Zupełność

1. Tw. Cantora: Jeśli X jest zupełna, a $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ są jej podzbiorami domkniętymi których średnice dążą do zera, to $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.
2. Tw. Baire'a: Suma przeliczalnie wielu nigdziegęstych podzbiorów przestrzeni zupełnej jest zbiorem brzegowym.
   Równoważnie, przekrój przeliczalnej rodziny otwartych gęstych podzbiorów przestrzeni zupełnej jest gęsty.
3. Zasada kontrakcyjna Banacha: Kontrakcja niepustej przestrzeni zupełnej w siebie ma punkt stały.
   [$f : X \to X$ jest kontrakcją, jeśli istnieje stała $c \in (0,1)$ takie że dla dowolnych $x, y \in X$ mamy $d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y)$; $z \in X$ jest punktem stałym f jeśli $f(z) = z$.]
4. Konstrukcja uzupełnienia przestrzeni metrycznej.
5. Przeliczalny produkt przestrzeni zupełnych jest metryzowalny w sposób zupełny.
   Podzbiór otwarty przestrzeni zupełnej jest metryzowalny w sposób zupełny.

Zadania

1. Zbiór liczb niewymiernych nie jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych.
2. Zbiór $C_b(\mathbf{R})$ ciągłych funkcji ograniczonych (z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$) z metryką supremum: $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbf{R}\}$, jest przestrzenią zupełną.
3. Podzbiór typu G_δ przestrzeni zupełnej jest metryzowalny w sposób zupełny.
4. Jeśli (X, d) jest niepustą zwartą przestrzenią metryczną, a $f : X \to X$ spełnia następujący warunek: $(\forall x, y \in X)(d(f(x), f(y)) < d(x,y))$, to f ma punkt stały.
5. Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, przy czym X jest zupełna. Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłą funkcją, taką że $(\forall x, y \in X)(d(f(x), f(y)) > d(x,y))$. Pokaż, że $f(X)$ jest domkniętym podzbiorem Y.