Zadania treningowe z algebry liniowej B.

Egzamin do wykładu A, sprzed roku (120 min.).

1. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, punkt P – środkiem boku AB, punkt Q – środkiem boku CD, punkt R – punktem przecięcia prostych DB i PC, punkt S – punktem przecięcia prostych DB i AQ. Uzasadnij, że punkty R i S dzielą przekątną BD na trzy odcinki równej długości. (Wsk.: Wystarczy pokazać, że $\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{RB}$.)
2. Przedstaw wektor $\binom{1}{1}$ w postaci sumy wektorów własnych macierzy $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\4&1\end{smallmatrix}\right)$.
3. Znajdź równanie *parametryczne* płaszczyzny prostopadłej do prostej $x-1=\frac{y}{2}=-z$ i przechodzącej przez punkt przecięcia prostej $x=\frac{y+1}{3}=1-z$ z płaszczyzną $2x-y+z=4$.
4. Uzasadnij, że macierz $\begin{pmatrix}0&27&-1\\1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$ ma trzy różne rzeczywiste wartości własne. Oblicz siódmą potęgę iloczynu tych trzech wartości własnych.
5. Sprawdź, że przekształcenie płaszczyzny $\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$ zadane zespolonym wzorem $P(z)=-i(\bar{z}+3)$ jest izometrią. Znajdź wektor U i macierz $m(A)$ izometrii liniowej A, takie że $P=T_U\circ A$.
6. Podaj przykład czterech wektorów w $\mathbf{R}^3$, takich że każde 3 z nich są liniowo zależne, a każde dwa z nich są liniowo niezależne. Uzasadnij, że podany przykład naprawdę ma żądane własności.

Egzamin poprawkowy do wykładu A, sprzed roku.

7. Znajdź sinus kąta między prostą $-x-1=\frac{1-y}{2}=z+3$ a płaszczyzną przechodzącą przez punkty $(0,1,1)^\top$, $(1,1,2)^\top$, $(1,3,4)^\top$.
8. Niech T będzie przekształceniem liniowym $\mathbf{R}^3$, takim że $T((0,1,1)^\top)=(0,2,2)^\top, T((1,1,0)^\top)=(1,0,1)^\top, T((0,0,1)^\top)=(0,1,0)^\top$. Znajdź macierz przekształcenia T^{-1}.
9. Znajdź równanie nieparametryczne obrazu prostej $x+3y=1$ przez odbicie względem prostej $y=2x$.
10. Czy powierzchnia $2x^2+2xy+4yz-2z^2=1$ jest elipsoidą, hiperboloidą jednopowłokową czy hiperboloidą dwupowłokową? Precyzyjnie uzasadnij odpowiedź.
11. Wiedząc że $2+i$ jest pierwiastkiem wielomianu $P(z)=z^4-9z^3+23z^2-17z-10$, znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania $P(z)=0$.
12. Podaj przykład niezerowej macierzy symetrycznej 3×3 oraz jej trzech liniowo niezależnych wektorów własnych z których żadne dwa nie są prostopadłe.

koniec egzaminów

13. Czy jest prawdą, że dla dowolnej macierzy symetrycznej M i dowolnej macierzy odwracalnej P wartości własne macierzy $P^\top MP$ i macierzy M są takie same?
14. Czy jeśli dwie macierze mają ten sam wielomian charakterystyczny, to muszą być sprzężone? (Tzn. czy jest prawdą, że jeśli A,B mają ten sam wielomian charakterystyczny, to istnieje odwracalna macierz P, taka że $A=PBP^{-1}$.)
15. Czy jest prawdziwy następujący fakt: jeśli Q,Q' są formami kwadratowymi na $\mathbf{R}^2$, zaś $V,W\in\mathbf{R}^2$ są lnz, oraz jeśli $Q(V)=Q'(V)$ i $Q(W)=Q'(W)$, to $Q=Q'$.
16. (a) Oblicz odległość punktu $(1,2,-2)^\top$ od płaszczyzny $2x-3y+z=5$ nie używając wzoru na odległość punktu od płaszczyzny. (b) Wyprowadź wzór na odległość punktu $(x_0,y_0,z_0)^\top$ od płaszczyzny $ax+by+cz=d$.
17. Oblicz $\left(\begin{smallmatrix}-4&7\\-3&5\end{smallmatrix}\right)^{2274}\binom{7}{-1}$. (Wsk. $(z^2-z+1)(z+1)=z^3+1$.) Zminimalizuj ilość rachunków.
18. Udowodnij, że jeśli $M\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$, $\det(M)=1$ i M nie diagonalizuje się nad $\mathbf{R}$, to $|\mathrm{tr}(M)|\leq 2$.
19. Uzasadnij, że $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ nie jest macierzą izometrii w żadnym (choćby i nieprostokątnym) liniowym układzie współrzędnych.
20. Pokaż, że jeśli okrąg (leżący w $\mathbf{R}^3$) zrzutować prostopadle na jakąkolwiek płaszczyznę, to otrzyma się elipsę lub odcinek.
21. Student przyszedł do Pana Gala z następującym zadaniem: "Podaj, z dokładnością do $0,01$, części: rzeczywistą i urojoną, pewnego (dowolnie przez siebie wybranego) pierwiastka stopnia 1000000 z liczby zespolonej ξ o module 1 i argumencie ..." Pan Gal podał odpowiedź, zanim student zdążył powiedzieć, jaki jest argument ξ. Jak to możliwe?
22. Liniowy układ równań $AX=Y$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Uzasadnij, że dla dowolnego Z układ $AX=Z$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie.
23. Uzasadnij, że jeśli dla wszystkich $w\in\mathbf{R}^3$ mamy $\langle w,u\rangle=\langle w,v\rangle$, to $u=v$.
24. Opisz obraz i jądro przekształcenia liniowego $X\mapsto A\times X$ (gdzie A jest ustalonym wektorem).