Zadania z topologii, 1

Ćwiczenia

1. Przekrój przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych jest też przekrojem zstępującej przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych.
2. Rozłączne domknięte podzbiory przestrzeni normalnej można oddzielić zbiorami otwartymi o rozłącznych domknięciach
3. Przestrzeń jest regularna i ma bazę przeliczalną $\iff$ jest metryzowalna ośrodkowa.
4. Na $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ określamy topologię warunkiem $(j \in cl(\{i\})) \iff (T_i \Rightarrow T_j)$. Dla jakich k przestrzeń X jest T_k?
5. Niech A, B, C, D będą parami rozłącznymi domkniętymi podzbiorami przestrzeni normalnej X. Istnieje (ciągła) funkcja $f : X \to [-1, 1]$, taka że $f(A) = -1$, $f(B) = 1$, $f(C) = 0$, $f(D) = \frac{1}{e}$.
6. Podaj przykład nieośrodkowej przestrzeni metrycznej.

Zadania

7. Niech Y będzie przestrzenią metryczną. Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych $F_n : X \to Y$ jest ciągła.
8. Udowodnij, że przestrzeń metryczna jest normalna – odwołując się bezpośrednio do definicji normalności.
9. Podzbiór A przestrzeni normalnej X jest zbiorem zer pewnej funkcji ciągłej $f : X \to \mathbf{R} \iff$ jest domknięty i jest przekrojem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych [na to ostatnie mówi się: jest typu G_δ].
10. Przestrzeń metryczna ośrodkowa jest dziedzicznie ośrodkowa [tzn. każdy jej podzbiór wyposażony w topologię indukowaną jest ośrodkowy].
11. Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa z przeliczalną bazą. Niech X^0 oznacza zbiór wszystkich $x \in X$, takich że każde (otwarte) otoczenie x jest nieprzeliczalne. Wtedy X^0 jest domknięty, w sobie gęsty i nieprzeliczalny lub pusty, zaś $X \setminus X^0$ jest przeliczalny.
12. (M) Dowolna ciągła funkcja $f : \omega_1 \to \mathbf{R}$ jest od pewnego miejsca stała. [Na ω_1 rozważamy topologię porządkową; "od pewnego miejsca stała" znaczy $\exists\alpha\forall\beta(\beta > \alpha \Rightarrow f(\beta) = f(\alpha))$.]