**Wstęp do topologii algebraicznej – Lista nr 5**

1. Wyprowadź długi ciąg dokładny homologii triady ($B \subseteq A \subseteq X$):

$$\ldots \to H_{n+1}(X, A) \to H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B) \to \ldots$$

2. Sformułuj i uzasadnij homotopijną niezmienniczość homologii relatywnych par przestrzeni.
3. Podaj przykład rozkładu $X = A \cup B$ dla którego (a) ciąg Mayera–Vietorisa nie jest dokładny; (b) nie zachodzi wycinanie.
4. Napisz ciąg Mayera–Vietorisa dla par i udowodnij jego dokładność.
5. Uzasadnij, że jeśli $(X, A)$ jest parą Borsuka, to $A$ jest domknięty w $X$.
6. Czy to prawda, że jeśli $(X, A)$ jest parą Borsuka, to $(X \cup CA, CA)$ też jest parą Borsuka?
7. Napisz precyzyjny dowód ciągłości retrakcji dysku na jego brzeg użytej w dowodzie tw. Brouwera o punkcie stałym, jeśli masz na to ochote.
8. Pokaż, że każde dwa odbicia $S^n$ (tzn. obcięcia do $S^n$ odbić $R^{n+1}$) są homotopijne.

---

9. Skonstruuj odwzorowanie $S^n$ w $S^n$ dowolnie zadanego stopnia ($n > 0$).
10. Zaczesz $S^2$ z jednym punktem łysym. (wskazówka: podwójny wicherek)
11. Zbadaj czy dowolny homeomorfizm $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^k$ przedłuża sie do homeomorfizmu uzwarceń Aleksandrowa.
12. Niech $U$ będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, $x \in U$. Wylicz $H_*(U, U \setminus \{x\})$. Wywnioskuj, że jeśli otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest homeomorficzny z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^k$, to $n = k$.
13. Wylicz homologie różnych zwartych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ (lub, lepiej, $S^n$) i ich dopełnień. Sformułuj narzucające się hipotezy.
14. Dowolna macierz $A \in M_2(\mathbb{Z})$ zadaje odwzorowanie $\phi^A$ torusa $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ w siebie. Wykaż, że $\phi^A_*\colon H_1(T^2) \to H_1(T^2)$ jest zadane macierzą $A$ (w odpowiedniej bazie $H_1(T^2)$).
15. Mówimy, że przestrzeń $X$ ma własność punktu stałego, jeśli każde ciągłe przekształcenie $X \to X$ ma punkt stały. Zbadaj które z następujących przestrzeni mają własność punktu stałego: $S^2 \times S^2$, $\mathbb{R}P^{2n}$, $\mathbb{R}P^{2n+1}$,
16. Pokaż, że $S^n/S^k$ jest homotopijnie równoważne z $S^n \vee S^{k+1}$. ($k < n$)
17. Pokaż, że $S^n$ włożone w $\mathbb{R}^{n+1}$ jest brzegiem każdej ze składowych spójnych swego dopełnienia.
18. Niech dany będzie graf skończony. Budujemy przestrzeń $X$ w następujący sposób. Każdemu wierzchołkowi $v$ przypisujemy przestrzeń $X_v$; krawędzi o wierzchołkach $v, v'$ przypisu-

jemy $Y_w = X_v \cap X_{v'}$. Przestrzeń $X$ jest sumą wszystkich przestrzeni $X_v$. Wylicz homologie $X$ w następującym przypadku: graf to 1-szkielet $\Delta^3$, każde $X_v \cong S^3$, każde $Y_w \cong S^1$ jest okręgiem włożonym jako koło wielkie w odpowiednie dwie sfery (różne włożenia mają rozłączne obrazy). Czy wynik zależy od wyboru włożeń?

19. Oblicz homologie następujących przestrzeni:

(a) torus $S^1 \times S^1$ ze wstęgą Möbiusa przyklejoną przez homeomorfizm swego brzegu z $S^1 \times \{x\}$;

(b) $\mathbb{R}P^2$ ze wstęgą Möbiusa przyklejoną przez homeomorfizm swego brzegu z $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$.

20. Pokaż, że $H_i(X \times S^n) \simeq H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$.

21. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ jest jedyną nietrywialną grupą która może działać w sposób wolny na $S^{2n}$.

22. Drogi w kwadracie łączące przeciwległe wierzchołki muszą się przeciąć.