Zadania z topologii 9

Przestrzenie topologiczne X, Y są *homotopijnie równoważne* ($X \simeq Y$), jeśli istnieją (ciągłe) $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, takie że $f \circ g \simeq id$, $g \circ f \simeq id$. X jest *ściągalna,* jeżeli jest homotopijnie równoważna z punktem

1. Homotopijna równoważność jest relacją równoważności (modulo problemy teoriomnogościowe).
2. $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

Podzbiór A przestrzeni X nazywamy jej *retraktem,* jeśli istnieje (ciągłe) odwzorowanie $r : X \to A$ takie że $(\forall a \in A)(r(a) = a)$ [takie odwzorowanie r nazywamy *retrakcją* X na A]. Jeśli dodatkowo r jest homotopijne z id_X, to mówimy że A jest *retraktem deformacyjnym* przestrzeni X.

3. Jeśli $r : X \to A$ jest retrakcją, to A jest domknięty w X, zaś $r_* : \pi_1(X) \to \pi_1(A)$ jest epimorfizmem. Jeśli A jest retraktem deformacyjnym X, to A i X są homotopijnie równoważne i $\pi_1(X) \cong \pi_1(A)$.

Można więc, zamiast liczyć π_1 przestrzeni, liczyć π_1 jej retraktu deformacyjnego.

4. Wyznacz grupę podstawową:
   (a) płaszczyzny bez skończonej liczby punktów;
   (b) $\mathbf{R}^3$ bez skończonej liczby punktów;
   (c) $\mathbf{R}^3$ bez okręgu o promieniu 1 leżącego w płaszczyźnie XY;
   (ć) $\mathbf{R}^3$ bez pary okręgów $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$, $\{(y-1)^2 + z^2 = 1, x = 0\}$;
   (d) $\mathbf{R}^3$ bez skończonej liczby prostych parami skośnych;
   (e) $\mathbf{R}^3$ bez skończonej liczby prostych (w zależności od ich wzajemnego położenia; jeśli to zbyt skomplikowane, rozważ kilka ciekawych przykładów).
5. Sfera S^∞ jest ściągalna. [S^∞ jest CW-kompleksem – wstępującą sumą swych podkompleksów S^n.]
6. $SL_n(\mathbf{R})$ jest homotopijnie równoważna z $SO(n)$; $SL_n(\mathbf{C})$ jest homotopijnie równoważna z $SU(n)$.
7. Jeśli G jest grupą topologiczną, to $\pi_1(G, e)$ jest abelowa.
8. $\pi_n(X)$ jest abelowa, dla $n > 1$ i dowolnego X.
9. Niech $f_{(k,l)} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ będzie dane przez $f_{(k,l)}(t) = ((2+\cos(lt))\cos(kt), (2+\cos(lt))\sin(kt), \sin(lt))$. ($k, l$ to względnie pierwsze parametry całkowite. $f_{(k,l)}$ nazywamy *węzłem torusowym* typu (k, l) – jest to pętla leżąca na powierzchni pewnego torusa, i obiegająca ten torus k-krotnie w jednym, a l-krotnie w drugim kierunku.) Napisz prezentacje grup $G_{(k,l)} = \pi_1(\mathbf{R}^3 - f_{(k,l)}[[0, 2\pi]])$; spróbuj udowodnić, że otrzymane grupy są różne (poza oczywistymi izomorfizmami typu $G_{(k,l)} \cong G_{(-l,k)}$).

Na potrzeby następnych dwóch zadań węzeł to łamana zamknięta bez samoprzecięć.

10. Abelianizacja grupy podstawowej dopełnienia dowolnego węzła w $\mathbf{R}^3$ jest izomorficzna z $\mathbf{Z}$.
11. Niech $\mathbf{R}^3$ będzie podzbiorem $\mathbf{R}^4$ w standardowy sposób: $(x, y, z) = (x, y, z, 0)$.
    a) Niech K będzie węzłem w $\mathbf{R}^3$; wyznacz $\pi_1(\mathbf{R}^4 - K)$.
    b) Niech S^2 będzie sferą o promieniu 1 w $\mathbf{R}^3$; wyznacz $\pi_1(\mathbf{R}^3 - S^2)$ oraz $\pi_1(\mathbf{R}^4 - S^2)$.
    c) Niech $T = \{((2 + \cos(s))\cos(t), (2 + \cos(s))\sin(t), \sin(s)) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$ będzie torusem. Wyznacz $\pi_1(\mathbf{R}^3 - T, (1, 0, 0))$, $\pi_1(\mathbf{R}^4 - T, (1, 0, 0, 0))$ oraz homomorfizm między tymi grupami indukowany przez włożenie $(\mathbf{R}^3 - T) \to (\mathbf{R}^4 - T)$.
12. Opisz/naszkicuj nakrycie bukietu dwóch okręgów odpowiadające podgrupie cyklicznej grupy podstawowej tego bukietu generowanej przez jeden z okręgów.
13. Niech H będzie podgrupą grupy wolnej F_2
    a) H jest grupą wolną.
    b) Niech $[F_2 : H] < +\infty$. Znajdź związek między liczbą $[F_2 : H]$ a liczbą wolnych generatorów H.
    c) Podaj przykłady kilku podgrup skończonego indeksu w F_2 (zadaj je przez generatory).
14. Charakterystyka Eulera 3-wymiarowej rozmaitości (zwartej, bez brzegu, striangulowanej) jest równa 0.
15. Każdą ścianę dwunastościanu foremnego sklejamy ze ścianą przeciwległą, utożsamiając je przez translację złożoną z prawoskrętnym obrotem o $\pi/5$. Sprawdź, że otrzymana przestrzeń P jest rozmaitością trójwymiarową (jest to tzw. *sfera homologiczna Poincarégo*). Znajdź prezentację $\pi_1(P)$, używając struktury CW-kompleksu na P pochodzącej z podziału dwunastościanu na wierzchołki, krawędzie, ściany i wnętrze. Zbadaj możliwie dokładnie uzyskaną grupę (w szczególności rozstrzygnij, ile ma ona elementów, oraz wylicz jej abelianizację).

Hipoteza Poincarégo mówiła najpierw, że rozmaitość trójwymiarowa M spełniająca $H_1(M) = 0$ jest homeomorficzna z S^3. [H_1 to abelianizacja π_1 – oryginalna definicja jest oczywiście inna.] Poincaré niemal natychmiast znalazł kontrprzykład – jest nim właśnie sfera homologiczna Poincarégo – i wzmocnił założenie hipotezy do $\pi_1(M) = 0$. Dowód tej wersji ogłosił niedawno Perelman. Na razie jest opublikowany tylko elektronicznie, ale do tej pory nie znaleziono błędu.