Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Kinga Ulatowska

Elementarne wprowadzenie do topologii metrycznej

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Ewy Damek

Wrocław 2021

Podziękowania

Pragnę złożyć serdeczne podziękowania mojej promotorce, Pani Profesor Ewie Damek, za poświęcony mi czas, cenne rady oraz wsparcie merytoryczne, na jakie zawsze mogłam liczyć podczas pisania swojej pracy.

Spis treści

1 Przedmowa

Niniejszy skrypt obejmuje podstawowe zagadnienia topologii metrycznej, wykładane na kursie Analizy i topologii na Uniwersytecie Wrocławskim. Praca została napisana na podstawie notatek własnych autorki, sporządzonych w trakcie tego kursu, oraz w oparciu o dodatkowe źródła, wymienione w bibliografii. Notatki pełniły głównie rolę inspiracji - wszystkie przykłady, jak również obszerne fragmenty dowodów, pochodzą od autorki.

Skrypt kierowany jest przede wszystkim do osób, które chcą uzupełnić wiedzę z tej dziedziny na poziomie podstawowym. Czytelnik zostanie zapoznany z pojęciem przestrzeni metrycznej, a dalej pozna rodzaje norm i metryk. W rozdziale czwartym Czytelnik dowie się, czym są kule i jak wyglądają one w przyjętych metrykach. Zebrane w pracy pojęcia topologiczne zostały dalej podzielone na podstawowe oraz zaawansowanete mniej intuicyjne. Na samym końcu przedstawiona została ciągłość oraz jej związek z opisanymi wcześniej pojęciami. Duża szczegółowość omawianych zagadnień jest od początku zamierzona i w celu ich lepszego zrozumienia, skrypt został wzbogacony o liczne przykłady i rysunki. W swojej pracy autorka zakłada, że czytelnik posiada na podstawowym poziomie wiedzę z zakresu Wstępu do matematyki oraz Analizy matematycznej 2.

Trudno jest znaleźć skrypt omawiający topologię w sposób tak elementarny, a studenci często tego potrzebują ze względu na dość abstrakcyjny, a przez to nieintuicyjny, jej charakter.

2 Wstęp

W wielu dziedzinach matematyki centralne miejsce zajmuje pojęcie przestrzeni. Przez przestrzeń rozumiemy zbiór z zadaną na nim w pewien sposób strukturą. Na przykład w algebrze liniowej zajmujemy się przestrzeniami liniowymi, gdzie zbiorem jest zbiór wektorów, a struktura zadana jest przez działanie dodawania i mnożenia przez skalary.

Topologia w pewnym sensie zajmuje się badaniem i opisywaniem "kształtu" przestrzeni, której struktura oparta jest na odległości pomiędzy jej punktami. Dokładniej, w topologii metrycznej struktura zadana jest przez funkcję zwaną *metryką*, która wprost określa odległość pomiędzy punktami. W topologii ogólnej natomiast, struktura zadana jest przez własność zbiorów zwaną *otwartością*. Bardzo ważnym aspektem w badaniach nad przestrzeniami jest porównywanie ich między sobą, do czego często wykorzystujemy odwzorowania zachowujące strukturę. Wracając do przykładu algebry liniowej, takimi przekształceniami są odwzorowania liniowe, które zachowują dodawanie wektorów i mnożenie ich przez skalary. W topologii strukturę zachowują przekształcenia ciągłe. Można myśleć, że przekształcenia ciągłe, to takie, które odwzorowują punkty leżące blisko siebie w takie, które wciąż są blisko. Można też myśleć od drugiej strony- że przekształcenia nieciągłe, to takie, które "rozrywają" przestrzeń, czyli pod wpływem których punkty, które leżą dowolnie blisko siebie, stają się dowolnie odległe. Jeśli takie przekształcenie (zachowujące strukturę) zadaje wzajemną odpowiedniość pomiędzy punktami dwóch przestrzeni (to znaczy jest bijekcją) i przekształcenie do niego odwrotne również zachowuje strukturę, to przestrzenie te uważa się za takie same w sensie danej dziedziny matematyki. W topologii takie przekształcenie nazywamy *homeomorfizmem*, a przestrzenie, pomiędzy którymi takie przekształcenie istnieje, nazywamy homeomorficznymi. W tym właśnie sensie powierzchnia kubka jest tym samym, co powierzchnia obwarzanka. Ściśle opisujemy je jako przestrzeń topologiczną zwaną torusem.

Topologia w pełnej ogólności jest bardzo obszerną i bogatą w skomplikowane obiekty dziedziną. Stanowi podstawę innych dziedzin matematyki. Aby wejść w ten świat, niezbędne jest dogłębne zrozumienie podstaw, do których zalicza się topologia metryczna, która kryje w sobie wiele trudności formalnych i koncepcyjnych. Z tego powodu zaleca się Czytelnikowi uzbroić w sporą dozę cierpliwości i wytrwałości.

3 Przestrzenie metryczne

Z jednego miejsca do drugiego można przemieścić się na wiele sposobów. To, jak szybko znajdziemy się w docelowym miejscu i jak długa będzie pokonana trasa, zależy od wielu czynników. Dwie różne osoby, które wykonały takie same przemieszczenie, mogą wyznaczać różne tory ruchu. W tym rozdziale przekonamy się, że także w matematyce odległość między dwoma punktami w przestrzeni może przyjmować różne wartości w zależności od tego, jak tę odległość zdefiniujemy. Funkcję odległości nazywać będziemy **metryką**.

Definicja 3.1.
Niech X będzie niepustym zbiorem z elementami x, y, z.
Metryką na X nazywamy funkcję:

$$d : X \times X \ni (x, y) \longmapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

spełniającą następujące warunki:

1. $\forall_{x,y\in X} : \ d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall_{x,y\in X} : \ d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall_{x,y,z\in X} : \ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Należy rozumieć je następująco:

1. Odległość punktu od samego siebie wynosi 0.
2. Odległość punktu x od punktu y jest taka sama jak odległość punktu y od punktu x.
3. Warunek trzeci to tak zwana *nierówność trójkąta*.

Uwaga. Zauważmy, że z powyższych warunków wynika własność:

$$\forall_{x,y\in X} \ d(x, y) \geqslant 0,$$

ponieważ

$$0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y),$$

czyli

$$0 \leqslant d(x, y).$$

W związku z powyższym d jest funkcją o przeciwdziedzinie w $[0, \infty)$ i możemy napisać:

$$d : X \times X \longmapsto [0, \infty).$$

Definicja 3.2.
Parę złożoną z niepustego zbioru X i określonej na nim metryki d nazywamy **przestrzenią metryczną** i oznaczamy (X, d).

3.1 Metryka euklidesowa

Przykład 3.3.
Niech $d(x, y) = |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Para $(\mathbb{R}, d)$ jest przestrzenią metryczną. Istotnie, d spełnia warunki definiujące metrykę:

1. $d(x, y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = |x - y| = |(-1) \cdot (y - x)| = |y - x| = d(y, x)$
3. $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| = |(x - y) + (y - z)|$.
   Skorzystamy z następującej nierówności: $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
   $|(x - y) + (y - z)| \leqslant |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$
   Mamy zatem: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Warto uzasadnić nierówność, z której skorzystaliśmy w podpunkcie 3.
Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Otrzymujemy zatem

$$(x + y)^2 \leqslant (|x| + |y|)^2,$$

a stąd

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

ponieważ obie strony nierówności są nieujemne.

Ogólnie, w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ metryka wyraża się wzorem

$$d_E(x, y) = ||x - y||_e,$$

gdzie

$$||x||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}. \tag{1}$$

Wielkość $||x||_e$ nazywana jest **normą euklidesową** wektora x i definiuje ona jego długość.

Definicja 3.4.
Niech X będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Funkcję

$$|| \cdot || : X \to [0, \infty)$$

nazywamy **normą**, jeśli dla wektorów $x, y \in X$ oraz skalara α spełnia ona następujące własności:

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Definicja 3.5.
Przestrzeń liniową X z określoną w niej normą $|| \cdot ||$ nazywamy **przestrzenią unormowaną** i oznaczamy $(X, || \cdot ||)$.

Fakt. *Każda przestrzeń unormowana $(X, || \cdot ||)$ jest przestrzenią metryczną z metryką zdefiniowaną w następujący sposób:*

$$d(x, y) := ||x - y||$$

dla $x, y \in X$.

Dowód analogiczny, jak w Przykładzie 3.3.

Przykład 3.6.
Przykładem przestrzeni unormowanej jest wspomniana już wcześniej **przestrzeń euklidesowa** z normą euklidesową (1).

Dowód.
Pokażemy, że norma euklidesowa $|| \cdot ||_e$ spełnia nierówność trójkąta, czyli zachodzi

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2}.$$

Mamy

$$||x + y||_e^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 =$$

$$= ||x||_e^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + ||y||_e^2 \leqslant ||x||_e^2 + 2|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| + ||y||_e^2.$$

Skorzystamy z następującej nierówności (Cauchy'ego- Schwartza):

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant ||x||_e \cdot ||y||_e,$$

którą udowodnimy później. Mamy zatem:

$$||x + y||_e^2 \leqslant ||x||_e^2 + 2|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| + ||y||_e^2 \leqslant ||x||_e^2 + 2||x||_e \cdot ||y||_e + ||y||_e^2 = (||x||_e + ||y||_e)^2.$$

Ponieważ $||x||_e, ||y||_e, ||x + y||_e \geqslant 0$, to $||x + y||_e \leqslant ||x||_e + ||y||_e$. □

Dowód nierówności Cauchy'ego- Schwartza.
Jeśli $||y||_e = 0$, to po obu stronach nierówności Cauchy'ego- Schwartza mamy zero. Możemy więc założyć, że $||y||_e \neq 0$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$$0 \leqslant ||x - \alpha y||_e^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i y_i + \alpha^2 y_i^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = ||x||_e^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \alpha^2 ||y||_e^2,$$

czyli

$$2\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \alpha^2 ||y||_e^2 \leqslant ||x||_e^2.$$

Niech

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{||y||_e^2},$$

wtedy mamy

$$2 \cdot \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2}{||y||_e^2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2}{||y||_e^4} \cdot ||y||_e^2 \leqslant ||x||_e^2.$$

Po przemnożeniu obu stron nierówności przez $||y||_e^2$, otrzymujemy

$$2 \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leqslant ||x||_e^2 ||y||_e^2,$$

czyli

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leqslant ||x||_e^2 ||y||_e^2,$$

co (po obustronnym spierwiastkowaniu) daje

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant ||x||_e ||y||_e.$$

□

Wiemy już, w jaki sposób norma generuje metrykę. Korzystając z tego, otrzymujemy:

$$d_E(x, y) = ||x - y||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

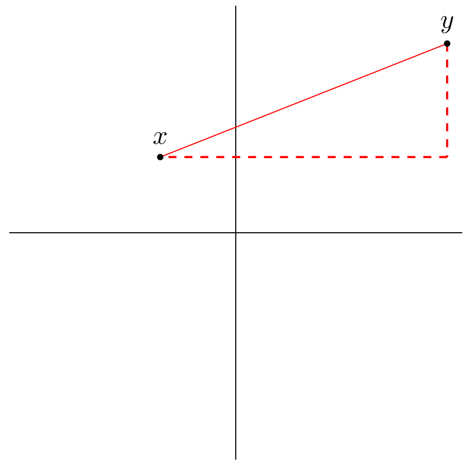
gdzie d_E jest tzw. **metryką euklidesową** na $\mathbb{R}^n$. W Przykładzie 3.3 omawialiśmy metrykę euklidesową na $\mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$d_E(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|,$$

czyli dla $n = 1$. W taki sposób wyraża się odległość między dwiema liczbami na prostej. Natomiast dla $n = 2$, czyli na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, otrzymujemy:

$$d_E(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Zauważmy, że odległość ta oznacza długość odcinka prostoliniowego między punktami $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$.



Rysunek 1: Odległość euklidesowa na płaszczyźnie.

