Zwartość II

1. X jest zwarta $\iff$ każda scentrowana rodzina domkniętych podzbiorów X ma niepusty przekrój.
   Jeśli X jest zwarta, a $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ jest ciągiem jej niepustych domkniętych podzbiorów, to $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.
2. Tw. Tichonowa: Produkt przestrzeni zwartych jest zwarty.
3. Uzwarcenie Čecha–Stone'a: konstrukcja i własność uniwersalna.
4. Zbiór Cantora: definicja i charakteryzacja (przestrzeń metryczna zwarta, w sobie gęsta i zerowymiarowa).
   Każda zwarta przestrzeń metryczna jest ciągłym obrazem zbioru Cantora
   Naszyjnik Antoine'a.

Zadania

1. Każda ograniczona funkcja $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ ma jedyne ciągłe przedłużenie $\bar{f} : \beta\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ Wybierzmy $x \in \beta\mathbf{N}\backslash\mathbf{N}$, i określmy $LIM_x(f) := \bar{f}(x)$. Wtedy $LIM_x(f+g) = LIM_x(f) + LIM_x(g)$, $LIM_x(af) = a \cdot LIM_x(f)$, $LIM_x(fg) = LIM_x(f) \cdot LIM_x(g)$. Ponadto, jeśli granica $\lim_{n\to\infty} f(n)$ istnieje, to jest równa $LIM_x(f)$.
   Jeśli jednak wybrać $y \in \beta\mathbf{N}\backslash\mathbf{N}$, $y \neq x$, to istnieje ograniczona funkcja $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, taka że $LIM_x(f) \neq LIM_y(f)$.
2. Jeśli niepusta zwarta przestrzeń Hausdorffa jest w sobie gęsta, ma co najmniej continuum punktów.
3. Zbiór Cantora jest jednorodny: dla każdych dwóch punktów x, y ze zbioru Cantora istnieje homeomorfizm h zbioru Cantora na siebie, taki że $h(x) = y$.
   Więcej, dla dowolnych skończonych ciągów różnych punktów: $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, istnieje homeomorfizm h zbioru Cantora na siebie, taki że $h(x_i) = y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
4. Czy każda zwarta przestrzeń metryczna jest ciągłym obrazem odcinka?