Spójność

1. I jest przestrzenią spójną.
2. Ciągły obraz przestrzeni spójnej jest spójny.
3. Przestrzeń drogowo spójna jest spójna.
4. Jeśli $A \subseteq X$ jest zbiorem spójnym, i $A \subseteq B \subseteq cl(A)$, to i B jest spójny.
   Jeśli A_t, $t \in T$, są spójnymi podzbiorami X, oraz $\bigcap_{t \in T} A_t \neq \emptyset$, to $\bigcup_{t \in T} A_t$ jest spójny.
5. Def. X jest lokalnie spójna w punkcie x, jeśli dla każdego otoczenia U punktu x istnieje spójny $C \subseteq U$, taki że $x \in int(C)$.
   Przykłady.
6. Przestrzeń jest lokalnie spójna $\iff$ składowe zbiorów otwartych są otwarte.
7. Tw. Sierpińskiego: Zwarta przestrzeń metryczna X jest lokalnie spójna $\iff$ dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje skończone pokrycie X continuami o średnicach $< \epsilon$.
   Wniosek: Jeśli przestrzeń metryczna jest ciągłym obrazem odcinka, to jest lokalnie spójna.
8. Tw. Mazurkiewicza–Moore'a: Niech V będzie otwartym i spójnym podzbiorem lokalnie spójnej zupełnej przestrzeni metrycznej X. Wtedy dla dowolnych $x, y \in V$, $x \neq y$, istnieje włożenie $h : [0,1] \to V$, takie że $h(0) = x$, $h(1) = y$.
9. Tw. Hahna–Mazurkiewicza: Niepusta przestrzeń metryczna jest lokalnie sójnym continuum $\iff$ jest ciągłym obrazem odcinka.

Zadania

1. Zdefiniuj pojęcia lokalnej drogowej spójności i lokalnej łukowej spójności. Udowodnij ich równoważność dla przestrzeni metrycznych.
2. Quasi-składową punktu nazywamy przekrój wszystkich zbiorów otwarto-domkniętych do których ten punkt należy. Podaj przykład wskazujący, że quasi-składowa nie zawsze pokrywa się ze składową.
3. Pokaż, że $X = \{(\frac{t}{n}, t) : t \in [0,1], n = 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{(0, t) : t \in [0,1]\}$ z metryką obciętą z $\mathbf{R}^2$ jest przestrzenia zwartą i drogowo spójną, ale nie jest ciągłym obrazem odcinka.