3.2 Przykłady norm i metryk

W tym podrozdziale poznamy szereg innych norm i metryk. Celem będzie zrozumienie, w jaki sposób, zgodnie z daną metryką, wyznaczamy odległość dwóch punktów $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Przykład 3.7 (**Norma taksówkowa**)**.**
Niech $x = (x_1, x_2)$ będzie punktem w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Wtedy **normę taksówkową** $||x||_1$ określamy w następujący sposób:

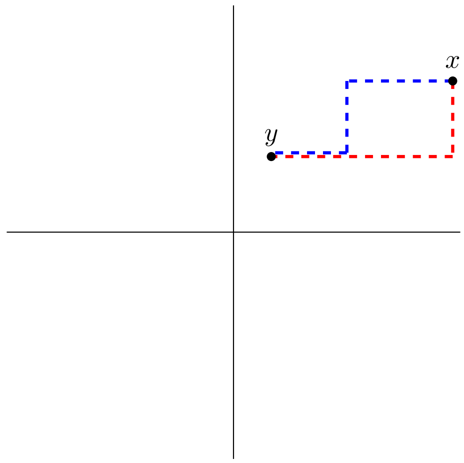
$$||x||_1 = |x_1| + |x_2|.$$

Poprzez $d_T(x, y)$ oznaczać będziemy **metrykę taksówkową**, którą zdefiniujemy zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją:

$$d_T(x, y) = ||x - y||_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Zauważmy, że aby przemieścić się z punktu x do punktu y w metryce taksówkowej, poruszać możemy się jedynie po odcinkach pionowych (odległość drugich współrzędnych)

oraz po odcinkach poziomych (odległość pierwszych współrzędnych). Sumujemy obie odległości, zatem nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonujemy zakręty.
Taki schemat można skojarzyć z poruszaniem się po kracie, jaką przypominają siatki dróg w niektórych miastach. Jadąc samochodem zaznaczymy na mapie podobny tor ruchu. W związku z powyższym, metrykę taksówkową często nazywa się *metryką miejską* czy też *metryką Manhattanu*.



Rysunek 2: Przykłady tras w metryce taksówkowej.

Przykład 3.8 (**Norma maksimum**).
Norma maksimum, czy inaczej *norma supremum*, wyraża się wzorem:

$$||x||_\infty = max(|x_1|, |x_2|),$$

i generuje **metrykę maksimum**, którą oznaczać będziemy poprzez $d_M(x, y)$:

$$d_M(x, y) = ||x - y||_\infty = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|).$$

Fakt. *Pokażemy, że metryki euklidesowa, taksówkowa oraz maksimum są równoważne w sensie poniższej definicji.*

Definicja 3.9.
Niech X będzie niepustym zbiorem oraz $x, y \in X$.
Mówimy, że metryki d_1, d_2 na X są **równoważne**, gdy istnieją stałe m, M takie, że $0 < m < M$ oraz

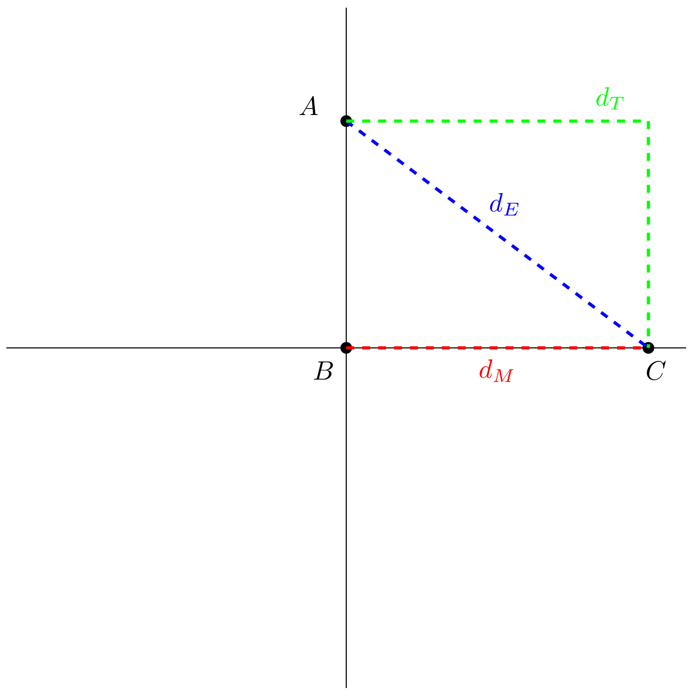
$$m \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant M \cdot d_1(x, y).$$

Przykład 3.10 (Porównanie metryk d_E, d_T, d_M).
W zrozumieniu specyfiki każdej z powyższych metryk oraz dostrzeżeniu różnic między nimi pomocne będzie wyodrębnienie na płaszczyźnie trzech punktów będących wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Weźmy $A = (0, 3),\ B = (0, 0),\ C = (4, 0)$.
Obliczymy odległość między punktami A i C w każdej z trzech podanych metryk.

1. **Metryka euklidesowa**
   $d_E(A, C) = d_E((0, 3), (4, 0)) = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2} = 5$
   Otrzymaliśmy długość przeciwprostokątnej, czyli normę euklidesową wektora $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

2. **Metryka taksówkowa**
   $d_T(A, C) = d_T((0, 3), (4, 0)) = |0-4| + |3-0| = 7$
   Okazuje się, że odległość między tymi samymi punktami w d_T jest większa niż w d_E.

3. **Metryka maksimum**
   $d_M(A, C) = d_M((0, 3), (4, 0)) = max(|0-4|, |3-0|) = max(4, 3) = 4$
   Odległość liczona w metryce maksimum jest w tym przypadku najkrótsza.



Rysunek 3: Symboliczne porównanie tras w metrykach d_M, d_E, d_T.

W oparciu o powyższy przykład możemy podejrzewać, że zachodzi następująca nierówność między danymi metrykami:

$$d_M(x, y) \leqslant d_E(x, y) \leqslant d_T(x, y). \tag{2}$$

Dowód nierówności.

1° Pokażemy najpierw, że $d_M(x, y) \leqslant d_E(x, y)$.
Przyjmijmy, że $|x_1 - y_1| \leqslant |x_2 - y_2|$. Wtedy $d_M(x, y) = |x_2 - y_2|$. Załóżmy nie

wprost, że $d_M(x,y) > d_E(x,y)$, czyli

$$|x_2 - y_2| > \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}.$$

Równoważnie otrzymujemy:

$$|x_2 - y_2|^2 > |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2,$$

czyli

$$0 > |x_1 - y_1|^2,$$

co daje sprzeczność. Stąd $d_M(x,y) \leqslant d_E(x,y)$.

2° Pokażemy teraz, że $d_E(x,y) \leqslant d_T(x,y)$.
Załóżmy nie wprost, że $d_E(x,y) > d_T(x,y)$. Wówczas:

$$\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} > |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

lub równoważnie:

$$|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 > |x_1 - y_1|^2 + 2 \cdot |x_1 - y_1| \cdot |x_2 - y_2| + |x_2 - y_2|^2.$$

Otrzymujemy:

$$0 > 2 \cdot |x_1 - y_1| \cdot |x_2 - y_2|,$$

co oznacza sprzeczność, zatem $d_E(x,y) \leqslant d_T(x,y)$.

Skoro $d_M(x,y) \leqslant d_E(x,y)$ oraz $d_E(x,y) \leqslant d_T(x,y)$, to $d_M(x,y) \leqslant d_E(x,y) \leqslant d_T(x,y)$, co chcieliśmy pokazać. □

Aby udowodnić, że powyższe metryki są równoważne (na mocy nierówności (2)), wystarczy pokazać istnienie stałej M takiej, że

$$d_T(x,y) \leqslant M \cdot d_M(x,y).$$

Dowód.
Załóżmy, że $|x_1 - y_1| \leqslant |x_2 - y_2|$, czyli $d_M(x,y) = |x_2 - y_2|$.
Wtedy

$$d_T(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leqslant 2 \cdot |x_2 - y_2| = 2 \cdot d_M(x,y).$$

□

Przykład 3.11 (Norma ℓ_p^2).
Wcześniej przedstawione normy są szczególnymi przypadkami **normy** ℓ_p^2, którą dla $1 \leqslant p < \infty$ definiujemy przez

$$||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}.$$

Powyższa norma generuje w $\mathbb{R}^2$ metrykę postaci:

$$||x-y||_p = (|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p)^{1/p}.$$

W szczególności

$$d_T(x,y) = ||x-y||_1 \text{ oraz } d_M(x,y) = ||x-y||_\infty,$$

a ponadto

$$||x-y||_2 = d_E(x,y).$$

W tym momencie zrozumiały powinnen stać się dobór indeksów dolnych występujących przy oznaczeniach poszczególnych norm. Zauważmy, że we wzorze na metrykę taksówkową przyjmujemy $p=1$, natomiast dopuszczając $p=\infty$ definiuje się metrykę maksimum.

Uwaga 3.12.
Każdą z powyższych metryk można określić w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla wektorów $x=(x_1,...,x_n)$ oraz $y=(y_1,...,y_n)$. Wówczas otrzymujemy:

$$d_E(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2}$$

$$d_T(x,y) = |x_1-y_1| + ... + |x_n-y_n|$$

$$d_M(x,y) = max(|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|)$$

Przykład 3.13 (Metryka rzeka).
Metryka rzeka jest przykładem metryki, która nie została wygenerowana przez żadną normę. Oznaczać ją będziemy jako d_R.
Aby przejść w d_R drogę z jednego punktu do drugiego, konieczne będzie odnalezienie „rzeki”. Jest to jedyna prosta, która umożliwia poruszanie się w kierunku poziomym. Co więcej, dotrzeć do rzeki można tylko ścieżkami, które są do niej prostopadłe.
Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest gęstą dżunglą (nie możemy wydeptać dowolnej ścieżki), a oś OX jest rzeką. Aby formalnie zdefiniować metodę mierzenia odległości między punktami w d_R, należy rozpatrzeć dwa przypadki.

1. Niech $x=(x_1,x_2)$ oraz $y=(y_1,y_2)$ będą takie, że $x_1 \neq y_1$. Zgodnie z przyjętą konwencją, długość drogi między tymi punktami wynosi:

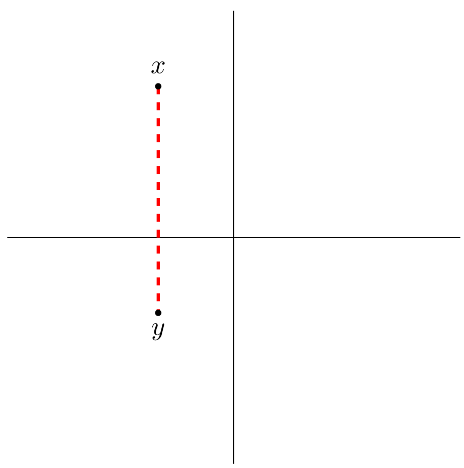
   $$d_R(x,y) = |x_2| + |x_1-y_1| + |y_2|.$$

   Uwzględniamy prostopadłą drogę od x do rzeki, drogę przepłyniętą po rzece oraz drogę od y do rzeki. Zauważmy, że fragment przepłyniętej rzeki jest odcinkiem, którego długość mierzymy zgodnie z metryką euklidesową na prostej.

Rysunek 4: Przykłady tras z punktu x do punktu y w d_R, gdy $x_1 \neq y_1$.

2. W przypadku gdy $x_1 = y_1$, oba punkty znajdują się na tej samej ścieżce prostopadłej do rzeki (niezależnie od tego, czy są po jej przeciwnych stronach). Wtedy odległość między nimi jest taka sama, jak odległość euklidesowa na prostej:

$$d_R(x, y) = |x_2 - y_2|.$$



Rysunek 5: Trasa od x do y w d_R, gdy $x_1 = y_1$.

W związku z powyższym otrzymujemy:

$$d_R(x, y) = \begin{cases} |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{gdy } x_1 \neq y_1 \\ |x_2 - y_2| & \text{gdy } x_1 = y_1 \end{cases}.$$

Metryka rzeka zdefiniowana w taki sposób jest zwrotna i symetryczna. Aby udowodnić, że d_R spełnia warunek trójkąta, należy rozpatrzeć trzy przypadki, w zależności od rozmieszczenia punktów względem siebie.

