Zadania z topologii, 3

Przez *powierzchnię* rozumiemy na tej liście zwartą i spójną przestrzeń Hausdorffa, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z otwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$.

1. Załóżmy, że X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa a Y przestrzenią ilorazową przestrzeni X. Załóżmy też, że dla każdego $p \in Y$ zbiór $\{p\}$ jest domknięty w Y. Czy wówczas Y jest Hausdorffa?
2. Czy iloraz przestrzeni Hausdorffa przez działanie skończonej grupy zawsze jest jest Hausdorffa?
3. W tym zadaniu nazwijmy *powierzchnią* przestrzeń ilorazową sumy skończonego zbioru rozłącznych trójkątów przez relację sklejającą parami boki, o ile każdy punkt w ilorazie ma otoczenie homeomorficzne z otwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$. Rozważać będziemy tylko spójne powierzchnie. Uzasadnij, że każdą powierzchnię można otrzymać z jednego wielokąta przez posklejanie jego boków parami. Sporządź możliwie małą listę powierzchni, na której każda powierzchnia się pojawia. (Pokazanie, że różne elementy tej listy nie są homeomorficzne, może jeszcze być za trudne). Z których powierzchni na Twojej liście da się wyciąć wstęgę Möbiusa? (Znowu, pokazanie że z pozostałych się nie da może jeszcze być za trudne.)
4. *Sumę spójną* $M\#N$ dwóch powierzchni określamy tak: Wycinamy w każdej z nich okrągłą dziurkę, a następnie sklejamy brzegi tych dziurek. [bardziej formalnie: Niech $D = \{z \in \mathbf{R}^2 : |z| \leq 1\}$, $S^1 = \{z \in \mathbf{R}^2 : |z| = 1\}$. Wybieramy dwa włożenia $f : D \to M$, $g : D \to N$. $M\#N$ to przestrzeń ilorazowa rozłącznej sumy $(M \backslash f(D \backslash S^1)) \cup (N \backslash g(D \backslash S^1))$ przez relację która utożsamia $f(z)$ z $g(z)$ dla każdego $z \in S^1$. Dowód, że wynik tej operacji nie zależy od wyboru f, g pomijamy, gdyż jest zbyt trudny. W konkretnych sytuacjach należy f i g wybierać tak, aby było wygodnie.] Niech S^2 oznacza sferę dwuwymiarową, $\mathbf{R}P^2$ płaszczyznę rzutową, K butelkę Kleina, T^2 torus. Uzasadnij, że dla dowolnej powierzchni M mamy $M\#S^2 \cong M$, $(M\#T^2)\#K \cong (M\#K)\#K$, $\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2 \cong K$.
5. Torus powstaje z kwadratu przez utożsamienie przeciwległych boków (parami, przez translacje). Rozpatrzmy na owym kwadracie relację która utożsamia punkty symetryczne względem środka kwadratu. Uzasadnij, że relacja ta indukuje relację na torusie. Uzasadnij, że iloraz torusa przez tę indukowaną relację jest powierzchnią; jaka to powierzchnia?
6. Podaj przykład zupełnej niepustej przestrzeni X i odwzorowania $f : X \to X$ zmniejszającego odległości różnych punktów które nie ma punktu stałego.
7. Załóżmy, że X jest przestrzenią niepustą i zupełną, zaś $f : X \to X$ spełnia warunek

$$(\forall \delta > 0)(\exists C < 1)(\forall x, y \in X)(d(x, y) > \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)).$$

   Czy f musi mieć punkt stały?
8. Dla $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ określmy $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$. Uzasadnij, że przestrzeń $C^\infty([0, 1])$ złożona z funkcji gładkich (nieskończenie wiele razy różniczkowalnych) na odcinku $[0, 1]$, z metryką $d(f, g) = \sum_{i=0}^\infty 2^{-i} \min\{1, \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty\}$, jest przestrzenią zupełną. Uzasadnij, że zbiór funkcji gładkich które nie są analityczne w żadnym punkcie (tzn. w żadnym otoczeniu żadnego punktu p nie są sumą swego szeregu Taylora w p) jest gęstą G_δ-tą (wsk. zajrzyj do [ES]).
9. Uzasadnij, że przestrzeń liczb niewymiernych (z topologią indukowaną z $\mathbf{R}$) jest homeomorficzna z ω^ω (z topologią produktową).
10. Dla liczby pierwszej p określamy *waluację p-adyczną* $v_p : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ warunkiem $v_p(p^k \frac{a}{b}) = k$ (gdzie $a, b, \in \mathbf{Z}$ nie są podzielne przez p), $v_p(0) = +\infty$. Następnie definiujemy odległość p-adyczną na $\mathbf{Q}$ wzorem $d_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$. Sprawdź, że d_p jest metryką na $\mathbf{Q}$. Uzupełnienie $\mathbf{Q}$ w tej metryce oznaczamy $\mathbf{Q}_p$ i nazywamy liczbami p-adycznymi. Uzasadnij, że operacje dodawania i mnożenia w Q są ciągłe względem metryki p-adycznej; wywnioskuj, że da się je w jedyny sposób przedłużyć do ciągłych działań na $\mathbf{Q}_p$. Uzasadnij, że $\mathbf{Q}_p$ z tymi działaniami jest ciałem.
11. Sprawdź, że domknięcie $\mathbf{Z}$ w $\mathbf{Q}_p$ jest zwarte i zamknięte na operacje dodawania i mnożenia. To domknięcie oznaczamy przez $\mathbf{Z}_p$ i nazywamy pierścieniem liczb całkowitych p-adycznych.
12. Niech $\mathbf{A}$ będzie podzbiorem produktu $\mathbf{R} \times \Pi_p \mathbf{Q}_p$ (gdzie p przebiega wszystkie liczby pierwsze), złożonym z tych punktów których prawie wszystkie współrzędne należą do $\mathbf{Z}_p$. Dla dowolnego skończonego zbioru S liczb pierwszych niech $A_S = \mathbf{R} \times \Pi_{p \in S} \mathbf{Q}_p \times \Pi_{p \notin S} \mathbf{Z}_p$; Mamy wtedy $A = \bigcup_S A_S$ (gdzie S

przebiega wszystkie skończone zbiory liczb pierwszych). Zbiór A wyposażamy w taką topologię, aby każdy podzbiór A postaci A_S był otwarty, a topologia indukowana na takim podzbiorze była topologią produktową. Uzasadnij, że te warunki jednoznacznie określają topologię na **A**. Wykaż, że A z tą topologią jest lokalnie zwarta (każdy punkt na otoczenie, którego domknięcie jest zwarte). Niech $i : \mathbf{Q} \to \mathbf{A}$ bedzie diagonalnym włożeniem: $i(q) = (q, q, q, \ldots)$. Uzasadnij, że $i(\mathbf{Q})$ jest dyskretnym podzbiorem **A** (tzn. z topologią indukowaną jest przestrzenią dyskretną – taką, w której wszystkie zbiory są otwarte). Czy ta ostania własność pozostanie prawdziwa, jeśli w definicji **A** opuścić jeden z czynników?

13. Oznaczenia jak w poprzednim zadaniu.
    Działanie grupy $(\mathbf{Q}, +)$ na **A** określamy wzorem $q(a_0, a_2, a_3, a_5, \ldots) = (a_0 + q, a_2 + q, a_3 + q, a_5 + q, \ldots)$. Uzasadnij, że to jest działanie na **A** oraz że iloraz $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ jest przestrzenią zwartą.