**Algebra liniowa 1A, lista 9**

listy w formacie .ps są dostępne na stronie
`http://www.math.uni.wroc.pl/ dymara`

**Ćwiczenia** (kartkówka 9 grudnia)

1. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$. Wykorzystaj fakt, że liczba $a$ jest pierwiastkiem $P$.

(a) $P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6$, $a = -2$;
(b) $P(z) = z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26$, $a = -2 + 3i$;
(c) $P(z) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2$, $a = i$;
(d) $P(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 10z^2 + 25z$, $a = 1 - 2i$.

2. Sprawdź z definicji czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne:
(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

3. Rozwiązując układ równań przedstaw pierwszy z podanych wektorów w postaci kombinacji liniowej pozostałych (lub stwierdź, że się nie da):
(a) $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$;
(d) $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$;

4. Podaj przykład trzech liniowo zależnych wektorów w $\mathbf{R}^3$, takich że każde dwa z nich są liniowo niezależne, oraz żadna współrzędna żadnego z tych wektorów nie jest równa 0.

**Zadania** (kartkówka 9 grudnia)

1. Uzasadnij, że wektory $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1y_2 - x_2y_1 = x_2y_3 - x_3y_2 = x_3y_1 - x_1y_3 = 0$.

2. Uzasadnij, że jeśli wektory $X$, $Y$, $Z$ są liniowo niezależne, to również wektory $X$, $Y+2X$, $Z-X+2Y$ są liniowo niezależne. Czy wówczas i wektory $X - Y + Z$, $2X + Y - Z$, $X + Y + Z$ są liniowo niezależne?

3. Wektory $U$, $V$, $W$ (zaczepione w początku układu) są krawędziami pewnego równoległościanu. Przedstaw wektory wodzące
(a) środków wszystkich krawędzi tego równoległościanu,
(b) środków przekątnych poszczególnych jego ścian,
(c) środków przekątnych równoległościanu,
za pomocą wektorów $U$, $V$, $W$.

4. Napisz równania parametryczne wszystkich płaszczyzn zawierających poszczególne ściany równoległościanu z poprzedniego zadania (w terminach $U$, $V$, $W$).

5. Niech wektory $U$, $V$, $W$ będą wektorami wodzącymi wierzchołków pewnego trójkąta. Napisz równania parametryczne prostych zawierających środkowe tego trójkąta. Napisz wektor wodzący punktu przecięcia środkowych.

6. Wektory $U$, $V$, $W$ (zaczepione w początku układu) są krawędziami pewnego czworościanu. Wyraź przez $U$, $V$, $W$ wektory wodzące środków krawędzi tego czworościanu, a także wektory wodzące barycentrów poszczególnych jego ścian (barycentrum trójkąta to punkt przecięcia jego środkowych). Dla każdego wierzchołka czworościanu napisz równanie parametryczne prostej łączącej ten wierzchołek z barycentrum przeciwległej ściany. Uzasadnij, że otrzymane cztery proste przecinają się w jednym punkcie.