Wstęp do topologii algebraicznej – Lista nr 1

1. Pokazać, że jeśli odwzorowania $f_1 : X \to Y$ i $f_2 : X \to Y$ są homotopijne oraz odwzorowania $g_1 : Y \to Z$ i $g_2 : Y \to Z$ są homotopijne, to $g_1 \circ f_1$ i $g_2 \circ f_2$ są homotopijne.

2. Niech $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$ oraz $f_k : S^1 \to S^1$ będzie zdefiniowane jako $f_k(z) = z^k$, dla k całkowitych. Pokazać, że każde odwzorowanie $g : S^1 \to S^1$ jest homotopijne z pewnym odwzorowaniem f_k.

3. Wykazać, że dowolne drzewo jest ściągalne.

4. Jeśli (X, x), (Y, y), (Z, z) są przestrzeniami topologicznymi z wyróżnionym punktem oraz $f : (X, x) \to (Z, z)$ i $g : (Y, y) \to (Z, z)$ ciągłymi odwzorowaniami (tzn. $f(x) = z$, $g(y) = z$), to możemy zdefiniować odwzorowanie $f \vee g : X \vee Y \to Z$ jako $f \vee g|_X = f$ i $f \vee g|_Y = g$. Niech więc dane będą odwzorowania $f, g : S^2 \to X$ oraz odwzorowanie $c : S^2 \to S^2 \vee S^2$ zdefiniowane jako ,,ściągnięcie równika do punktu". Pokazać, że $(f \vee g) \circ c$ oraz $(g \vee f) \circ c$ są homotopijne.

5. Uzasadnij, że $S^2 \vee S^1$ oraz przestrzeń powstała z S^2 przez utożsamienie dwóch antypodycznych punktów są homotopijnie równoważne.

6. Udowodnij, że jeśli przestrzenie topologiczne A i B są homotopijnie równoważne, to istnieje przestrzeń topologiczna X, która zawiera A i B jako retrakty deformacyjne.

7. Pokaż, że retrakt przestrzeni ściągalnej jest ściągalny.

8. Pokazać, że domek Binga jest ściągalny.

9. Udowodnić, że przestrzeń ilorazowa $D^n/\partial D^n$ jest homeomorficzna z S^n (D^n oznacza n-wymiarowy dysk).

10. Udowodnić, że stożek n-wymiarowej sfery jest homeomorficzny z n+1-wymiarowym dyskiem, zaś zawieszenie n-wymiarowej sfery jest homeomorficzne z $n + 1$-wymiarową sferą.

11. Przestrzeń S^∞ definiujemy jako granicę prostą ciągu $S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \ldots$, gdzie S^n jest równikiem sfery S^{n+1}. Pokazać, że S^∞ jest ściągalna.

12. Pokazać, że zwarty podzbiór CW-kompleksu jest zawarty w skończonym podkompleksie.

13. Wykazać, że każdy CW-kompleks jest normalną przestrzenią topologiczną.

14. Uzupełnić dowód twierdzenia o aproksymacji komórkowej.

15. Wykazać, że każdemu spójnemu CW-kompleksowi można nadać strukturę komórkową z dokładnie jedną 0-komórką.

16. Pokaż, że twierdzenie o rozszerzaniu homotopii przestaje być prawdziwe po opuszczeniu założenia, że (X, A) jest CW-parą.