Nakrycia

Def. $p : E \to X$ jest *nakryciem,* jeśli każdy $x \in X$ ma otoczenie otwarte U, takie że $p^{-1}(U)$ jest rozłączną sumą otwartych zbiorów S_i (tzw. *płatów*), takich że $p|_{S_i} : S_i \to U$ jest homeomorfizmem (mówimy, że U jest *prawidłowo nakryte*).

Jeśli $f : Y \to X$ ma obraz zawarty w prawidłowo nakrytym U, to można je *podnieść,* tzn. znaleźć $f' : Y \to X$, takie że $f = p \circ f'$. Wybieramy sobie dowolny płat S_i i kładziemy $f' = (p|_{S_i})^{-1} \circ f$. Podstawowa technika przy dowodzeniu twierdzeń o nakryciach to szukanie podniesień odwzorowań: najpierw lokalnie, jak przed chwilą; potem przez sklejenie podniesień lokalnych – wybieramy płaty S_i tak, by skleić ciągłe podniesienie.

Niech $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ będzie nakryciem.

Twierdzenie. (o jednoznaczności podniesienia) Niech $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$, Y spójna. Wtedy istnieje co najwyżej jedno podniesienie: $f' : (Y, y_0) \to (E, e_0)$, takie że $p \circ f' = f$.

Zbiór na którym podniesienia sie zgadzają jest otwarty i niepusty ($\ni y_0$); jego dopełnienie jest otwarte, więc puste.

Twierdzenie. (o podnoszeniu dróg) Jeśli $(Y, y_0) = (I, 0)$, to istnieje (jedyne) f' [założenie jak w poprzednim tw.].

Dzielimy I na małe odcineczki i podnosimy na każdym po kolei.

Twierdzenie. (o podnoszeniu homotopii) Niech $F : Y \times I \to X$, $f' : Y \to E$, $F(y, 0) = p \circ f'(y)$. Wtedy istnieje $F' : Y \times I \to X$, takie że $F = p \circ F'$.

F' jest jedyne: dostajemy je podnosząc każdą drogę $F(y, \cdot)$ z osobna. Trzeba pokazać ciągłość. Podnosimy drogę $F(y, \cdot)$, po kawałku; tak samo (po tym samym kawałku) podnosi się $F(y', \cdot)$ dla y' z pewnego otwartego otoczenia $U \ni y$; to daje ciągłe podniesienie na $U \times I$. Odwzorowanie, ciągłe na każdym ze zbiorów pewnego pokrycia otwartego, jest ciągłe.

Wn. Jeśli drogi startujące w x_0 są homotopijne $rel\{0, 1\}$, to i ich podniesienia startujące z e_0 są homotopijne $rel\{0, 1\}$ – w szczególności, mają ten sam koniec.

Wn. $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(X, x_0)$ jest monomorfizmem.

Def. Określmy $p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ tak: $(x, [\sigma]) \mapsto$koniec startującego w x podniesienia pętli σ.

1. Udowodnij, że tak określone odwzorowanie jest (prawym) działaniem $\pi_1(X, x_0)$ na $p^{-1}(x_0)$. Sprawdź, że
   a) stabilizatorem $e \in P^{-1}(x_0)$ jest $p_*(\pi_1(E, e))$;
   b) Jeśli E jest drogowo spójna, to działanie jest tranzytywne;
   c) Podaj przykład drogowo spójnego nakrycia i $e, e' \in p^{-1}(x_0)$, takich że $p_*(\pi_1(E, e)) \neq p_*(\pi_1(E, e'))$.
2. Jeśli E jest drogowo spójna, to dla każdych $x, x' \in X$ włókna $p^{-1}(x)$ i $p^{-1}(x')$ są równoliczne.

Def. Homeomorfizm $\phi : E \to E$ nazywamy *przekształceniem nakrywającym,* jeśli $p \circ \phi = p$.

Zbiór wszystkich przekształceń nakrywających tworzy grupę (ze składaniem jako działaniem), oznaczaną np. $Deck(E/X)$. Jeśli E jest spójna, to dla każdego $e \in p^{-1}(x_0)$ istnieje co najwyżej jedno $\phi \in Deck(E/X)$, takie że $\phi(e_0) = e$ (na mocy tw. o jednoznaczności podniesienia).

