Przedłużanie funkcji

1. Lemat Urysohna: Jeśli X jest normalna, zaś A, B są jej podzbiorami domkniętymi, to istnieje ciągła funkcja $f : X \to \mathbf{R}$, taka że $f[A] = \{0\}$, $f[B] = \{1\}$.
2. Twierdzenie Tietzego: Jeśli X jest normalna i $A \subseteq X$ jest domknięty, zaś $f : A \to \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieje funkcja ciągła $F : X \to \mathbf{R}$, taka że $F|_A = f$. [Jeśli ponadto f jest ograniczone, to i F można znaleźć ograniczoną – i to przez tą samą stałą.]
3. Definicja topologii w produkcie $\Pi_{t\in T} X_t$ przestrzeni topologicznych.
   Przykład: I^ω jest homeomorficzne z podzbiorem $\Pi_{i=n}^{\infty}[0, \frac{1}{n}]$ przestrzeni l_2.
   $f = (f_t) : Y \to \Pi_{t\in T} X_t$ jest ciągła $\iff$ każde f_t jest ciągłe.
   Wnioski: a) Twierdzenie Tietzego (bez "ponadto") dla $\mathbf{R}^n$ i dla I^ω w miejsce $\mathbf{R}$.
   b) Jeśli X jest normalna i $A \subseteq X$ jest domknięty, zaś $f : A \to S^n$ jest funkcją ciągłą, to istnieje otoczenie otwarte U zbioru A w przestrzeni X i funkcja ciągła $F : U \to \mathbf{R}$, taka że $F|_A = f$.
4. Przestrzeń regularna z bazą przeliczalną jest normalna.
   Przestrzeń regularna z bazą przeliczalną wkłada się w I^ω, i w konsekwencji jest metryzowalna.
   Wniosek: Przestrzenie metryzowalne z przeliczalną bazą to to samo, co podzbiory kostki Hilberta.

Zadania

1. Przestrzeń metryczna ma przeliczalną bazę wtedy i tylko wtedy, gdy jest ośrodkowa. [ośrodkowa=ma przeliczalny podzbiór gęsty]
2. Podaj przykład niehomeomorficznych przestrzeni X, Y takich że $X \times I$, $Y \times I$ są homeomorficzne.
3. Uzasadnij, że jeśli A jest gęstym podzbiorem przestrzeni metrycznej X, zaś $f : A \to \mathbf{R}$ funkcją ciagłą, to istnieje jedyna funkcja ciągła $F : X \to \mathbf{R}$ której obcięciem do A jest f.

Książki

[A] Aleksandrov, Wprowadzenie w teorię mnogości i ogólną topologię (po rosyjsku)
[D] Duda, Wprowadzenie do topologii.
[ES] Engelking, Sieklucki, Wstęp do topologii.
[J] Jänich, Topologia.
[K] Kuratowski, Wstęp do teorii mnogości i topologii.
[RF] Rochlin, Fuchs, Premier cours de topologie.