Dowód.
Weźmy trzy punkty $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Przypadek I**
  Wszystkie trzy punkty znajdują się na tej samej ścieżce prostopadłej do rzeki czyli $x_1 = y_1 = z_1$.

  $$d_R(x, z) = |x_2 - z_2| = |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \leqslant |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| = d_R(x, y) + d_R(y, z)$$

- **Przypadek II**
  Tylko dwa punkty (tutaj x, y) leżą na tej samej ścieżce, czyli $x_1 = y_1 \neq z_1$.

  $$d_R(x, z) = |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2|$$

  $$d_R(x, y) + d_R(y, z) = |x_2 - y_2| + |y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2|$$

  Chcemy pokazać:
  $$d_R(x, z) \leqslant d_R(x, y) + d_R(y, z)$$
  to znaczy
  $$|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| \leqslant |x_2 - y_2| + |y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2|,$$
  czyli
  $$|x_2| + |x_1 - z_1| \leqslant |x_2 - y_2| + |y_2| + |y_1 - z_1|.$$
  Mamy $|x_2| \leq |x_2 - y_2| + |y_2|$ oraz $|x_1 - z_1| = |y_1 - z_1|$, bo $x_1 = y_1$, co kończy dowód.

  Dowód w przypadku $x_1 \neq y_1 = z_1$ jest analogiczny do powyższego.

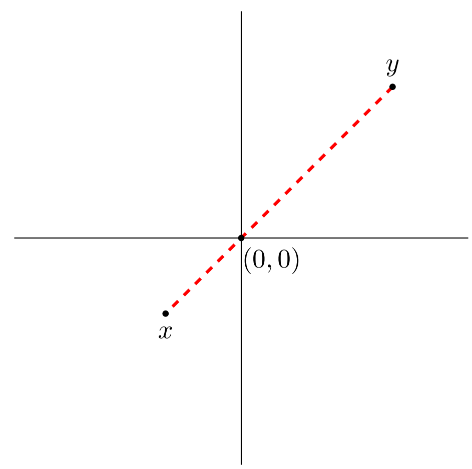
- **Przypadek III**
  Każdy w trzech punktów znajduje się na innej ścieżce, czyli $x_1 \neq y_1 \neq z_1$.
  Mamy
  $$d_R(x, z) = |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2|$$
  oraz
  $$d_R(x, y) + d_R(y, z) = |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2|.$$
  Zauważmy, że:
  $$\begin{aligned} d_R(x, z) =& |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| = |x_2| + |x_1 + (-y_1 + y_1) - z_1| + |z_2| \\ &\leqslant |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |z_2| \leq d_R(x, y) + d_R(y, z). \end{aligned}$$

$\square$

Przykład 3.14 (**Metryka centrum**).
Metryka centrum zwana jest inaczej metryką węzła kolejowego. Oznaczać ją będziemy poprzez d_C.
Tym razem wyobraźmy sobie węzeł kolejowy umieszczony w środku układu współrzędnych $(0,0)$. Z całej płaszczyzny prowadzą do niego półproste, czyli „tory”. Z jednego punktu do drugiego możemy poruszać się tylko po nich. Zanim formalnie zdefiniujemy tę metrykę, rozpatrzmy dwa przypadki:

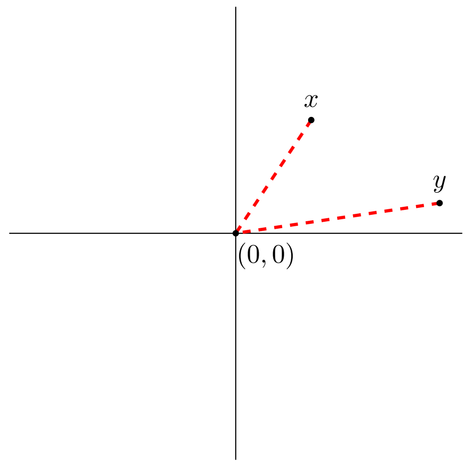
1. Jeśli $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$ są współliniowe z punktem $(0,0)$, to znajdują się na takim samym torze. Odległość między nimi jest wówczas odległością euklidesową na płaszczyźnie:

$$d_C(x,y) = d_E(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$



Rysunek 6: Trasa od x do y w d_C, gdy punkty x, y są współliniowe z $(0,0)$.

2. W przeciwnym przypadku (gdy x, y nie są współliniowe z zerem) po wystartowaniu z punktu x i zatrzymaniu się w środku układu współrzędnych musimy przejść na inną półprostą (prowadzącą od $(0,0)$ do punktu y).



Rysunek 7: Trasa od x do y w d_C, gdy x, y nie są współliniowe z $(0,0)$.

Wówczas zachodzi:

$$d_C(x,y) = d_E(x,0) + d_E(y,0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = ||x||_e + ||y||_e.$$

W związku z powyższym otrzymujemy:

$$d_C(x,y) = \begin{cases} d_E(x,y) & \text{gdy } x, y, (0,0) \text{ są współliniowe} \\ d_E(x,0) + d_E(y,0) & \text{gdy } x, y, (0,0) \text{ nie są współliniowe} \end{cases}.$$

Przykład 3.15 (Metryka dyskretna).
Metryka dyskretna oznaczana będzie poprzez d_D.
Na dowolnym, niepustym zbiorze X metrykę dyskretną definiuje się w sposób następujący:

$$d_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \neq y \\ 0 & \text{gdy } x = y \end{cases}.$$

4 Kule w przestrzeniach metrycznych

Definicja 4.1.
Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną.
Kulą otwartą w (X,d) o środku $s \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór:

$$K(s,r) = \{x \in X : d(x,s) < r\}.$$

Natomiast **kulą domkniętą** o takim samym środku i promieniu jest zbiór:

$$\overline{K}(s,r) = \{x \in X : d(x,s) \leqslant r\}.$$

4.1 Własności kul

Dla kul w dowolnych metrykach zachodzą następujące własności:

1. $K(s,r) \subseteq \overline{K}(s,r)$.

2. $K(s,r) \neq \emptyset$, ponieważ $d(s,s) = 0 < r$, zatem $s \in K(s,r)$.

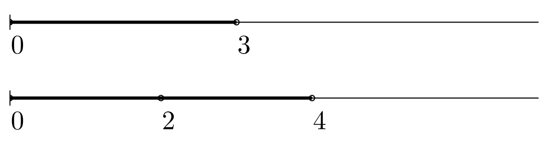
3. Jeśli $y \in K(x,r),$ to istnieje $r' > 0$ takie, że $K(y,r') \subset K(x,r)$.

   Dowód własności 3.
   Niech $r' = r - d(x,y)$ oraz $z \in K(y,r')$. Jeśli $z \in K(y,r')$, to $d(z,y) < r'$. Wtedy
   $$d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x) < r' + d(y,x) = r - d(y,x) + d(y,x) = r.$$
   Stąd $z \in K(x,r)$. □

4. $r < R \implies K(a,r) \subseteq K(a,R)$, $\overline{K}(a,r) \subseteq \overline{K}(a,R)$.

Uwaga. Kula o mniejszym promieniu nie musi zawierać się w kuli o większym promieniu, jeśli ich środki są różne.

Przykład 4.2.
Niech X będzie półprostą $[0,\infty)$ z metryką euklidesową. Wyznaczmy na X kulę domkniętą $\overline{K_1}$ o środku w zerze i promieniu długości 3:
$$\overline{K_1}(0,3) = \{x \in X : d_E(x,0) \leqslant 3\}.$$
Otrzymujemy zbiór
$$\overline{K_1}(0,3) = \{x \in X : |x| \leqslant 3\}.$$
Niech $\overline{K_2}$ będzie kulą domkniętą o środku w punkcie 2 i promieniu długości 2. Wówczas
$$\overline{K_2}(2,2) = \{x \in X : |x-2| \leqslant 2\}.$$
Otrzymujemy następujące zbiory na $[0,\infty)$:



Rysunek 8: $\overline{K_1}(0,3)$ i $\overline{K_2}(2,2)$

Zauważmy, że kula o mniejszym promieniu (K_2) nie zawiera się w kuli o większym promieniu (K_1).

Uwaga.

a) Dwie kule o różnych środkach i promieniach mogą być równe.

b) Kula otwarta może być równa kuli domkniętej o tym samym środku i promieniu.

c) Kula otwarta może być równa kuli domkniętej o innym środku i promieniu.

Na przykład dla przestrzeni $X = [0, 5]$ z metryką euklidesową:

a) $K_E(3, 3) = K_E(1, 6)$.

b) $K_E(2, 7) = \overline{K_E}(2, 7)$.

c) $K_E(1, 5) = \overline{K_E}(3, 4)$.

Aby zaakcentować, w jakiej metryce są dane kule, najczęściej używać do tego będziemy indeksu dolnego w postaci pierwszej litery nazwy danej metryki– K_E oznacza otwartą kulę euklidesową. W tej pracy pojawią się również inne sposoby oznaczania kul w zależności od kontekstu, na przykład:

- $K_\varepsilon(s)$ oznacza kulę o promieniu ε i środku w s.
- $K_X(s, r)$ oznacza kulę o środku s i promieniu r w przestrzeni X ze znaną nam metryką.

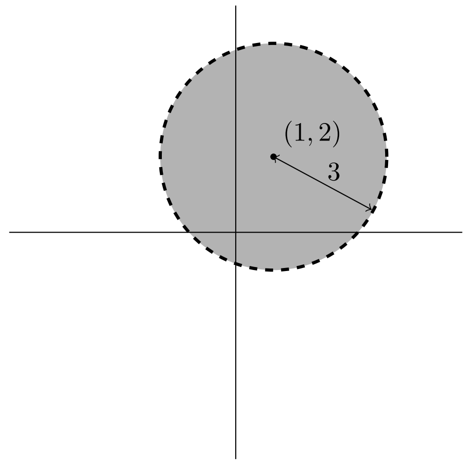
4.2 Przykłady kul w różnych metrykach

Wyobraźmy sobie, że przykładamy pióro w punkcie będącym środkiem danej kuli. Uwolniony z niego atrament pokonuje drogę długości promienia i wysycha. W metryce euklidesowej z każdego punktu może poruszać się w dowolnym kierunku, lecz w metryce rzeka sposób rozpływania się atramentu zależy od punktu startowego. Jeśli atrament startuje z punktu o niezerowej drugiej współrzędnej, to porusza się po pionowej linii. Natomiast gdy stróżka dotknie rzeki, rozpływa się na wiele ścieżek tworząc kształt diamentu. Ta intuicja pomoże nam wyobrażać sobie kule w różnych metrykach.

Kule w metryce euklidesowej

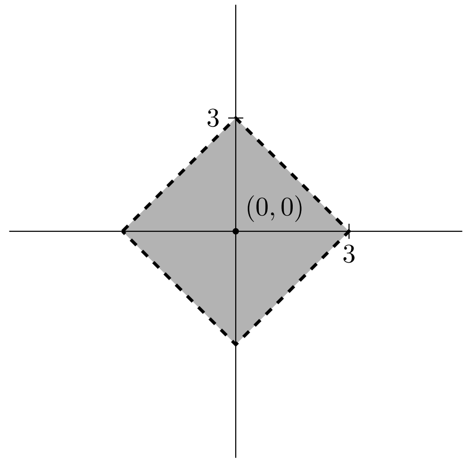
1. Postać kuli na prostej $\mathbb{R}$.
   W $(\mathbb{R}, d_E)$ kula otwarta o środku s i promieniu r to odcinek otwarty postaci $(s - r, s + r)$.
   Analogicznie, kula domknięta o takim samym środku i promieniu jest odcinkiem domkniętym: $[s - r, s + r]$.

2. Postać kuli na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.
   W $(\mathbb{R}^2, d_E)$ kula otwarta o środku s i promieniu r jest kołem, czyli zbiorem punktów postaci:
$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2} < r\}.$$



Rysunek 9: $K_E((1, 2), 3)$

Kule w metryce taksówkowej
Kulą otwartą o środku $s = (s_1, s_2)$ i promieniu r w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_T)$ jest zbiór:
$$K_T(s, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - s_1| + |x_2 - s_2| < r\}.$$
Naszym celem będzie określenie, jakiej postaci są kule w d_T.
Dla ułatwienia przyjmijmy, że $s = (0, 0)$. Zgodnie z definicją metryki taksówkowej otrzymujemy:
$$K_T((0, 0), r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r\}.$$
Zauważmy, że jeśli do kuli w d_T należy punkt (x_1, x_2), to należą do niej także punkty:
$$(-x_1, x_2),\ (x_1, -x_2),\ (-x_1, -x_2).$$
W przypadku, gdy obie współrzędne są dodatnie, otrzymujemy: $x_2 < r - x_1$. Postępowanie dla pozostałych ćwiartek układu jest analogiczne. Kształt kuli w $(\mathbb{R}^2, d_T)$ to kwadrat, którego przekątne są równoległe do osi układu współrzędnych.



