Zadania z topologii, 6

Kompleksem symplicjalnym nazywamy skończoną rodzinę K skończonych zbiorów (której elementy to *sympleksy*) spełniającą warunek $(\sigma \in K \wedge \tau \subseteq \sigma) \Rightarrow (\tau \in K)$. *Wymiarem* kompleksu symplicjalnego K nazywamy liczbę $\max\{|\sigma| - 1 \mid \sigma \in K\}$. Założenie skończoności K nie jest absolutnie niezbędne, ale na tej liście będziemy się go trzymać.

Niech $\Delta^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid x_0, x_1, \ldots, x_n \geq 0; \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$. *Realizacją geometryczną* kompleksu symplicjalnego K nazywamy przestrzeń topologiczną $|K|$ zbudowaną następująco. Niech $Klocki(K) = \bigcup_{\sigma \in K} \{\sigma\} \times \Delta^{|\sigma|-1}$ (z topologią sumy rozłacznej). Ustalmy dobry porządek na $\bigcup K$; załóżmy, że $\tau \subseteq \sigma \in K$; niech $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$, przy czym $v_0 < \ldots < v_n$, zaś $\tau = \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}\}$, gdzie $i_0 < \ldots < i_k$; określmy funkcję $skl_{(\tau,\sigma)} : \{\tau\} \times \Delta^k \to \{\sigma\} \times \Delta^n$ wzorem $skl_{(\tau,\sigma)}(\tau, (x_0, \ldots, x_k)) = (\sigma, (0, \ldots, 0, x_0, 0, \ldots, 0, x_{i_k}, 0 \ldots, 0))$ (x_{i_j} pojawia się po prawej stronie na i_j-tym miejscu, licząc od zera). Zdefiniujmy relację $\sim$ na $Klocki(K)$ jako tranzytywne domknięcie relacji następującej: $(\tau, p) \sim (\sigma, q) \iff [((\tau \subseteq \sigma) \wedge (skl_{(\tau,\sigma)}(p) = q)) \vee ((\sigma \subseteq \tau) \wedge (skl_{(\sigma,\tau)}(p) = q))]$. $|K|$ to przestrzeń ilorazowa $Klocki(K)/\sim$.

1. Uzasadnij, że wybór porządku na $\bigcup K$ jest nieistotny: dwa różne wybory prowadzą do homeomorficznych przestrzeni $|K|$.
2. Uzasadnij, że $|K|$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa (przypomnienie: zakładamy skończoność K).
   Niech δ^n będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
3. Uzasadnij, że $|\delta^n|$ jest homeomorficza z Δ^n.

Triangulacją przestrzeni topologicznej X nazywamy parę (K, ϕ), gdzie K jest kompleksem symplicjalnym, zaś $\phi : |K| \to X$ homeomorfizmem.

4. Opisz możliwie proste triangulacje $\Delta^n \times [0, 1]$, $\Delta^n \times \Delta^k$.
5. Opisz jakieś triangulacje torusa, sfery, płaszczyzny rzutowej. Używaj możliwie mało trójkątów.
6. Niech X będzie kompleksem symplicjalnym, którego realizacja geometryczna jest spójna. Opisz triangulacje i wylicz charakterystykę Eulera następujących przestrzeni: $X \times I$;
   $CX := (X \times I)/\sim$, $(x, t) \sim (y, s) \iff (x = y \wedge s = t) \vee (s = t = 1)$;
   $\Sigma X := (X \times I)/\sim$, $(x, t) \sim (y, s) \iff (x = y \wedge s = t) \vee (s = t = 1) \vee (s = t = 0)$;
7. Udowodnij, że jeśli K jest kompleksem symplicjalnym wymiaru n, to $|K|$ da się włożyć (a) w $\mathbf{R}^N$, dla dostatecznie dużego N; (b) w $\mathbf{R}^{2n+1}$.
8. Niech $K^1 = \{\sigma \in K \mid |\sigma| \leq 2\}$. Udowodnij, że $|K|$ jest spójna $\iff$ $|K^1|$ jest spójna
9. *Drzewem* nazywamy spójny graf bez zamkniętych cykli. Ile wynosi charakterystyka Eulera skończonego drzewa?
10. Niech $\Sigma_n = \{[x : y : z] \in \mathbf{CP}^2 \mid x^n + y^n = z^n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. (a) Uzasadnij, że Σ_n jest powierzchnią; (b) Oblicz $\chi(\Sigma_n)$.
11. Dla dowolnej liczby całkowitej n skonstuuj kompleks symplicjalny K wymiaru 2, taki że (a) $\chi(|K|) = n$; (b) $\chi(|K|) = n$ i $|K|$ jest spójny.
12. Policz charakterystykę Eulera skończonego rusztowania, tzn. powierzchni, która jest brzegiem małego otoczenia (tubularnego) 3-wymiarowej kratki rozmiaru $a \times b \times c$
13. Policz charakterystykę Eulera wszystkiego co sie rusza.