Egzamin z algebry liniowej 2 A, Test, Wariant A
11 czerwca 2003 r.

1. (A) Iloczyn dwóch macierzy kwadratowych może być macierzą niekwadratową.
   (B) Macierze jednostkowe I_1 i I_2 występujące w równości macierzowej $I_1 \cdot A = A \cdot I_2$ muszą być jednakowe.
2. (A) Czy iloczyn macierzy ortogonalnych jest zawsze macierzą ortogonalną?
   (B) Czy jeśli iloczyn dwóch macierzy 4×4 jest macierzą nieodwracalną, to obie te macierze muszą być nieodwracalne?
3. (A) Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego $T : R^4 \to R^4$ musi być zawsze wielomianem stopnia 4.
   (B) Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego może wcale nie mieć pierwiastków rzeczywistych.
4. (A) Czy w przestrzeni R^4 można znaleźć liniowo niezależny układ złożony z więcej niż pięciu wektorów?
   (B) Czy dwa współliniowe wektory w R^4 mogą różnić się na tylko jednej współrzędnej?
5. (A) Podprzestrzeń wszystkich macierzy symetrycznych rozmiaru 2×2 jest generowana przez macierze $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (B) Zbiór wielomianów stopnia ≤ 2 o zerowym wyrazie wolnym tworzy podprzestrzeń liniową.
6. (A) Iloczyn skalarny wektorów jednostkowych z R^n jest zawsze liczbą z przedziału $[-2, 2]$.
   (B) Dla każdego wektora X z R^n (gdzie $n \geq 2$) istnieje dokładnie jeden prostopadły do X wektor jednostkowy.
7. (A) Jeśli przy rozwiązywaniu układu równań metodą eliminacji otrzymamy w macierzy rozszerzonej dwa jednakowe wiersze, to rozwiązywany układ jest sprzeczny.
   (B) Układ równań o kwadratowej macierzy głównej ma zawsze rozwiązanie.
8. (A) Jeśli macierz funkcjonału kwadratowego w R^3 ma choć jeden wyraz ujemny, to funkcjonał ten nie jest dodatnio określony.
   (B) Nie każda macierz rozmiaru 3×3 jest macierzą pewnej formy kwadratowej trzech zmiennych.
9. (A) Po dopisaniu do macierzy nowej kolumny złożonej z samych zer rząd macierzy może spaść o 1.
   (B) Jeśli nie wszystkie dopełnienia algebraiczne wyrazów macierzy rozmiaru $n \times n$ są zerowe, to rząd tej macierzy nie może być większy niż $n - 1$.
10. Baza $\mathcal{B}'$ przestrzeni wektorowej V powstaje z bazy $\mathcal{B}$ tej przestrzeni przez zamianę każdego wektora na przeciwny.
    (A) Macierzą przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}'$ jest macierz $-I$.
    (B) Przekształcenie liniowe $T : V \to V$ zadane w bazie $\mathcal{B}$ macierzą A ma w nowej bazie $\mathcal{B}'$ macierz $-A$.