3. Czy może się zdarzyć, że takie ϕ nie istnieje?

Def. Przestrzeń jest *lokalnie drogowo spójna,* jeśli dla każdego jej punktu x i jego otwartego otoczenia U istnieje otwarte otoczenie V, $x \in V \subseteq U$, takie że każde dwa punkty z V można połączyć drogą w U.

4. Przestrzeń spójna i lokalnie drogowo spójna jest drogowo spójna.

Twierdzenie. Niech E będzie jednospójna i lokalnie drogowo spójna. Wtedy $Deck(E/X) \cong \pi_1(X, x_0)$.

$Deck(E/X) \ni \phi \mapsto [p \circ (\text{droga z } e_0 \text{ do } \phi(e_0))] \in \pi_1(X, x_0)$ jest izomorfizmem; homomorfizm odwrotny $[\sigma] \mapsto \phi_{[\sigma]}$ robimy tak: $[\sigma]$ ma podniesienie σ' startujące w e_0; punkt $e \in E$ łączymy drogą τ' z e_0, a następnie znajdujemy drogę τ'', podnoszącą $p \circ \tau'$, kończącą się w $\sigma'(1)$; τ'' zaczyna się w $\phi_{[\sigma]}(e)$.

5. Zbadaj, czy występujący w twierdzeniu izomorfizm nie jest aby antyizomorfizmem. Grupa $Deck(E/X)$ działa wszak na włóknie z lewej, a $\pi_1(X, x_0)$ z prawej strony?
6. Załóżmy, że grupa G działa na przestrzeni E (spójnej i lokalnie drogowo spójnej) w sposób właściwie dyskretny: każdy $e \in E$ ma otwarte otoczenie V, takie że $(\forall g \in G - \{1\})(V \cap gV = \emptyset)$. Wtedy: (1) naturalne rzutowanie $p : E \to E/G$ jest nakryciem; (2) $Deck(E/(E/G)) \cong G$; (3) $p_*(\pi_1(E))$ jest dzielnikiem normalnym $\pi_1(E/G)$.

Nakrycie uniwersalne

Od tej pory zakładamy, że rozważane przestrzenie są spójne i lokalnie drogowo spójne [s, lds].

Twierdzenie. $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ma podniesienie $\iff$ $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$. $[E, X, Y$ s, lds.$]$

$\Leftarrow$: Niech σ będzie drogą z y_0 do y; $f'(y)$:=koniec startującego w e_0 podniesienia drogi $f \circ \sigma$.

7. Uzasadnij ciągłość f'.

Wn. Jeśli Y jest jednospójna, to podniesienie istnieje.

Wn. Jeśli $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ i $p' : (E', e_0') \to (X, x_0)$ są jednospójnymi nakryciami (X, x_0), to istnieje jedyny homeomorfizm $\phi : (E, e_0) \to (E', e_0')$, taki że $p' \circ \phi = p$.

Def. $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ nazywamy *nakryciem uniwersalnym* przestrzeni X, jeśli E jest jednospójna. Zwykle piszemy wtedy $\tilde{X}$ zamiast E. Nakrycie uniwersalne, jeśli istnieje, jest jedyne z dokładnością opisaną we wniosku powyżej.

8. Jeśli $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ jest nakryciem uniwersalnym, zaś $q : (E, e_0) \to (X, x_0)$ jakimś nakryciem, to istnieje jedyne przekształcenie $r : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (E, e_0)$, takie że $q \circ r = p$. Co więcej, r jest nakryciem.

Def. Przestrzeń X jest *półlokalnie jednospójna,* jeżeli każdy $x \in X$ ma otoczenie otwarte U, takie że każda pętla zaczepiona w x zawarta w U jest homotopijna $rel\{0, 1\}$ w X z pętlą stałą.

Przestrzenie jednospójne są półlokalnie jednospójne; jeśli nakrycie przestrzeni X jest półlokalnie jednospójne, to X też jest; półlokalna jednospójność jest więc warunkiem koniecznym posiadania nakrycia uniwersalnego.

Pd. Pawie oczko: $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$, nie jest półlokalnie jednospójne.

