj elipsy C_n dla kilku wartości n.
b) Przekształć równanie C_n do postaci $x^2 + c_n y^2 + 2e_n y + f_n = 0$.
c) Oblicz $c = \lim_{n\to+\infty} c_n$, $e = \lim_{n\to+\infty} e_n$, $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$.
d) Naszkicuj krzywą $x^2 + cy^2 + 2ey + f = 0$.
e) Napisz ciąg równań określających hiperbole, których granicą (w sensie jw.) jest krzywa z punktu d).
2. Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty. Udowodnij ten fakt w następujący sposób:
a) Obierz początek układu współrzędnych O w środku okręgu.
b) Oznacz przez R promień okręgu, Przez U, V wektory wodzące wierzchołka kąta i jednego z końców średnicy, na której kąt jest oparty.
c) Wyraź wektory o początku w O, a końcach w końcach średnicy w terminach wektorów U, V. Oblicz ich iloczyn skalarny.
3. Oblicz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}^{2003}$. Wsk. Wielomian charakterystyczny potęgowanej macierzy nie ma pierwiastków rzeczywistych; nie przejmując się tym przeprowadź diagonalizację, używając liczb zespolonych. Czy potrafisz uzasadnić, że procedura ta daje poprawny wynik?
4. Ciągi (a_n), (b_n) są określone rekurencyjnie przez zależności $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, $b_{n+1} = -5a_n - b_n$, $a_0 = b_0 = 1$. Używając wyniku poprzedniego zadania, oblicz a_{2003}

Awaryjna lista zadań z algebry liniowej IA

Zadania (kolokwium 2 grudnia)

1. Dla $n \in \mathbf{N}$ rozważmy elipsę C_n zadaną równaniem $\frac{x^2}{n} + \frac{(y-n)^2}{n^2} = 1$.
a) Naszkicuj elipsy C_n dla kilku wartości n.
b) Przekształć równanie C_n do postaci $x^2 + c_n y^2 + 2e_n y + f_n = 0$.
c) Oblicz $c = \lim_{n\to+\infty} c_n$, $e = \lim_{n\to+\infty} e_n$, $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$.
d) Naszkicuj krzywą $x^2 + cy^2 + 2ey + f = 0$.
e) Napisz ciąg równań określających hiperbole, których granicą (w sensie jw.) jest krzywa z punktu d).
2. Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty. Udowodnij ten fakt w następujący sposób:
a) Obierz początek układu współrzędnych O w środku okręgu.
b) Oznacz przez R promień okręgu, Przez U, V wektory wodzące wierzchołka kąta i jednego z końców średnicy, na której kąt jest oparty.
c) Wyraź wektory o początku w O, a końcach w końcach średnicy w terminach wektorów U, V. Oblicz ich iloczyn skalarny.
3. Oblicz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}^{2003}$. Wsk. Wielomian charakterystyczny potęgowanej macierzy nie ma pierwiastków rzeczywistych; nie przejmując się tym przeprowadź diagonalizację, używając liczb zespolonych. Czy potrafisz uzasadnić, że procedura ta daje poprawny wynik?
4. Ciągi (a_n), (b_n) są określone rekurencyjnie przez zależności $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, $b_{n+1} = -5a_n - b_n$, $a_0 = b_0 = 1$. Używając wyniku poprzedniego zadania, oblicz a_{2003}