Wstęp do topologii algebraicznej – Lista nr 2

1. Oblicz homologie symplicjalne torusa, butelki Kleina, płaszczyzny rzutowej i wstęgi Möbiusa.

2. Określ strukturę Δ-kompleksu na przestrzeniach: S^n, D^n, $\mathbb{R}P^n$ ($\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$, gdzie $\sim$ jest relacją antypodyzmu). Oblicz ich homologie symplicjalne dla małych n.

3. Dla powierzchni genusu g oblicz H_0^Δ, H_2^Δ i beztorsyjną część H_1^Δ (powierzchnia genusu g to sfera z doklejonymi g rączkami, np. dla $g = 1$ jest to torus).

   Wskazówka: Powierzchnię genusu g można przedstawić w postaci $4g$-kąta z utożsamionymi wszystkimi wierzchołkami i parami utożsamionymi krawędziami.

4. Udowodnij, że dla spójnego Δ-kompleksu X zachodzi $H_0^\Delta(X) = \mathbb{Z}$. Uogólnij ten wzór na Δ-kompleksy mające n składowych spójności.

5. Oblicz homologie symplicjalne dla grafu o v wierzchołkach, e krawędziach i c składowych spójności.

6. Oblicz homologie symplicjalne przestrzeni otrzymanej z Δ^n przez utożsamienie ścian tego samego wymiaru z zachowaniem porządku wierzchołków (tak, że uzyskany Δ-kompleks ma po jednym sympleksie każdego wymiaru nie przekraczającego n).

7. Oblicz homologie symplicjalne ze współczynnikami $\mathbb{Z}_2$ dla $\mathbb{R}P^2$ oraz butelki Kleina.

8. Jeśli A jest podkompleksem Δ-kompleksu X, to włożenie $A \hookrightarrow X$ indukuje homomorfizm $H_n^\Delta(A) \to H_n^\Delta(X)$ dla każdego n. Uzasadnij. Pokaż, że ów homomorfizm nie musi być różnowartościowy.

9. Jakie odwzorowanie grup homologii indukuje włożenie okręgu we wstęgę Möbiusa (jako brzeg)? A włożenie $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ dla małych n?

Kompleks symplicjalny to taki Δ-kompleks, w którym część wspólna dwóch sympleksów jest zbiorem pustym albo sympleksem.

Podpodział barycentryczny sympleksu $\Delta(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ to kompleks zbudowany ze wszystkich sympleksów postaci $\Delta(w_{i_0}, w_{i_1}, \ldots, w_{i_k})$, $0 \le i_0 < i_1 < \ldots < i_k \le n$, gdzie w_j jest środkiem ciężkości sympleksu $\Delta(v_0, \ldots, v_j)$.

10. Udowodnij, że drugi podpodział barycentryczny (tzn. podpodział barycentryczny podpodziału barycentrycznego) Δ-kompleksu jest kompleksem symplicjalnym.