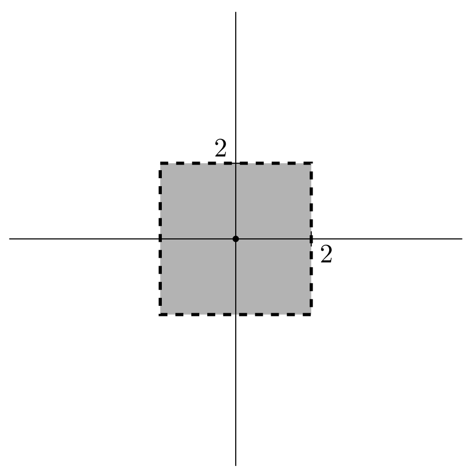
Rysunek 10: $K_T((0,0),3)$

Kule w metryce maksimum

Kulą otwartą o środku $s=(s_1,s_2)$ i promieniu r w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2,d_M)$ jest zbiór:

$$K_M(s,r)=\{x\in\mathbb{R}^2: max\{|x_1-s_1|,|x_2-s_2|\}<r\}.$$

Kule w d_M są w kształcie kwadratu, którego boki są równoległe do osi układu.



Rysunek 11: $K_M((0,0),2)$

Kule w metryce rzeka

Kulą otwartą o środku $s=(s_1,s_2)$ i promieniu r w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2,d_R)$ jest suma zbiorów:

$$\begin{aligned}\{x\in\mathbb{R}^2:|x_2|+|x_1-s_1|+|s_2|<r\}\ \ &\text{gdy } x_1\neq s_1\\ \{x\in\mathbb{R}^2:|x_2-s_2|<r\}\ \ &\text{gdy } x_1=s_1.\end{aligned}$$

Możemy rozpatrzyć następujące przypadki:

1. Środek kuli jest na rzece ($s = (s_1, 0)$).

$$K_R((s_1,0),r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| + |x_1 - s_1| < r\}.$$

   Wówczas kule są w kształcie diamentów (podobnie jak w d_T).

2. Środek kuli jest poza rzeką ($|s_2| \neq 0$).

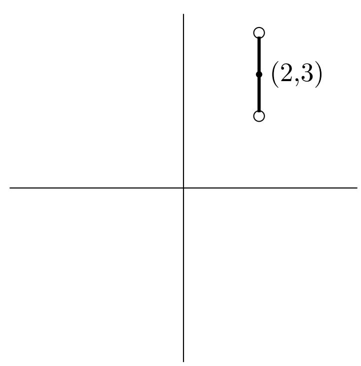
   a) Kula nie dosięgnie rzeki ($|s_2| > r$).
   Wówczas możemy poruszać się tylko po odcinku o środku w s i długości $2r$ leżącym na ścieżce (czyli prostej prostopadłej do rzeki).

$$K_R(s,r) = \{(x_1,x_2) : x_1 = s_1 \ \wedge \ |x_2 - s_2| < r\},$$

   czyli

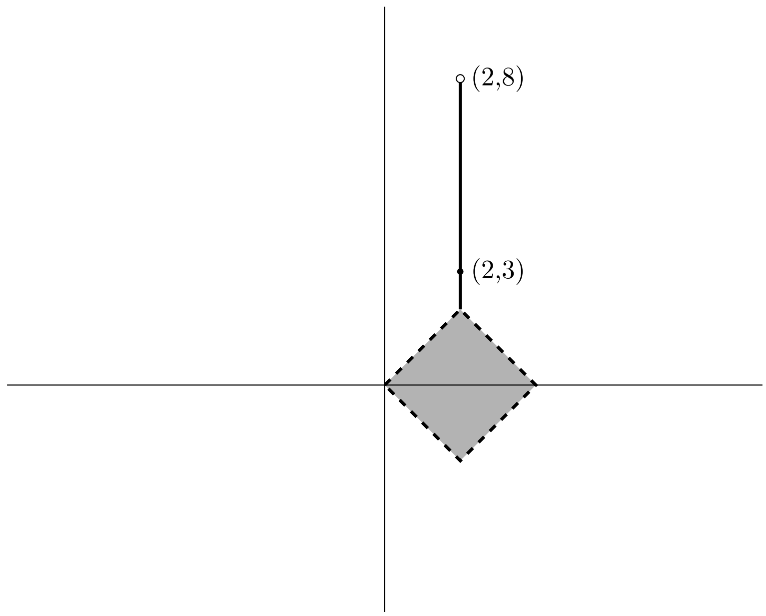
$$K_R(s,r) = \{(x_1,x_2) : x_1 = s_1 \ \wedge \ x_2 \in (s_2 - r, s_2 + r)\}.$$

   Na przykład dla $s = (2,3)$ oraz $r = 1$ otrzymujemy $K_R((2,3),1)$ w postaci odcinka $\{2\} \times (2,4)$.



Rysunek 12: $K_R((2,3),1)$

   b) Kula dosięgnie rzeki ($|s_2| < r$).
   Ta sytuacja częściowo łączy poprzednie przypadki. Wówczas kula przypomni kształtem latawiec.



Rysunek 13: $K_R((2,3),5)$

Kule w metryce centrum

Kulą otwartą o środku $s = (s_1, s_2)$ i promieniu r w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_C)$ jest suma zbiorów:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2} < r\} \text{ gdy } x, s, (0,0) \text{ są współliniowe}$$
$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} + \sqrt{(s_1)^2 + (s_2)^2} < r\} \text{ w przeciwnym przypadku.}$$

Możliwe są następujące przypadki:

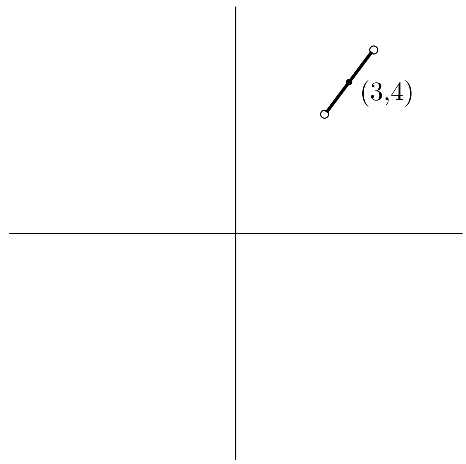
1. Środek kuli jest w centrum ($s = (0,0)$). Wtedy

$$K_C((0,0), r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} < r\}.$$

   Zauważmy, że kula otwarta w d_C, której środkiem jest $(0,0)$, to otwarte koło euklidesowe w $\mathbb{R}^2$.

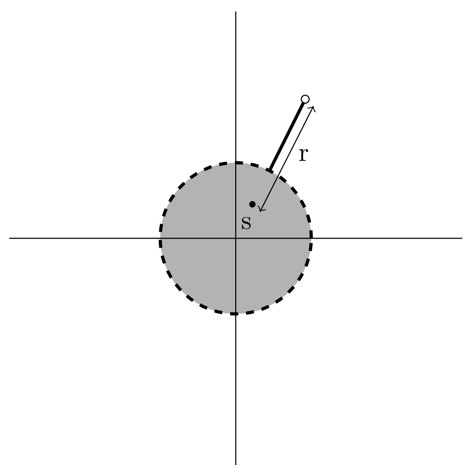
2. Środek kuli jest poza centrum ($s \neq (0,0)$).

   a) Kula nie dosięgnie centrum ($d_E((s_1, s_2), (0,0)) < r$).
   Wówczas kula ta jest odcinkiem otwartym o środku w s i długości $2r$ leżącym na prostej przechodzącej przez s i centrum (środek układu współrzędnych).



Rysunek 14: $K_C((3,4),1)$

b) Kula dosięgnie centrum ($d_E((s_1,s_2),(0,0)) > r$).
Taka sytuacja częściowo łączy poprzednie przypadki. Wówczas kula przypomni kształtem lizak.



Rysunek 15: $K_C((s_1,s_2),r)$

Kule w metryce dyskretnej

W d_D, zależnie od długości promienia, kula jest albo jednym punktem (swoim środkiem), albo całą przestrzenią.

$$K_D(s,r) = \begin{cases} \{s\} & \text{gdy } r \leqslant 1 \\ X & \text{gdy } r > 1. \end{cases}$$

5 Podstawowe pojęcia topologiczne

5.1 Otwartość i domkniętość

Definicja 5.1.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

Zbiór $U \subseteq X$ jest **otwarty**, jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $r > 0$ takie, że $K(x, r) \subseteq U$. Oznacza to, że każdy punkt x ze zbioru U możemy otoczyć kulą o promieniu r tak, aby $K(x, r)$ mieściła się w U.

Zbiór $F \subseteq X$ nazywamy **domkniętym**, jeśli jego dopełnienie $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym.

Przykład 5.2.

1. Cała przestrzeń X oraz zbiór pusty $\emptyset$ w dowolnej przestrzeni metrycznej są zarówno otwarte (wprost z definicji), jak i domknięte (jako dopełnienia zbiorów otwartych).

2. W dowolnej przestrzeni metrycznej $K(x, r)$ jest zbiorem otwartym, więc $X \setminus K(x, r)$ jest zbiorem domkniętym.

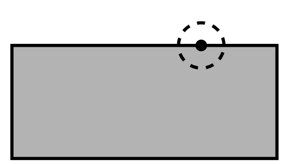
3. W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_E)$ zbiór postaci

   $$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2\} \text{ jest otwarty,}$$

   natomiast

   $$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\} \text{ nie jest zbiorem otwartym.}$$

   Wokół punktów na krawędziach prostokąta $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ nie da się postawić kuli o tak małym promieniu, by zawierała się w zbiorze B.



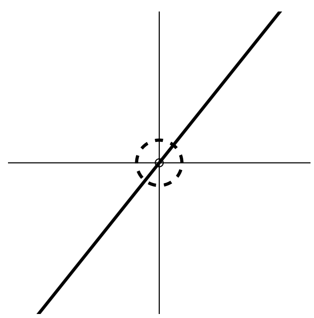
Uwaga. Brak otwartości nie implikuje domkniętości.

Zbiór B jest domknięty, ponieważ $\mathbb{R}^2 \setminus B$ jest otwarty.

4. Zbiór
$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leqslant x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 \leqslant b_2\}$$
w $(\mathbb{R}^2, d_E)$ nie jest ani otwarty, ani domknięty.

Rysunek 16: Zbiór C

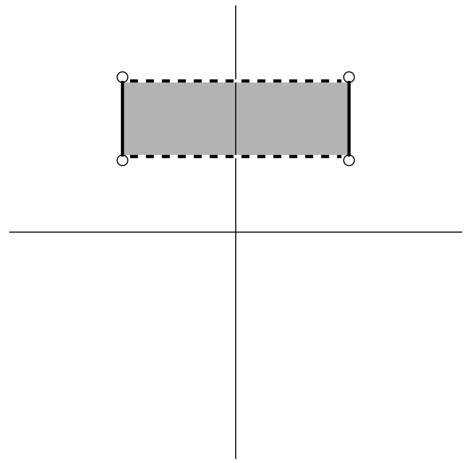
5. W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_C)$ zbiór
$$E = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$$
nie jest otwarty, ponieważ w punkcie $(0, 0)$ kula euklidesowa, która jest jednocześnie kulą w d_C, nie zawiera się w prostej.



Rysunek 17: Zbiór E wraz z kulą o środku (0,0)

Zatem zbiór
$$D = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2 \neq 0\}.$$
jest otwarty.

6. Rozpatrzmy zbiór postaci $F = [-3, 3] \times (2, 4)$.



Rysunek 18: Zbiór F

W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_R)$ zbiór F jest otwarty, ponieważ $\{x\} \times (2, 4)$ jest kulą otwartą i

$$F = \bigcup_{x \in [-3,3]} \{x\} \times (2, 4),$$

czyli jest sumą kul otwartych w d_R (patrz Twierdzenie 5.4 poniżej).

W przestrzeniach $(\mathbb{R}^2, d_E)$ oraz $(\mathbb{R}^2, d_C)$ zbiór F nie jest otwarty (kule o środkach w punktach $(3, a)$, gdzie $2 < a < 4$, nie zawierają się w F).

Definicja 5.3.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.
Rodzinę wszystkich zbiorów otwartych $A \subseteq X$ nazywamy **topologią** na (X, d) i oznaczamy poprzez $\mathcal{T}_d$.

