Wstęp do topologii algebraicznej – Lista nr 6

1. Pokaż, że odwzorowanie $S^1 \times S^1 \to S^2$ ściągające $S^1 \vee S^1$ do punktu jest homotopijnie nietrywialne.

2. Zespolony wielomian $P(z)$ stopnia $n \geq 1$ zadaje odwzorowanie ze sfery Riemanna (tzn. jednopunktowego uzwarcenia $\mathbb{C}$) w sferę Riemanna. Uzasadnij, że stopień tego odwzorowania jest dodatni, i wywnioskuj stąd zasadnicze twierdzenie algebry.

3. Niech $P(z)$ będzie zespolonym wielomianem stopnia $n \geq 1$. Sprawdź, że dla dostatecznie dużego R wielomian P zadaje odwzorowanie z $S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnij, że to odwzorowanie jest homotopijne z $z \mapsto z^n$. Opisz działanie odwzorowania $P_*\colon H_1(S_R) \to H_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Wywnioskuj zasadnicze twierdzenie algebry.

4. Oblicz homologie przestrzeni $\mathbb{R}P^n$ ze współczynnikami $\mathbb{Z}$ i ze współczynnikami $\mathbb{Z}_2$.

5. Niech $f : S^n \to S^n$ będzie odwzorowaniem o stopniu d. Jaki jest stopień odwzorowania $Sf : S^{n+1} \to S^{n+1}$ (zawieszenia odwzorowania f)?

6. Niech $N = (0, 0, \ldots, 1)$ będzie biegunem północnym sfery $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dla dowolnego jednostkowego wektora $v \in T_N S^n$ określamy $\gamma_v\colon \mathbb{R} \to S^n$ wzorem $\gamma_v(t) = \cos(t)N + \sin(t)v$ (jest to koło wielkie przechodzące przez N, mające kierunek v i sparametryzowane długością łuku). Następnie dla dowolnego k całkowitego definiujemy $\Phi_k\colon S^n \to S^n$ warunkiem: dla każdego jednostkowego $v \in T_N S^n$ i dowolnego t rzeczywistego $\Phi_k(\gamma_v(t)) = \gamma_v(kt)$. Uzasadnij, że Φ_k jest dobrze określone i ciągłe. Wyznacz stopień Φ_k.

7. W oznaczeniach poprzedniego zadania: jawnie skonstruuj homotopię odwzorowania Φ_2 z Φ_0 w przypadku $n = 2$

8. Wyznacz stopień następującego przekształcenia sfery jednostkowych kwaternionów w siebie: $S^3 \ni q \mapsto q^n \in S^3$.

9. Dane są liczby naturalne $l_1, \ldots, l_n$ oraz działanie grupy $\mathbb{Z}_m$ na $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ zadane przez następujące działanie generatora: $(z_1, \ldots, z_n) \to (e^{2\pi i l_1/m}, \ldots, e^{2\pi i l_n/m})$. Iloraz S^{2n-1}/Z_m nazywamy przestrzenią soczewkową. Wprowadź CW-strukturę na przestrzeni soczewkowej, oblicz jej homologie.

10. Dla powierzchni M i N definiujemy sumę spójną $M\#N$ następująco: wycinamy dysk w każdej z powierzchni i sklejamy je wzdłuż uzyskanych okręgów. Kiedy $\underbrace{\mathbb{R}P^2\#\ldots\#\mathbb{R}P^2}_{k}$ oraz $S_g\#\underbrace{\mathbb{R}P^2\#\ldots\#\mathbb{R}P^2}_{l}$ są homeomorficzne (S_g oznacza powierzchnię genusu g)?

11. Pokaż, że dla zwartych CW-kompleksów zachodzi $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$, gdzie χ oznacza charakterystykę Eulera. Ponadto jeśli $A, B \subset X$ spełniają założenia aksjomatu wycinania oraz $H_*(A)$ i $H_*(B)$ skończenie generowalne, to $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

12. Niech $f\colon X \to Y$ spełnia warunek $f(X^n) \subseteq Y^n$ (takie odwzorowanie nazywamy komórkowym). Wtedy f indukuje odwzorowania $f_{CW,\#}\colon \mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_n(Y^n, Y^{n-1}) = \mathcal{C}_n(Y)$. Uzasadnij, ze $f_{CW,\#}$ jest odwzorowaniem łancuchowym (tzn. komutuje z różniczką komórkową), a indukowane przez nie odwzorowanie $H_n^{CW}(X) \to H_n^{CW}(Y)$ pokrywa się z $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ przy wiadomym utożsamieniu homologii komórkowych z singularnymi.

13. Udowodnij, że każda porządna przestrzeń (np. lokalnie jednospójna) ma nakrycie uniwersalne. *Wskazówka*: Ustal $x_0 \in X$ i rozważ przestrzeń klas homotopii dróg w X o początku x_0. Jak wygląda nakrycie uniwersalne $S_1 \vee S_1$ (ósemki)?

14. Podaj przykład zanurzenia S^2 w S^3 takiego, że dopełnienie obrazu nie jest homeomorficzne z $S^0 \times D^3$ (sfera rogata Alexandra).