**Zadania z topologii 14**

1. Udowodnij precyzyjnie, że wiązka Möbiusa nad $S^1$: $\ddot{\mathrm{M}} = [0,1] \times \mathbf{R}/\sim$, gdzie $(x,t) \sim (y,s) \iff ((x = y \wedge t = s) \vee (\{x,y\} = \{0,1\} \wedge t = -s))$, z rzutowaniem $p(x,t) = e^{2\pi i t}$; nie jest izomorficzna z wiązką trywialną.
2. Uzasadnij, że – z dokładnością do izomorfizmu – są dokładnie dwie $\mathbf{R}$-wiązki nad $S^1$: $S^1 \times \mathbf{R}$ i $\ddot{\mathrm{M}}$.
3. Uzasadnij, że każda $\mathbf{R}$-wiązka nad skończonym grafem $\Gamma$ jest postaci $f^*\ddot{\mathrm{M}}$, dla pewnego $f : \Gamma \to S^1$.
4. Uzasadnij, że każda $\mathbf{C}$-wiązka nad skończonym grafem jest izomorficzna z wiązką trywialną.
5. Niech $E, F$ będą wiązkami nad $X$; opisz topologię na $Hom(E,F)$ i sprawdź, że jest to wiązka nad $X$.
6. Uzasadnij, że jednowymiarowa wiązka (rzeczywista lub zespolona) jest izomorficzna z trywialną wtedy i tylko wtedy, gdy ma nieznikające cięcie.[nieznikające = w każdym punkcie niezerowe]
7. Uzasadnij, że $\{(v,w) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid |v| = 1, w \perp v\}$ jest wiązką nad $S^2$ (z rzutowaniem $p(v,w) = v$). [Jest to tzw. wiązka styczna $S^2$, ozn. $TS^2$.]
8. Uzasadnij, że $TS^2 \oplus (S^2 \times \mathbf{R}) \simeq S^2 \times \mathbf{R}^3$.
9. Z poprzedniego zadania wywnioskuj, że jeśli z $Vect(S^2)$ "na siłę" zrobić grupę, to $S^2 \times \mathbf{R}^2$ i $TS^2$ będą w tej grupie zadawać ten sam element.
10. Niech $E$ będzie wiązką nad $\mathbf{RP}^2$, powstałą przez wydzielenie $S^2 \times \mathbf{R}$ przez relację $(x,t) \sim (y,s) \iff ((x = y \wedge t = s) \vee (x = -y \wedge t = -s))$. Uzasadnij, że $E$ nie jest izomorficzna z wiązką trywialną. [Wsk. wskaż odwzorowanie $f : S^1 \to \mathbf{RP}^2$, takie że $f^*E \simeq \ddot{\mathrm{M}}$.] Uzasadnij, że jeśli $\Gamma$ jest skończonym grafem, a $F$ wiązką nad $\Gamma$, to istnieje $f : \Gamma \to \mathbf{RP}^2$, takie że $f^*E \simeq F$. Uzasadnij, że jeśli $\Gamma$ jest skończonym grafem, $f, g : \Gamma \to \mathbf{RP}^2$, i $f^*E \simeq g^*E$, to $f$ i $g$ są homotopijne.