Twierdzenie 5.4.
Suma dowolnej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dowód.
Rozważmy rodzinę zbiorów otwartych U_i, $i \in I$. Oznaczmy

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Niech $x \in U$. Wtedy $x \in U_i$ dla pewnego i.
Ponieważ U_i jest otwarty, to istnieje kula $K(x, r)$ taka, że $K(x, r) \subseteq U_i \subseteq U$. Zatem U także jest otwarty. $\square$

Twierdzenie 5.5.
Przekrój skończenie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dowód.
Rozważmy skończoną rodzinę zbiorów otwartych $U_n, n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy

$$U = \bigcap_{n}^{N} U_n.$$

Weźmy $x \in U$. Wtedy $x \in U_n$ dla każdego $n \leqslant N$. Ponieważ U_n jest otwarty, to dla każdego $n \leqslant N$ istnieje kula $K(x, r_n)$ taka, że $K(x, r_n) \subseteq U_n$.
Niech $r = min(r_1, ..., r_N)$. Wtedy $K(x, r) \subseteq K(x, r_n) \subseteq U_n$. Wówczas $K(x, r) \subseteq U$, czyli zbiór U jest otwarty. □

Uwaga. Przekrój przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych nie musi być zbiorem otwartym.

Przykład.
Zbiór $(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$ jest otwarty w d_E. Mamy

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) = \{0\}.$$

Zbiór $\{0\}$ nie jest otwarty, bo dla każdego $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon(0) = (-\varepsilon; \varepsilon)$ nie zawiera się w $\{0\}$.

Twierdzenie 5.6.
Przekrój dowolnej ilości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Twierdzenie 5.7.
Suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Na mocy praw de Morgana, Twierdzenia 5.6 i 5.7 wynikają natychmiast z Twierdzeń 5.4 i 5.5.

Uwaga. Suma nieskończonej rodziny zbiorów domkniętych nie musi być domknięta.

Przykład.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} [\frac{1}{n}; n] = (0, \infty)$$

Twierdzenie 5.8.
Metryki d_1 oraz d_2 generują te same topologie wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_x \, \forall_{r>0} \, \exists_{\delta>0} : \; K_{d_1}(x, r) \supseteq K_{d_2}(x, \delta), \tag{3}$$

$$\forall_x \, \forall_{r>0} \, \exists_{\delta>0} : \; K_{d_2}(x, r) \supseteq K_{d_1}(x, \delta). \tag{4}$$

Dowód.
("$\Longrightarrow$")
Z równości topologii d_1 oraz d_2 wiemy, że kula $K_{d_1}(x,r)$ jest otwarta także w d_2.
W związku z tym istnieje δ takie, że $K_{d_1}(x,r) \supseteq K_{d_2}(x,\delta)$.
Analogicznie dla kuli $K_{d_2}(x,r)$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $K_{d_2}(x,r) \supseteq K_{d_1}(x,\delta)$.

("$\Longleftarrow$")
Pokażemy teraz, że z zawierania kul wynika równość topologii.
Załóżmy, że U jest zbiorem otwartym w d_1 oraz $x \in U$. Wtedy istnieje $r > 0$ takie, że $U \supseteq K_{d_1}(x,r)$. Z zawierania kul wiemy, że istnieje $\delta > 0$ takie, że $K_{d_1}(x,r) \supseteq K_{d_2}(x,\delta)$.
Stąd $U \supseteq K_{d_2}(x,\delta)$, zatem (z definicji) U jest otwarty także w d_2.
Analogiczne rozumowanie pokazuje, że każdy zbiór otwarty w d_2 jest otwarty także w d_1.
□

Zauważmy, że jeśli metryki d_1 i d_2 są równoważne w sensie Definicji 3.9, to (3) i (4) są spełnione i d_1, d_2 generują te same topologie.

Przykład. Metryki euklidesowa, taksówkowa oraz maksimum są równoważne, zatem

$$\mathcal{T}_{d_E} = \mathcal{T}_{d_M} = \mathcal{T}_{d_T}.$$

5.2 Zbieżność ciągów

Definicja 5.9.
Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną oraz $\{x_n\}_n \subseteq X, x \in X$.
Mówimy, że $\{x_n\}_n$ zbiega do x w metryce d (ozn. $x_n \xrightarrow{d} x$), jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ d(x_n,x) < \varepsilon.$$

Uwaga. Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Przykład 5.10.
Weźmy ciąg $\{x_n\}_n$ zadany przez $x_n = (1-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Ciąg ten jest zbieżny w metryce rzeka, ponieważ:

$$d_R((1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}),(1,0)) = |\frac{1}{n}| + |(1-\frac{1}{n}) - 1| + |0| = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Twierdzenie 5.11.
Załóżmy, że metryki d_1 i d_2 na przestrzeni X są równoważne.
Wówczas $x_n \xrightarrow{d_1} x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \xrightarrow{d_2} x$.

Dowód.
Załóżmy, że $d_1(x_n, x) \to 0$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}_n$ należą do kuli $K_{d_1}(x, \varepsilon)$, to znaczy

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \, x_n \in K_{d_1}(x, \varepsilon).$$

Rozważmy kulę $K_{d_2}(x, r)$ dla pewnego $r > 0$. Z Twierdzenia 5.8 istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$K_{d_1}(x, \delta) \subseteq K_{d_2}(x, r),$$

zatem

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \, x_n \in K_{d_1}(x, \delta) \subseteq K_{d_2}(x, r).$$

Ponieważ r było dowolne, możemy napisać:

$$\forall_{r>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \, x_n \in K_{d_2}(x, r),$$

co oznacza, że $x_n \xrightarrow{d_2} x$.
Zamieniając w powyższym dowodzie oznaczenia d_1 i d_2, otrzymamy dowód implikacji przeciwnej.

$\square$

Przykład 5.12.
Ponownie rozpatrzmy ciąg $\{x_n\}_n$ postaci $x_n = (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.
W metryce euklidesowej zbieżność jest równoważna zbieżności po współrzędnych, w związku z czym otrzymujemy:

$$(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{d_E} (1, 0).$$

Ciąg x_n jest zbieżny w metrykach taksówkowej oraz maksimum (równoważność z d_E):

$$(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{d_T} (1, 0),$$

$$(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{d_M} (1, 0).$$

Twierdzenie 5.13.
Jeżeli $d(x_n, x) \to 0$, to ciąg x_n spełnia warunek Cauchy'ego, czyli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Dowód.
Skoro $d(x_n, x) \to 0$, to $\forall_{\delta>0}\, \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0}\, d(x_n, x_m) < \delta$.
Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x) \leqslant 2 \cdot \delta.$$

W szczególności dla $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ mamy

$$d(x_n, x_m) \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Powyższe twierdzenie jest wygodne do pokazywania, że dany ciąg nie jest zbieżny. Zobaczmy to na przykładzie.

Przykład 5.14.
Ciąg $\{(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_n$ nie jest zbieżny w metryce centrum, ponieważ:

$$d_c((1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k})) = ||(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})||_e + ||(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k})||_e \geqslant 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{k} \geqslant 1$$

dla $n, k \to \infty$.

Twierdzenie 5.15.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $F \subseteq X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}_n \subseteq F$ z tego, że $x_n \to x$ wynika, że $x \in F$. To znaczy każdy ciąg zawarty w F, który jest zbieżny, ma w nim swoją granicę.

Dowód.
(”$\Longrightarrow$”)
Załóżmy nie wprost, że F jest zbiorem domkniętym oraz istnieje ciąg $\{x_n\}_n \subseteq F$ taki, że $x_n \to x$ i $x \notin F$. Wówczas $x \in F^c$, a ponieważ dopełnienie F jest otwarte, to wokół x możemy postawić kulę $K_\varepsilon(x)$, która zawiera się w F^c. Ponieważ ciąg $\{x_n\}_n$ zawiera się w zbiorze F, to

$$d(x_n, x) \geqslant \varepsilon,$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co jest sprzeczne z założeniem zbieżności ciągu $\{x_n\}_n$.

(”$\Longleftarrow$”)
Załóżmy nie wprost, że dla każdego ciągu zbieżnego $\{x_n\}_n \subseteq F$ jego granica także jest w F, ale F nie jest domknięty. Stąd F^c nie jest otwarty. To oznacza, że istnieje element $x \in F^c$ taki, że dla każdego $\varepsilon > 0$

$$K_\varepsilon(x) \nsubseteq F^c.$$

W szczególności dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$K_{\frac{1}{n}}(x) \nsubseteq F^c,$$

czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje element $x_n \in (K_{\frac{1}{n}}(x) \cap F)$. Wtedy

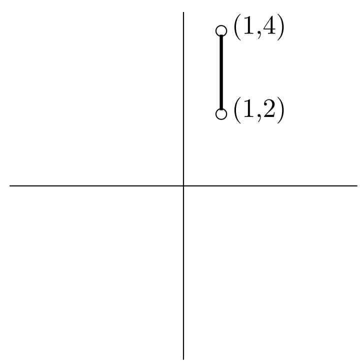
$$d(x_n, x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

To oznacza, że $x_n \to x$, a wówczas (z założenia) $x \in F$, co daje sprzeczność. □

Przykłady.

1. Każdy zbiór skończony jest domknięty.

2. Rozpatrzmy zbiór $X = \{1\} \times (2, 4)$.



Rysunek 19: Zbiór X

Zbiór X nie jest otwarty w $(\mathbb{R}^2, d_E)$, ponieważ wokół żadnego z punktów $x \in X$ nie postawimy kuli o tak małym promieniu r, aby $K_E(x, r) \subseteq X$.
Z Twierdzenia 5.15 zbiór X nie jest także domknięty w $(\mathbb{R}^2, d_E)$.
Przykładowym ciągiem w X jest $x_n = (1, 2 + \frac{1}{n})$. Zauważmy, że $x_n \to (1, 2)$, lecz $(1, 2) \notin X$.

5.3 Zupełność

Definicja 5.16.
Mówimy, że ciąg $\{x_n\}_n$ w przestrzeni metrycznej (X, d) spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0}\ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Uwaga. Taki ciąg nazywamy **ciągiem Cauchy'ego**. Ciąg Cauchy'ego nie musi być zbieżny.

Przykład 5.17.
Przestrzeń $((0,1), d_E)$ nie jest zupełna. Rozważmy w niej ciąg $\{x_n\}_n$ zadany przez $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Jest to ciąg Cauchy'ego, ponieważ

$$d_E(x_n, x_m) = |1 - \frac{1}{n} - (1 - \frac{1}{m})| = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

jednakże

$$(1 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \notin (0,1).$$

W związku z tym $\{x_n\}_n$ nie jest zbieżny w $((0,1), d_E)$.

Definicja 5.18.
Przestrzeń metryczna (X,d) jest **zupełna**, jesli każdy ciąg Cauchy'ego w X jest zbieżny.

Analogicznie, zbiór $A \subset X$ jest **zupełny**, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w A jest zbieżny.

Przykłady.

1. Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, d_E)$ jest zupełna dla dowolnego n.

2. Za wyjątkiem całej przestrzeni zbiory otwarte w $(\mathbb{R}^n, d_E)$ nie są zupełne, co wynika z Twierdzenia 5.19 i tego, że zbiory otwarte w $(\mathbb{R}^n, d_E)$ nie są domknięte.

3. W przestrzeni (X, d_D) każdy zbiór jest zupełny.

   Uzasadnienie. *Niech ciąg $\{x_n\}_n \in X$ będzie Cauchy'ego. Oznacza to, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie n_0, że dla każdych $n, m > n_0$ mamy $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. W szczególności $d(x_n, x_m) < 1$. Z definicji metryki dyskretnej otrzymujemy $d(x_n, x_m) = 0$, czyli $x_n = x_m$ (dla każdych $n, m > n_0$). Zatem $\{x_n\}_n$ jest stały od pewnego miejsca, co oznacza, że jest zbieżny.*

Twierdzenie 5.19.
Niech przestrzeń (X,d) będzie zupełna oraz $A \subset X$. Wówczas zbiór A jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty.

Dowód.
("$\Longleftarrow$")
Załóżmy, że A jest domknięty oraz weźmy ciąg $\{x_n\}_n \in A$, który jest Cauchy'ego.
Przestrzeń (X,d) jest zupełna, więc istnieje $x \in X$ takie, że $x_n \longrightarrow x$.
Z założenia A jest domknięty, zatem $x \in A$.

