Zadania z topologii, 4

Ćwiczenia

1. Opisz topologię Zariskiego na $\mathbf{R}^1$.
2. Wyprowadź z aksjomatów algebry Boole'a tożsamości: $a \cap a = a$, $a \cup a = a$, $a \cap (a \cup b) = a$, $(a^c)^c = a$, $(a \cap b)^c = a^c \cup b^c$, $(a \cup b)^c = a^c \cap b^c$. [To nie jest ćwiczenie z topologii; niektóre z powyższych tożsamości będą potrzebne w zadaniach—jeśli nie chcesz robić tego ćwiczenia, dołącz je do aksjomatów algebry Boole'a.]

Zadania

3. Wyznacz domknięcia Zariskiego następujących podzbiorów płaszczyzny:
   $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$, $\{(x, e^x) \mid x \in \mathbf{R}\}$, $\{(x,0) \mid |x| \geq 1\}$.
4. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ zeruje się na pewnym otwartym podzbiorze $\mathbf{R}^n$, to f jest wielomianem zerowym.
5. Podzbiór G algebry Boole'a A nazywamy *scentrowanym*, jeśli $(\forall n \in \mathbf{N})(\forall a_1, \ldots, a_n \in G)(a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_n \neq 0)$. Udowodnij, że każdy scentrowany podzbiór A jest zawarty w pewnym filtrze.
6. Udowodnij porządnie, że filtr F jest ultrafiltrem $\iff$ $(\forall a \in A)(a \in F \vee a^c \in F)$.
7. Uzupełnij dowód twierdzenia Stone'a: pokaż, że $U_a \cap U_b = U_{a \cap b}$, $U_a \cup U_b = U_{a \cup b}$, $U_{a^c} = X - U_a$; uzasadnij, że przestrzeń Stone'a jest Hausdorffa i że jest zwarta.
8. Opisz przestrzeń Stone'a algebry wszystkich skończonych lub koskończonych podzbiorów $\mathbf{N}$.
9. Niech F będzie ultrafiltrem w $\mathcal{P}(\mathbf{N})$. Udowodnij, że dla każdej funkcji $f : \mathbf{N} \to [0,1]$ istnieje dokładnie jedna liczba $a \in [0,1]$, taka że $(\forall \varepsilon > 0)(\{n \in \mathbf{N} \mid |f(n) - a| < \varepsilon\} \in F)$.
10. Udowodnij, że przestrzeń Stone'a algebry $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ jest homeomorficzna z $\beta\mathbf{N}$.
11. Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \to Y$, $W(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.
    a) Udowodnij, że jeśli f jest ciągła, to $W(f)$ jest domknięty w $X \times Y$.
    b) Udowodnij, że jeśli $W(f)$ jest domknięty w $X \times Y$, a Y jest zwarta, to f jest ciągła.
    c) Czy w punkcie b) założenie zwartości Y jest konieczne?