Zadania z topologii, 2

Ćwiczenia

1. Jeśli $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jest ciągła i ograniczona z dołu, oraz $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, to f przyjmuje wartość najmniejszą. [$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$ znaczy, że $(\forall M \in \mathbf{R})(\exists R \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R}^n)(\|x\| > R \Rightarrow f(x) > M)$.]
2. Niech Y będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d_X). Topologia na Y indukowana z topologii X zadanej przez metrykę d_X pokrywa się z topologią na Y zadaną przez metrykę będącą obcięciem d_X do $Y \times Y$.
3. X jest Hausdorffa $\iff$ $\{(x,x) \mid x \in X\}$ jest domkniętym podzbiorem $X \times X$.
4. Niech $f : X \to \mathbf{R}$, przy czym $X = A \cup B$, zaś $f|_A$, $f|_B$, $f|_{A\cap B}$ są ciągłe. Czy wynika stąd, że f jest ciągła, czy może potrzebne są jeszcze jakieś (jakie?) założnia?

Zadania

5. Jeśli $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ są podzbiorami zwartymi, zaś U jest otwartym podzbiorem $X \times Y$ zawierającym $A \times B$, to istnieją otwarte $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$, takie że $A \times B \subseteq V \times W \subseteq U$.
6. Przestrzeń Hausdorffa X jest zwarta $\iff$ dla każdej przestrzeni topologicznej Y rzut $p : X \times Y \to Y$ jest przekształceniem domkniętym.
7. Niech $J(\kappa) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\kappa} \in I^\kappa \mid$ najwyżej jedna x_α jest różna od $0\}$. Pokaż, że $J(\kappa)$ jest domkniętym podzbiorem I^κ. Niech $d((x_\alpha),(y_\alpha)) := \sum_{\alpha\in\kappa} |x_\alpha - y_\alpha|$; pokaż, że d jest metryką w $J(\kappa)$. Czy topologia zadana przez tą metrykę pokrywa się z topologią indukowaną z topologii produktowej w I^κ?
8. W produkcie (dowolnej ilości) przestrzeni ośrodkowych każda rodzina zbiorów otwartych, niepustych i parami rozłącznych jest przeliczalna.
9. Mówimy, że zbiór częściowo uporządkowany $(\Sigma, \leq)$ jest *zbiorem skierowanym,* jeśli $(\forall \sigma, \mu \in \Sigma)(\exists \eta \in \Sigma)(\sigma \leq \eta \wedge \mu \leq \eta)$. *Netem* (lub *ciągiem Moore'a–Smith'a,* lub *ciągiem uogólnionym*) w przestrzeni X nazywamy rodzinę punktów X indeksowaną pewnym zbiorem skierowanym Σ: $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$; innymi słowy, net w X jest to funkcja z pewnego zbioru skierowanego w X. Mówimy, że net $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ jest zbieżny do $x \in X$ (piszemy $\lim x_\sigma = x$, i mówimy że x jest granicą netu (x_σ)), jeśli dla każdego otoczenia otwartego U punktu x istnieje $\sigma \in \Sigma$, takie że $\{x_\mu \mid \mu \geq \sigma\} \subseteq U$.
   a) Pokaż, że w przestrzeni Hausdorffa każdy net ma co najwyżej jedną granicę.
   Od tej chwili zakładamy, że wszystkie przestrzenie w tym zadaniu są Hausdorffa.
   b) Pokaż, że $cl(A)$ jest zbiorem granic wszyskich zbieżnych netów, których wyrazy leżą w A.
   c) Pokaż, że $f : X \to Y$ jest ciągła $\iff$ dla każdego zbieżnego netu (x_σ) net $(f(x_\sigma))$ jest zbieżny do $f(\lim x_\sigma)$.
   Mówimy, że $\Xi \subseteq \Sigma$ jest *współkońcowy* (z Σ), jeśli $(\forall \sigma \in \Sigma)(\exists \xi \in \Xi)(\sigma \leq \xi)$.
   Podnetem netu nazywamy jego obcięcie do pewnego współkońcowego podzbioru zbioru indeksów.
   d) Przestrzeń jest zwarta $\iff$ z każdego netu w tej przestrzeni można wybrać podnet zbieżny.
   Rozważ przyczyny, dla których w b,c,d trzeba używać netów, a zwykłe ciągi nie wystarczą.
10. Hausdorffowe uzwarcenie bX przestrzeni normalnej X jest jej uzwarceniem Čecha–Stone'a $\iff$ domknięcia w bX dowolnych domkniętych i rozłącznych podzbiorów X są rozłączne.
11. Jeśli X jest normalna, zaś A jest jej podzbiorem domkniętym, to $\beta A = cl_{\beta X}(A)$.
12. (M) $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$.
13. Żaden $x \in \beta X \setminus X$ nie ma w βX przeliczalnej bazy otoczeń.
14. Niech X będzie przestrzenią całkowicie regularną, zaś $C_b(X)$ zbiorem funkcji ciągłych i ograniczonych $X \to \mathbf{R}$. *Ideałem* w $C_b(X)$ nazywamy niepusty podzbiór $I \subseteq C_b(X)$, taki że
   (i) $f, g \in I \Rightarrow f + g \in I$;
   (ii) $f \in I, g \in C_b(X) \Rightarrow fg \in I$;
   (iii) $1 \notin I$ (funkcja stale równa 1 nie należy do I).
   Ideał jest *maksymalny,* jeśli nie zawiera się w żadym większym ideale. Pokaż, że dla dowolnego $x \in X$ zbiór $I_x = \{f \in C_b(X) \mid f(x) = 0\}$ jest ideałem maksymalnym. W zbiorze $Spec(C_b(X))$ wszystkich ideałów maksymalnych określamy topologię przyjmując za bazę $\{U_f \mid f \in C_b(X)\}$, gdzie $U_f = \{I \in Spec(C_b(X)) \mid f \notin I\}$. Udowodnij, że $Spec(C_b(X))$ z tą topologią jest uzwarceniem Čecha–Stone'a przestrzeni X ($x \mapsto I_x$ jest kanonicznym włożeniem).