("$\Longrightarrow$")
Chcemy pokazać, że jeśli $\{x_n\}_n$ jest ciągiem elementów z A i ma granicę $x \in X$, to $x \in A$, ale ciąg $\{x_n\}_n$ jest Cauchy'ego oraz zbiór A jest zupełny, stąd $x \in A$.

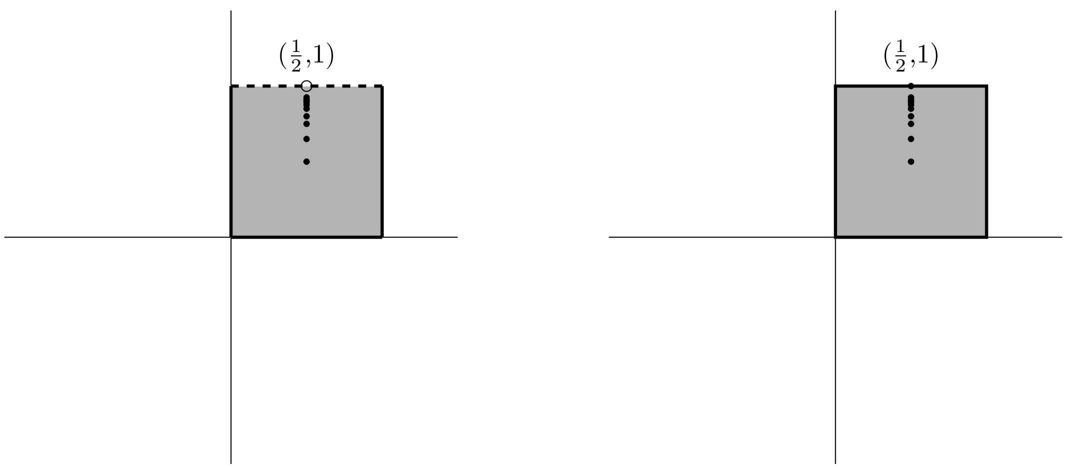
$\square$

Przykład 5.20.
Rozpatrzmy zbiór $A = [0,1] \times [0,1)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_E)$.
Wybierzmy z A ciąg zadany przez $x_n = (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n})$, który jest Cauchy'ego, ponieważ

$$d_E(x_n, x_m) = |(1 - \frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{m})| = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Wyrazy ciągu $\{x_n\}_n$ zbiegają do punktu $(\frac{1}{2}, 1) \notin A$. Stąd A nie jest zupełny.

Zbiór domknięty postaci $B = [0,1] \times [0,1]$ jest zbiorem zupełnym, ponieważ jest domknięty, a $\mathbb{R}^2$ jest przestrzenią zupełną.



Rysunek 20: Zbiory A oraz B wraz z kilkoma wyrazami ciągu $\{x_n\}_n$.

5.4 Wnętrza, domknięcia, brzegi

Definicja 5.21.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz U zbiorem otwartym w X.
Wnętrzem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy największy zbiór otwarty zawarty w A (oznaczamy $Int(A)$), czyli sumę wszystkich otwartych podzbiorów U zbioru A.

$$Int(A) = \bigcup_{U \subseteq A} U$$

Przykład.
W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}, d_E)$:

$$Int([0,1)) = (0,1).$$

Definicja 5.22.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz F zbiorem domkniętym w X.

Domknięciem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający A (oznaczamy $Cl(A)$), czyli przekrój wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A.

$$Cl(A) = \bigcap_{A \subseteq F} F$$

Przykład. W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}, d_E)$:

$$Cl([0,1)) = [0,1].$$

Definicja 5.23.
Brzegiem zbioru A (ozn. $Bd(A)$) jest następująca różnica:

$$Bd(A) = Cl(A) \setminus Int(A).$$

Przykład.

$$Bd([0,1)) = [0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\}$$

(punkty brzegowe).

Własności.

W1. $Int(A) \subseteq A \subseteq Cl(A)$.

W2. $Int(Int(A)) = Int(A)$.

W3. $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$.

W4. $Int(A) = A \Leftrightarrow A$ jest otwarty.

> *Dowód Własności W4.*
> Dowód implikacji " $\Longrightarrow$ " jest natychmiastowy wprost z definicji wnętrza zbioru. Pokażemy, że jeśli $A \subseteq X$ jest zbiorem otwartym, to zachodzi równość $Int(A) = A$. Z Własności $W1$, $Int(A) \subset A$. Z drugiej strony, skoro A jest otwarty, to pojawia się w sumie $\bigcup_{U \subseteq A} U$, czyli $A \subseteq Int(A)$.
>
> $\square$

W5. $Cl(A) = A \Leftrightarrow A$ jest domknięty.

Uwaga. W dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) zachodzi:

- $Int(X) = X = Cl(X)$
- $Int(\emptyset) = \emptyset = Cl(\emptyset)$.

Wówczas w obu przypadkach $Bd(X) = \emptyset$.

Twierdzenie 5.24.
Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). Wówczas:

1° *$x \in Cl(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r > 0$ przekrój kuli $K_d(x, r)$ ze zbiorem A jest niepusty.*

2° *$x \in Cl(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy w A istnieje ciąg $\{x_n\}_n$, który dąży do x.*

Dowód.

1°

(”$\Longrightarrow$”)
Pokażemy najpierw, że jeśli $x \in Cl(A)$, to dla każdego $r > 0$ mamy $K_d(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje $r > 0$ takie, że $K_d(x, r) \cap A = \emptyset$.
Wówczas A zawiera się w $X \setminus K_d(x, r)$, który jest zbiorem domkniętym.
Wtedy $Cl(A)$ (jako najmniejszy zbiór domknięty) także zawiera się w $X \setminus K_d(x, r)$.
Oznacza to, że $x \notin Cl(A)$, co daje sprzeczność.

(”$\Longleftarrow$”)
Pokażemy teraz, że jeśli dla każdego $r > 0$ zachodzi $K_d(x, r) \cap A \neq \emptyset$, to $x \in Cl(A)$.

Załóżmy nie wprost, że $x \notin Cl(A)$. Wtedy x jest w zbiorze otwartym $X \setminus Cl(A)$.
Wówczas (z definicji) istnieje $r > 0$ takie, że $K_d(x, r) \subseteq X \setminus Cl(A)$, czyli $K_d(x, r) \cap A = \emptyset$, co daje sprzeczność.

2°

(”$\Longrightarrow$”)

Niech $x \in Cl(A)$. Wtedy dla każdego $n > 0$ istnieje $x_n \in K_d(x, \frac{1}{n}) \cap A$.
Mamy więc $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Zatem $x_n \to x$.

(”$\Longleftarrow$”)
Załóżmy, że $x_n \to x$, $x_n \in A$. Weźmy dowolne $r > 0$.
Wówczas istnieje n_0 takie, że dla każdego $n > n_0$,

$$d(x_n, x) < r.$$

To oznacza, że x_n jest w kuli $K(x,r)$ czyli

$$K(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

Na mocy 1° mamy, że $x \in Cl(A)$.

$\square$

Fakt.
W każdej przestrzeni metrycznej (X,d) dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq X$ zachodzą następujące własności:

(1) $A \subseteq B \Longrightarrow Int(A) \subseteq Int(B)$ *i* $A \subseteq B \Longrightarrow Cl(A) \subseteq Cl(B)$

Dowód.
Niech $x \in Int(A)$. Każde wnętrze jest otwarte, zatem istnieje promień $r > 0$ taki, że

$$K(x,r) \subseteq Int(A) \subseteq A.$$

Mamy $A \subseteq B$, zatem $K(x,r) \subseteq B$, czyli $x \in Int(B)$.
Stąd

$$A \subseteq B \Longrightarrow Int(A) \subseteq Int(B).$$

Jeżeli $x \in Cl(A)$, to dla każdego $r > 0$ przecięcie kuli $K(x,r)$ ze zbiorem A jest niepuste.
Wówczas istnieje element $x_r \in K(x,r)$, taki że $x_r \in A \subseteq B$.
Zatem

$$K(x,r) \cap B \neq \emptyset \text{ (dla każdego } r > 0),$$

co oznacza, że $x \in Cl(B)$.

$\square$

(2) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$

Dowód.
Pokażemy najpierw, że $Cl(A \cup B) \subseteq Cl(A) \cup Cl(B)$.
$Cl(A) \cup Cl(B)$ jest zbiorem domkniętym jako skończona suma zbiorów domkniętych. Z Własności $W1$ mamy: $A \subseteq Cl(A)$ oraz $B \subseteq Cl(B)$.
Stąd

$$A \cup B \subseteq Cl(A) \cup Cl(B),$$

zatem

$$Cl(A \cup B) \subseteq Cl(A) \cup Cl(B).$$

Żeby pokazać zawieranie w drugą stronę zauważmy, że

$$A \subseteq A \cup B \subseteq Cl(A \cup B) \text{ oraz } B \subseteq A \cup B \subseteq Cl(A \cup B).$$

Stąd

$$Cl(A) \subseteq Cl(A \cup B) \text{ oraz } Cl(B) \subseteq Cl(A \cup B).$$

Zatem

$$Cl(A) \cup Cl(B) \subseteq Cl(A \cup B),$$

co kończy dowód.

□

(3) $Int(A \cup B) \supseteq Int(A) \cup Int(B)$

Dowód.
Z Własności $W1$ mamy $Int(A) \subseteq A$ oraz $Int(B) \subseteq B$.
Stąd

$$Int(A) \cup Int(B) \subseteq A \cup B.$$

$Int(A) \cup Int(B)$ jest zbiorem otwartym, zatem z Własności $W4$

$$Int(A) \cup Int(B) \subseteq Int(A \cup B).$$

□

(4) $Cl(A \cap B) \subseteq Cl(A) \cap Cl(B)$

Dowód.
Z Własności $W1$ mamy $A \subseteq Cl(A)$ oraz $B \subseteq Cl(B)$, zatem

$$A \cap B \subseteq Cl(A) \cap Cl(B).$$

Zbiór $Cl(A) \cap Cl(B)$ jest domknięty jako przekrój zbiorów domkniętych.
Stąd

$$Cl(A \cap B) \subseteq Cl(A) \cap Cl(B).$$

□

(5) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$

Dowód.
Pokażemy najpierw, że $Int(A \cap B) \subseteq Int(A) \cap Int(B)$.

Wiemy, że $A \cap B \subseteq A$.
Wtedy z (1) $Int(A \cap B) \subseteq Int(A)$. Analogicznie $Int(A \cap B) \subseteq Int(B)$.
Stąd
$$Int(A \cap B) \subseteq Int(A) \cap Int(B).$$

Chcemy pokazać, że zachodzi również zawieranie w drugą stronę.
Na mocy Własności $W1$ otrzymujemy
$$Int(A) \cap Int(B) \subseteq A \cap B,$$
co oznacza, że
$$Int(Int(A) \cap Int(B)) \subseteq Int(A \cap B).$$
Ponieważ $Int(A) \cap Int(B)$ jest zbiorem otwartym, to na mocy Własności $W4$ otrzymujemy
$$Int(A) \cap Int(B) \subseteq Int(A \cap B).$$
□

6 Zaawansowane pojęcia topologiczne

6.1 Podprzestrzeń metryczna

Definicja 6.1.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, Y niepustym podzbiorem X oraz
$$d_Y : Y \times Y \longrightarrow [0, \infty)$$
funkcją określoną następująco
$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2).$$
Wówczas parę (Y, d_Y) nazywamy **podprzestrzenią metryczną** przestrzeni (X, d).
Łatwo sprawdzamy, że d_Y spełnia własności metryki i mówimy, że d_Y jest **metryką dziedziczoną** z (X, d).

