Zadania z topologii 8

CW-kompleks jest *lokalnie skończony,* jeśli każdy jego punkt ma otoczenie zawarte w skończonym podkompleksie.

1. CW-kompleks jest lokalnie zwarty $\iff$ jest lokalnie skończony.
2. CW-kompleks jest metryzowalny $\iff$ jest lokalnie skończony.
3. Funkcja z CW-kompleksu w przestrzeń topologiczną jest ciągła $\iff$ jej obcięcie do każdego skończonego podkompleksu jest ciągłe.
4. CW-kompleks jest drogowo spójny $\iff$ jego 1-szkielet jest drogowo spójny.
5. CW-kompleks jest spójny $\iff$ jest drogowo spójny.
6. Skończony CW-kompleks można włożyć w $\mathbf{R}^n$, dla odpowiednio dużego n. (włożyć=odwzorować homeomorficznie na obraz)
7. Każdą zwartą powierzchnię można przedstawić w postaci CW-kompleksu z jedną 2-komórką.
8. Udowodnij, że ciągłe odwzorowanie $S^1 \to S^2$ jest homotopijne z ciągłym odwzorowaniem które nie jest surjekcją. Wywnioskuj stąd, że $\pi_1(S^2) = 1$. Łatwo uogólnij Swój argument na $\pi_1(S^n)$, $n > 2$.
9. Wyznacz grupę podstawową skończonego produktu sfer.
10. Wyznacz $\pi_1(SO(3))$ (przypomnij sobie kwaterniony) oraz $\pi_1(SO(4))$ (dwakroć przypomnij sobie kwaterniony, zarówno z lewej, jak i z prawej strony)
11. Trąbka Borsuka jest ściągalna.
12. Jeśli $X = U \cup V$, gdzie U, V są otwarte i jednospójne, zaś $U \cap V$ jest drogowo spójny, to X jest jednospójny.
13. Jeśli $X = U \cup V$, gdzie U, V są otwarte, zaś $U \cap V$ jest drogowo spójny, to $\pi_1(X)$ jest (izomorficzna z) amalgamatem $\pi_1(U) *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1(V)$. [Wsk. Łatwo zobaczyć homomorfizm z tego amalgamatu w $\pi_1(X)$. Aby pokazać, że każda pętla jest w obrazie, rozbij ją na kawałki na tyle krótkie, że każdy z nich jest cały w U lub cały w V. Aby pokazać, że homomorfizm jest 1-1, weź homotopię zabijającą obraz elementu amalgamatu, i rozłóż ją na małe kawałki, z których każdy jest cały w U lub cały w V.]
14. Niech X będzie bukietem okręgów, tzn. CW-kompleksem wymiaru 1 z jedną 0-komórką. Odwzorowanie charakterystyczne każdej 1-komórki zadaje pętlę w X. Udowodnij, te pętle generują w sposób wolny $\pi_1(X)$ (która w szczególności jest grupą wolną). [Najpierw rozważ przypadek, gdy X jest skończony.]
15. Niech X będzie dwuwymiarowym CW-kompleksem z jedną 0-komórką. Każda 2-komórka e ma swoje odwzorowanie charakterystyczne $f_e : D^2 \to sk_1(X)$. Obcięcie $f_e|_{\partial D^2}$ jest pętlą w $sk_1(X)$, i zadaje pewną klasę sprzężoności w $\pi_1(sk_1(X))$. Niech N będzie najmniejszym dzielnikiem normalnym $\pi_1(sk_1(X))$ zawierającym wszystkie takie klasy sprzężoności odpowiadające 2-komórkom. Pokaż, że $\pi_1(X) = \pi_1(sk_1(X))/N$. [Najpierw rozważ przypadek, gdy X jest skończony.]
16. Używając poprzedniego zadania napisz prezentacje grup podstawowych zwartych powierzchni (z listy klasyfikacyjnej, a co najmniej znanego Ci kawałka tej listy). Pokaż, że grupy podstawowe powierzchni (z tej listy) są różne. [Jest to sposób dowodzenia niehomeomorficzności powierzchni.]

Niech $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_k\rangle$ będzie grupą zadaną przez skończoną prezentację. *Kompleksem prezentacyjnym* nazywamy wówczas dwuwymiarowy CW-kompleks z jedną 0-komórką, n 1-komórkami (ustawionymi w bijekcji z generatorami grupy, i na dodatek zorientowanymi), oraz k 2-komórkami. 2-komórki przyklejamy tak: niech $r_j = x_{i1}^{\epsilon 1} \ldots x_{is}^{\epsilon s}$; dzielimy brzeg D^2 na s łuków, a następnie przyklejamy j-ty łuk wzdłuż 1-komórki odpowiadającej x_{ij}, zgodnie z orientacją jeśli $\epsilon j = 1$, a wbrew orientacji jeśli $\epsilon j = -1$.

17. Udowodnij, że grupa podstawowa kompleksu prezentacyjnego grupy G jest izomorficzna z G. Opisz kompleksy prezentacyjne dla: $\langle a \mid a^2\rangle$, $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$. Opisz dwa różne kompleksy prezentacyjne grupy cyklicznej nieskończonej.
18. Niech X będzie spójnym CW-kompleksem wymiaru 1. Udowodnij, że X jest homotopijnie równoważny z bukietem okręgów. Wywnioskuj, że $\pi_1(X)$ jest wolna.
19. Grupa podstawowa CW-kompleksu jest równa grupie podstawowej jego 2-szkieletu.
20. Udowodnij relatywny lemat o swobodnym punkcie: Niech $U \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty, $B^k = \{x \in \mathbf{R}^k \mid |x| < 1\}$, $d^k = \{x \in \mathbf{R}^k \mid |x| \le \frac{1}{2}\}$, $F : U \to B^k$ ciągłe, $F^{-1}(d^k)$ zwarty. Jeśli $k > n$, to istnieje ciągłe $\phi : U \to B^k$, równe F poza $F^{-1}(d^k)$, takie że $\phi^{-1}(0) = \emptyset$. Zauważ, że $\phi \simeq F \operatorname{rel}(U - F^{-1}(d^k))$.
21. Używając poprzedniego zadania wykaż, że każde odwzorowanie z CW-kompleksu w CW-kompleks jest homotopijne z odwzorowaniem komórkowym. (Może się okazać, że brakuje Ci jeszcze jednego faktu: tw. Borsuka o kapeluszu. Jeśli tak się stanie, możesz z niego skorzystać, o ile starannie je sformułujesz.)
22. Niech X_ϕ powstaje z X przez doklejenie D^n wzdłuż $\phi : \partial D^n \to X$. Udowodnij, że jeśli $\phi \simeq \psi$, to X_ϕ jest homotopijnie równoważne z X_ψ.
23. Nakrycie CW-kompleksu jest CW-kompleksem.