Twierdzenie. Przestrzeń [s, lds,] półlokalnie jednospójna ma nakrycie uniwersalne.

$\tilde{X}$ to zbiór dróg w X o początku x_0, modulo relacja homotopii $rel\{0, 1\}$.

Twierdzenie. Niech X będzie [s, lds,] półlokalnie jednospójna, zaś H niech będzie podgrupą $\pi_1(X, x_0)$. Wtedy istnieje nakrycie $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$, takie że $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Przy izomorfizmie $\pi_1(X, x_0) \cong Deck(\tilde{X}/X)$ grupie H odpowiada $H' < Deck(\tilde{X}/X)$. Kładziemy $E = \tilde{X}/H'$.

9. Niech X będzie półlokalnie jednospójna, zaś $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ oraz $p' : (E', e_0') \to (X, x_0)$ niech będą jej nakryciami. $[X, E, E'$ s, lds.$]$ Wtedy
   a) Istnieje $r : (E, e_0) \to (E', e_0')$ takie że $p' \circ r = p \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) < p'_*(\pi_1(E', e_0'))$;
   b) Istnieje homeomorfizm $r : (E, e_0) \to (E', e_0')$ taki że $p' \circ r = p \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e_0'))$;
   c) Istnieje $r : E \to E'$ takie że $p' \circ r = p \iff \exists \gamma \in \pi_1(X, x_0), \gamma \cdot p_*(\pi_1(E, e_0)) \cdot \gamma^{-1} < p'_*(\pi_1(E', e_0'))$;
   d) Istnieje homeomorfizm $r : E \to E'$ taki że $p' \circ r = p \iff p_*(\pi_1(E, e_0))$, $p'_*(\pi_1(E', e_0'))$ są sprzężone w $\pi_1(X, x_0)$.

Def. Nakrycie $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ jest *regularne,* jeśli $p_*(\pi_1(E, e_0))$ jest dzielnikiem normalnym $\pi_1(X, x_0)$.

10. Udowodnij, że obcięcie do $p^{-1}(x_0)$ jest izomorfizmem grupy $Deck(E/X)$ i grupy bijekcji $p^{-1}(x_0)$ przemiennych z prawym działaniem $\pi_1(X, x_0)$ na $p^{-1}(x_0)$.
11. $p : E \to X$ jest regularne $\iff$ $Deck(E/X)$ działa tranzytywnie na $p^{-1}(x_0)$. Wywnioskuj, że jeśli nakrycie jest regularne, to $E/Deck(E/X) = X$.
12. $p : E \to X$ nie jest regularne $\iff$ pewna pętla w X jest jednocześnie obrazem pewnej zamkniętej pętli w E i pewnej niezamkniętej drogi w E.
13. Podaj przykład nakrycia ósemki $[\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\}]$, które nie jest regularne.
14. $\mathbf{RP}^n$ jest zdefiniowana jako iloraz S^n przez antypodyzm $x \mapsto -x$. Udowodnij, że $\pi_1(\mathbf{RP}^n) = \mathbf{Z}/2$. Przestrzeń soczewkowa $L(p, q)$ jest zdefiniowana jako iloraz sfery $S^3 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ przez działanie $\mathbf{Z}/p$ zadane na generatorze wzorem $(z, w) \mapsto (\exp(2\pi i/p)z, \exp(2q\pi i/p)w)$ [dla p, q względnie pierwszych]. Wykaż, że $\pi_1(L(p, q)) = \mathbf{Z}/p$.
15. Niech $p : (E, e_0) \to (F, f_0)$ i $q : (F, f_0) \to (X, x_0)$ będą nakryciami. Uzasadnij, że jeśli p, q i $q \circ p$ są regularne, to $Deck(F/X) \cong Deck(E/X)/Deck(E/F)$. Czy z tego, że $q \circ p$ jest regularne, wynika, że p jest regularne? że q jest regularne?

Twierdzenie. Niech (X, x_0) będzie grupą topologiczną z elementem neutralnym x_0, zaś $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ jej [s,lds] nakryciem. Wtedy na E istnieje jedyna struktura grupy topologicznej, taka że e_0 jest elementem neutralnym a p jest homomorfizmem.