Przykład.
Przykładem podprzestrzeni metrycznej w $(\mathbb{R}, d_E)$ jest $([0, 1], d_{E_{[0,1]}})$.
Zgodnie z definicją, dziedziną funkcji $d_{E_{[0,1]}}$ jest $[0, 1] \times [0, 1]$, ponieważ wyznacza ona odległość między dowolnymi dwoma punktami ze zbioru $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Fakt 6.2.
Niech $K^Y(y_0, r)$ *będzie kulą otwartą w podprzestrzeni metrycznej* (Y, d_Y)*. Wówczas*

$$K^Y(y_0, r) = K(y_0, r) \cap Y,$$

gdzie $K(y_0, r)$ *jest kulą otwartą w* (X, d)*. Mówimy, że kule otwarte w podprzestrzeni* (Y, d_Y) *są "cieniami" kul otwartych z* (X, d)*. Podobnie, kule domknięte w* (Y, d_Y) *są "cieniami" kul domkniętych z* (X, d)*:*

$$\overline{K^Y}(y_0, r) = \overline{K}(y_0, r) \cap Y.$$

Dowód.
Z definicji kuli otwartej otrzymujemy

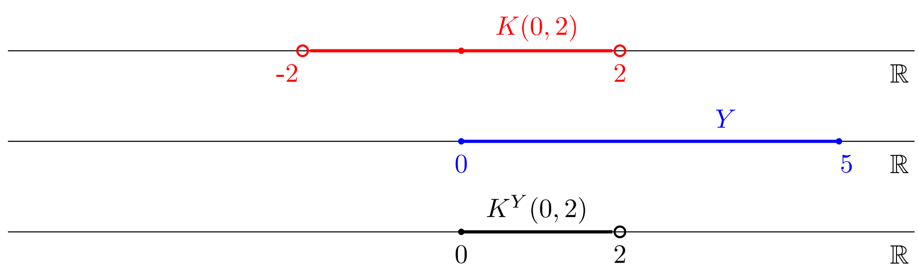
$$K^Y(y_0, r) = \{y \in Y : \ d(y_0, y) < r\} = \{x \in X : \ d(y_0, x) < r\} \cap Y = K(y_0, r) \cap Y.$$

Rozumowanie dla kul domkniętych jest analogiczne. $\square$

Przykłady.

1. W przestrzeni $(\mathbb{R}, d_E)$ kula $K(0, 2)$ jest odcinkiem $(-2, 2)$.
   Weźmy zbiór $Y = [0, 5] \subset \mathbb{R}$. Wtedy

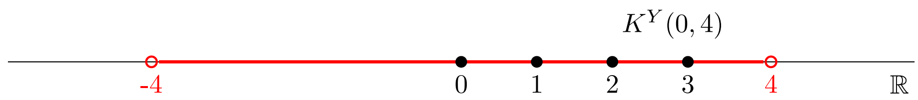
$$K^Y(0, 2) = (-2, 2) \cap [0, 5] = [0, 2).$$



Rysunek 21: Zbiory $K(0, 2)$, Y oraz $K^Y(0, 2)$ na prostych rzeczywistych.

2. Rozpatrzmy w $(\mathbb{R}, d_E)$ kulę $K(0, 4) = (-4, 4)$ oraz podzbiór $Y = \mathbb{N}$. Wtedy

$$K^Y(0, 4) = (-4, 4) \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}.$$

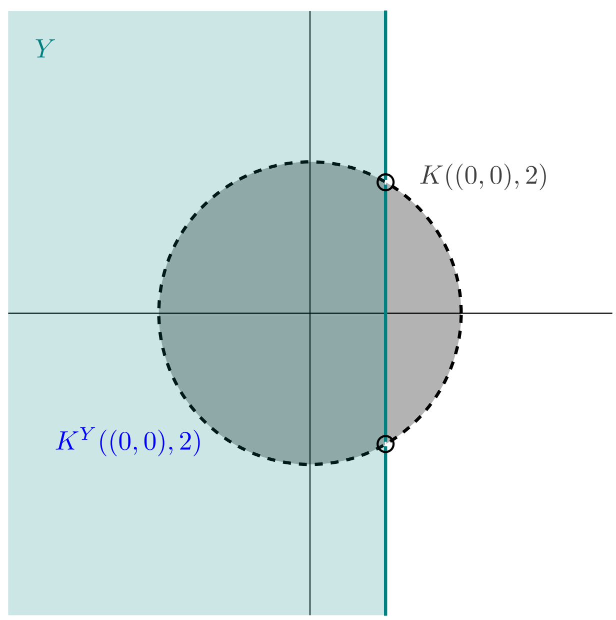


Rysunek 22: Kule $K(0,4)$ oraz $K^Y(0,4)$ na prostej rzeczywistej.

3. W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_C)$ rozpatrzmy kulę $K((0,0),2)$ oraz weźmy zbiór

$$Y = (-\infty, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

Wtedy kula $K^Y((0,0),2)$ jest fragmentem koła zacieniowanym poniżej:



Rysunek 23: Zbiory $K((0,0),2)$, Y oraz $K^Y((0,0),2)$ na płaszczyźnie.

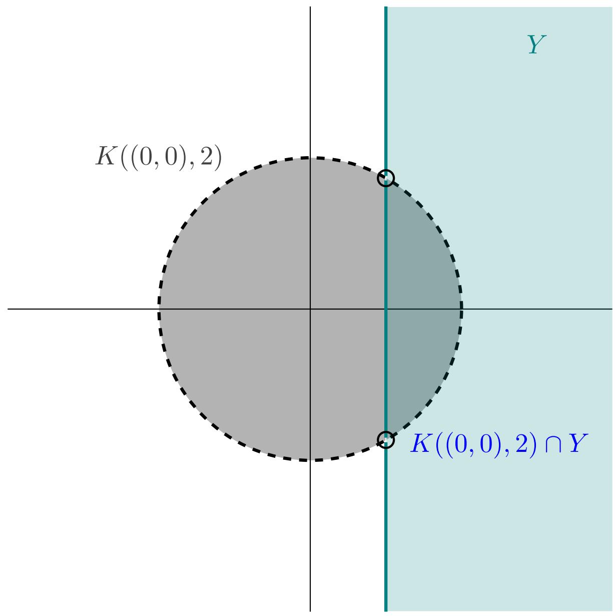
Uwaga 6.3.
Nie każdy przekrój kuli w przestrzeni X z podprzestrzenią Y jest kulą w Y.

Przykład.
Ponownie weźmy kulę $K((0,0),2) \subset (\mathbb{R}^2, d_C)$. Niech zbiór Y będzie teraz postaci

$$Y = [1, \infty) \times \mathbb{R}.$$

42:27227

Zauważmy, że przekrój $K((0,0),2) \cap Y$ nie jest kulą w (Y, d_{C_Y}), gdyż $(0,0) \notin Y$. Z Faktu 6.5 jest natomiast zbiorem otwartym (fragmentem koła) zacieniowanym poniżej:



Rysunek 24: Zbiory $K((0,0),2)$, Y oraz $K((0,0),2) \cap Y$ na płaszczyźnie.

Definicja 6.4.
Niech X będzie przestrzenią z topologią $\mathcal{T}$ oraz niech $Y \subseteq X$. **Topologią dziedziczoną** (ozn. $\mathcal{T}_Y$) nazywamy topologię na Y, której zbiory otwarte są postaci

$$U^Y = U \cap Y,$$

gdzie U jest zbiorem otwartym w X.

Powyższa definicja jest poprawna, to znaczy zachodzi poniższy fakt.

Fakt 6.5.
Zbiory postaci $U \cap Y$ są otwarte w metryce d_Y.

Dowód.
Ponieważ U jest zbiorem otwartym, można przedstawić go w postaci sumy po wszystkich kulach otwartych w nim zawartych. Zatem mamy

$$U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x),$$

gdzie r_x jest takie, że $K(x, r_x) \subset U$. Z Faktu 6.2 mamy

$$\bigcup_{y \in U^Y} K^Y(y, r_y) = \bigcup_{y \in U^Y} (K(y, r_y)) \cap Y).$$

Z drugiej strony

$$U^Y = U \cap Y = (\bigcup_{x \in U} K(x, r_x)) \cap Y = \Big((\bigcup_{y \in U^Y} K(y, r_y)) \cup (\bigcup_{x \in U \setminus U^Y} K(x, r_x)) \Big) \cap Y = (\bigcup_{y \in U^Y} K(y, r_y)) \cap Y,$$

ponieważ

$$(\bigcup_{y \in U \setminus U^Y} K(y, r_y)) \cap Y \subset Y \subset (\bigcup_{y \in U^Y} K(y, r_y)) \cap Y.$$

Otrzymujemy więc równość

$$U^Y = \bigcup_{y \in U^Y} K^Y(y, r_y),$$

co oznacza, że przekrój $U \cap Y$ jest zbiorem otwartym. $\square$

Przykład 6.6.
W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_R)$ rozpatrzmy otwarty podzbiór postaci

$$U = (1, 4) \times (1, 4)$$

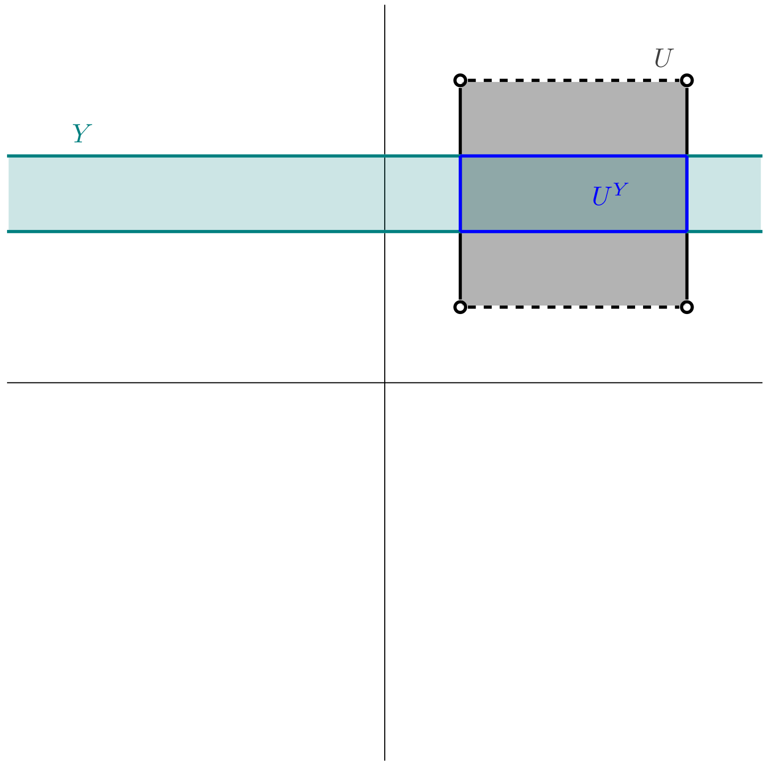
oraz podzbiór domknięty

$$Y = \mathbb{R} \times [2, 3].$$

Wówczas

$$U^Y = ([1, 4] \times (1, 4)) \cap (\mathbb{R} \times [2, 3]) = (1, 4) \times [2, 3]$$

jest otwarty w podprzestrzeni (Y, d_{R_Y}).



Rysunek 25: Zbiory Y, U oraz U^Y na płaszczyźnie.

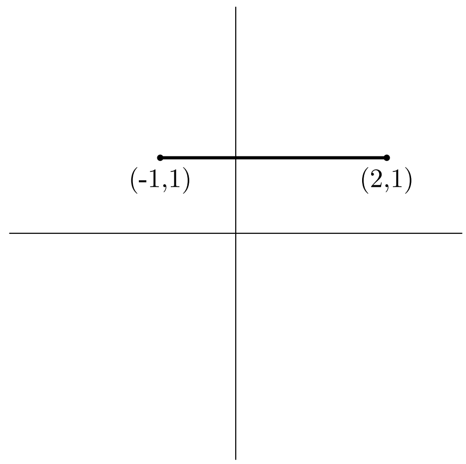
6.2 Ograniczoność

Definicja 6.7.
Średnicą niepustego podzbioru A przestrzeni metrycznej (X, d) jest nieujemna liczba

$$diam_d(A) = sup\{d(x, y) : \ x, y \in A\}.$$

Zbiorem ograniczonym nazywać będziemy taki zbiór, którego średnica jest skończona. Jeżeli $diam_d(A) = \infty$, to zbiór A jest **nieograniczony**.

Przykład 6.8.
Rozpatrzmy podzbiór $\mathbb{R}^2$ postaci $X = [-1, 2] \times \{1\}$.
Obliczać będziemy odległość między dwoma najdalej (względem przyjętej metryki) rozstawionymi punktami.



