Wstęp do topologii algebraicznej – Lista nr 3

1. Sprawdź, że dla ciągłego odwzorowania przestrzeni topologicznych $f : X \to Y$ odwzorowanie indukowane $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ (zdefiniowane na wykładzie) jest dobrze określone i jest homomorfizmem grup.

2. Pokaż, że jeśli X jest przestrzenią ściągalną, to $H_n(X) = 0$ dla $n > 0$ i $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

3. Przestrzeń topologiczną X nazywamy *jednospójną*, jeśli każda pętla w X jest ściągalna (tj. każde odwzorowanie $f : S^1 \to X$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym). Udowodnij, że dla takowej przestrzeni zachodzi $H_1(X) = 0$.

4. Uzasadnij, że $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus Z$.

5. Jeśli $s : [v, w] \to X$ jest 1-sympleksem singularnym, a $t : [v, w] \to [v, w]$ transpozycją (przekształceniem afinicznym zamieniającym wierzchołki), to $s{+}st$ jest brzegiem. Sformułuj i udowodnij podobny fakt dla 2-sympleksu $s : [v, w, z] \to X$ i afinicznego przekształcenia $t : [v, w, z] \to [v, w, z]$. A dla n-sympleksu?

6. Wykaż, że każde odwzorowanie $f : S^1 \to S^2$ przedłuża się do odwzorowania $f : D^2 \to S^2$.

7. Udowodnij, że jeśli odwzorowanie $f : S^n \to S^n$ nie ma punktów stałych, to jest homotopijne z antypodyzmem.

8. W każdym wierszu poniższego diagramu znajdują się ciągi dokładne grup abelowych (tzn. $\ker \alpha_{i+1} = \mathrm{im}\alpha_i$, $\ker \beta_{i+1} = \mathrm{im}\beta_i$, $i = 1, 2, 3$). Udowodnij, że jeżeli φ_1, φ_2, φ_4 i φ_5 są izomorfizmami, to φ_3 też jest izomorfizmem.

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$