Wstęp do topologii algebraicznej – Lista nr 4

1. Udowodnij, że jeśli przestrzenie X i Y mają tę własność, że każdy punkt ma ściągalne otoczenie, to:
$$\widetilde{H}_n(X \vee Y) = \widetilde{H}_n(X) \oplus \widetilde{H}_n(Y)$$

2. Udowodnij, że dla każdego n zachodzi $\widetilde{H}_n(\Sigma X) = \widetilde{H}_{n-1}(X)$. Wylicz stąd homologie S_n.

   ($\Sigma X = X \times I/\sim$, gdzie $(x,t) \sim (y,s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ i $t = s$ lub $t = s = 0$ lub $t = s = 1$.)

3. Udowodnij, że przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ dla $n \neq m$ nie są homeomorficzne.

4. Oblicz homologie powierzchni genusu g dla każdego g naturalnego. Oblicz homologie powierzchni z brzegiem mającej genus g i c składowych brzegu.

5. Niech $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ będzie rozkładem X na sumę zbiorów otwartych takich, że każdy zbiór postaci $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$, $1 \leq k \leq n$ jest albo pusty albo ma trywialne wszystkie zredukowane grupy homologii (np. jest ściągalny). Udowodnij, że $\widetilde{H}_i(X) = 0$ dla $i \geq n-1$. Pokaż, że dla $i < n-1$ równość ta nie musi być prawdziwa.

6. Niech $0 \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots \to C_1 \to C_0 \to 0$ będzie kompleksem łańcuchowym skończenie generowalnych grup abelowych. Udowodnij, że
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{rank} C_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{rank} H_i$$
   gdzie H_i są grupami homologii tego kompleksu, zaś *rank* skończenie generowalnej grupy abelowej to liczba składników $\mathbb{Z}$ w jej rozkładzie na sumę prostą grup cyklicznych.

7. Niech $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ będzie krótkim ciągiem dokładnym grup abelowych. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

   (a) Istnieje homomorfizm $p : B \to A$ taki, że $pi = id_A$.

   (b) Istnieje homomorfizm $s : C \to B$ taki, że $js = id_C$.

   (c) Istnieje taki izomorfizm $\varphi : B \to A \oplus C$, że poniższy diagram komutuje, gdzie $i' : a \mapsto (a,0)$ i $j' : (a,c) \mapsto c$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow \varphi & & \downarrow id & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & A \oplus C & \xrightarrow{j'} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

8. Przestrzenie topologiczne X i Y spełniają warunek $H_n(X) = H_n(Y)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Czy wynika stąd, że X i Y są homotopijnie równoważne?