Rysunek 26: Zbiór X

1. **Metryka euklidesowa.**
   Rozpatrujemy odległość między $(-1,1)$ oraz $(2,1)$.
   $$diam_{d_E}(X) = d_E((-1,1),(2,1)) = |-1-2| = 3.$$

2. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku metryk **taksówkowej** oraz **maksimum**.
   $$diam_{d_T}(X) = 3 = diam_{d_M}(X).$$

3. **Metryka rzeka.**
   $$diam_{d_R}(X) = d_R((-1,1),(2,1)) = |1| + |-1-2| + |1| = 5.$$

4. Zwróćmy uwagę na to, że w **metryce centrum** dwoma najbardziej oddalonymi od siebie punktami są $(2,1)$ oraz $(2-\frac{1}{n},1)$.
   $$diam_{d_C}(X) = d_C((2,1),(2-\frac{1}{n},1)) =$$
   $$= ||(2,1)||_e + ||(2-\frac{1}{n}),1||_e = \sqrt{5} + \sqrt{5 - \frac{4n+1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 2\sqrt{5}.$$

   Zbiór X jest zbiorem ograniczonym w przestrzeniach $(\mathbb{R}^2, d_E)$, $(\mathbb{R}^2, d_T)$, $(\mathbb{R}^2, d_M)$, $(\mathbb{R}^2, d_R)$ oraz $(\mathbb{R}^2, d_C)$.

Uwaga 6.9.
Jeżeli metryki d_1 oraz d_2 są równoważne, to A jest ograniczony w (X, d_1) wtedy i tylko wtedy, gdy A jest ograniczony w (X, d_2).

Twierdzenie 6.10.
Niepusty zbiór A jest ograniczony (w przestrzeni (X, d)) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje kula $K(x, r)$ taka, że $A \subseteq K(x, r)$.

Dowód.
(”$\Longrightarrow$”)
Pokażemy najpierw, że jeśli A jest ograniczony, to istnieje kula $K(x, r)$ taka, że $A \subset K(x, r)$.
Niech x będzie ustalonym elementem zbioru A. Ponieważ A jest ograniczony, to istnieje $r > 0$ takie, że $diam_d(A) < r$. Wówczas dla każdego $x_0 \in A$ mamy

$$d(x_0, x) \leqslant diam_d(A) < r.$$

Oznacza to, że x_0 jest w kuli $K_d(x, r)$, czyli $A \subset K(x, r)$.

(”$\Longleftarrow$”)
Załóżmy, że $A \subset K_d(x, r)$. Niech $x, y \in A$. Wtedy

$$d(x, y) \leqslant sup_{a,b \in K(x,r)} d(a, b) \leqslant 2r < \infty.$$

Otrzymujemy, że $diam_d(A) < \infty$, zatem zbiór A jest ograniczony. □

Przykład (Kontynuacja Przykładu 6.8)**.**
W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_D)$ dowolna kula o promieniu $r > 1$ jest całą przestrzenią. W związku z tym każdy zbiór zawiera się w kuli.
Oznacza to, że $X = [-1, 2] \times \{1\}$ jest zbiorem ograniczonym także w $(\mathbb{R}^2, d_D)$.

Uwaga. Zbiory skończone są zawsze ograniczone.

Przykłady (Przykłady zbiorów nieograniczonych)**.**
Zbiorów nieograniczonych nie da się otoczyć żadną kulą. Są to między innymi:

1. Cała przestrzeń $\mathbb{R}^2$ w $(\mathbb{R}^2, d_T)$.

2. Prosta $\mathbb{R} \times \{2\}$ w $(\mathbb{R}^2, d_R)$.

3. Zbiór $\mathbb{N}$ w $(\mathbb{R}, d_E)$.

6.3 Zwartość

Definicja 6.11.
W przestrzeni (X, d) zbiór $A \subseteq X$ jest **zwarty**, gdy każdy ciąg punktów w A ma podciąg zbieżny w A.

Przestrzeń (X, d) jest **zwarta**, jeśli X jest zwarty jako zbiór.

Uwagi.

1. Jeżeli $\{x_n\}_n$ jest zbieżny do x, to każdy jego podciąg również jest zbieżny do x (w dowolnej przestrzeni metrycznej).
2. Ciąg, który nie jest zbieżny w (X, d) może mieć podciąg zbieżny w (X, d).
   Na przykład w $(\mathbb{R}, d_E)$ ciąg
   $$x_n = (-1)^n$$
   ma podciąg zbieżny
   $$x_{2n} = (-1)^{2n} = 1.$$
3. Jeżeli $x_n \longrightarrow \infty$ w $(\mathbb{R}^n, d_E)$, to $\{x_n\}_n$ nie ma podciągu zbieżnego.

Przykłady.

1. Każdy zbiór skończony jest zwarty.

   Rozpatrzmy zbiór $A = \{b_1, ..., b_k\}$. W ciągu $\{a_n\}_n \subseteq A$ jeden z elementów $b_1, ..., b_k$ powtórzy się nieskończenie wiele razy.
   Zatem $\{a_n\}_n$ będzie od pewnego miejsca stały, czyli jest zbieżny.
2. Prosta $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową nie jest zwarta, ponieważ ciąg $a_n = n$ dąży do ∞, więc nie ma podciągu zbieżnego.
3. Przedział $[a, b]$ jest zwarty.
   Aby uzasadnić dany przykład skorzystamy z poniższego twierdzenia.

   Twierdzenie 6.12. *(Twierdzenie Bolzano- Weierstrassa)*
   Jeśli ciąg jest ograniczony, to ma podciąg zbieżny.

   Dowód Twierdzenia 6.12 można znaleźć w książce Kazimierza Kuratowskiego pod tytułem *"Rachunek różniczkowy i całkowy: funkcje jednej zmiennej"* [3].

   Ciąg $\{a_n\}_n \subseteq [a, b]$ jest ograniczony. Na mocy Twierdzenia 6.12 znajdziemy podciąg $\{a_{n_k}\}_k$ zbieżny do $c \in \mathbb{R}$. Z domkniętości $[a, b]$ mamy $c \in [a, b]$. Zatem $\{a_{n_k}\}_k$ jest zbieżny w danym przedziale.

Twierdzenie 6.13.
W dowolnej przestrzeni metrycznej zwarty zbiór $A \subseteq X$ jest domknięty.

Dowód.
Wybierzmy ze zbioru A ciąg $\{a_n\}_n$, którego wyrazy zbiegają do a. Chcemy pokazać, że wtedy $a \in A$. Ze zwartości wiemy, że znajdziemy podciąg $\{a_{n_k}\}_k$ oraz istnieje $a' \in A$ będące jego granicą. Stąd $a = a'$ czyli $a \in A$, a więc A jest domknięty.

□

Twierdzenie 6.14.
W dowolnej przestrzeni metrycznej zwarty zbiór $A \subseteq X$ jest ograniczony.

Dowód.
Załóżmy, że A nie jest ograniczony. Pokażemy, że w A istnieje ciąg $\{a_n\}_n$, który nie ma podciągu zbieżnego.
Niech $a_1 \in A$. Rozważmy kulę $K_1 = K_d(a_1, 1)$. A nie jest ograniczony, zatem $A \setminus K_1 \neq \emptyset$.
Niech $a_2 \in A \setminus K_1$. Wtedy $d(a_2, a_1) \geqslant 1$.
Niech $K_2 = K_d(a_1, 2d(a_1, a_2))$. Wtedy $A \setminus K_2 \neq \emptyset$ (bo A nieograniczony).
Niech $a_3 \in A \setminus K_2 \subseteq A \setminus K_1$ (bo $K_1 \subseteq K_2$). Wtedy $d(a_3, a_1) \geqslant 1$.

Lemat 6.15.
W przestrzeni metrycznej (X, d) dla dowolnych elementów $x, y \in X$ zachodzi

$$K(y, d(x, y)) \subseteq K(x, 2d(x, y)).$$

Dowód Lematu 6.15.
Niech $p \in K(y, d(x, y))$, wtedy $d(p, y) < d(x, y)$.
Zatem $d(p, x) \leqslant d(p, y) + d(y, x) < d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$,
czyli $p \in K(x, 2d(x, y))$. $\square$

Z Lematu 6.15:

$$K_d(a_2, d(a_1, a_2)) \subseteq K_d(a_1, 2d(a_1, a_2)) = K_2,$$

czyli

$$a_3 \in A \setminus K_2 \subseteq A \setminus K_d(a_2, d(a_1, a_2)),$$

więc

$$d(a_3, a_2) \geqslant d(a_1, a_2) \geqslant 1.$$

Definiujemy rekurencyjnie $a_{n+1} \in A \setminus K_n$, gdzie $K_n = K_d(a_1, 2d(a_1, a_n))$.
Wtedy

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq ... \subseteq K_n$$

oraz dla $K'_j = K_d(a_j, d(a_1, a_j))$ mamy

$$K'_j \subseteq K_j \text{ (z Lematu 6.15).}$$

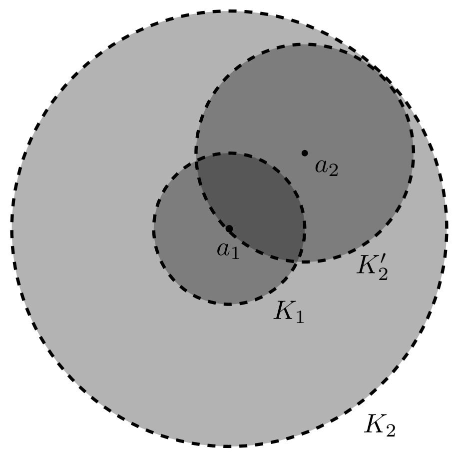
Zatem

i) $d(a_1, a_{n+1}) \geqslant 1$, bo $a_{n+1} \in A \setminus K_n \subseteq A \setminus K_1$.

ii) $d(a_{n+1}, a_j) \geqslant 1$ dla $2 \leqslant j \leqslant n$, bo $a_{n+1} \in A \setminus K_n \subseteq A \setminus K'_j$, czyli

$$d(a_{n+1}, a_j) \geqslant d(a_1, a_j) \geqslant 1.$$

W związku z tym dla każdych $i, j \in \mathbb{N}$, takich że $i \neq j$, mamy $d(a_i, a_j) \geqslant 1$.
To oznacza, że nie ma podciągu, który jest zbieżny. Zatem A nie jest zwarty.



Rysunek 27: Kule K_1, K_2 oraz K'_2.

□

Następująca charakteryzacja zbiorów zwartych prawdziwa jest w przestrzeni $(\mathbb{R}^n, d_E)$.

Twierdzenie 6.16.
Podzbiór A przestrzeni euklidesowej jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Dowód.
Pokazaliśmy już, że zwartość implikuje domkniętość oraz ograniczoność. Załóżmy teraz, że $A \in \mathbb{R}^n$ jest domknięty i ograniczony.
Weźmy ciąg $\{a_n\}_n$ ze zbioru A. Z twierdzenia Bolzano- Weierstrassa istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}_k \subseteq \{a_n\}_n \subseteq A$ oraz istnieje x_0 takie, że $\{a_{n_k}\}_k \longrightarrow x_0$.
Wówczas z domkniętości A mamy $x_0 \in A$, czyli A– zwarty. □

Uwaga. W pozostałych przestrzeniach metrycznych zbiór może nie być zwarty, mimo że jest domknięty i ograniczony.

Przykład.
Rozważmy zbiór $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_C)$.

- X jest domknięty, ponieważ jego dopełnienie jest otwarte.
- X jest ograniczony, ponieważ $diam_{d_c}(X) = 2$.
- X nie jest zwarty.
  Rozważmy ciąg $\{x_n\}_n \in X$ zadany przez $x_n = (cos(\frac{1}{n}), sin(\frac{1}{n}))$.
  Wówczas
  $$d_C((cos(\frac{1}{n}), sin(\frac{1}{n})), (cos(\frac{1}{k}), sin(\frac{1}{k}))) = 2.$$
  To oznacza, że odległość między wyrazamy tego ciągu jest zawsze stała. Nie ma podciągu, dla którego odległość między wyrazami dąży do zera.

Twierdzenie 6.17.
Jeśli ciąg Cauchy'ego zawiera podciąg zbieżny do x, to cały ciąg jest zbieżny do x.

Dowód.
Niech $\{x_n\}_n$ będzie ciągiem Cauchy'ego, a $\{x_{n_k}\}_k$ jego podciągiem zbieżnym do x. Pokażemy, że
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ d(x_n, x) < \varepsilon.$$
Z nierówności trójkąta
$$d(x_m, x) \leqslant d(x_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$$
dla każdych $m, k \in \mathbb{N}$.
Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ ciąg x_n jest Cauchy'ego, to istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdych $m, n_k > N_0$ mamy $d(x_m, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ze zbieżności podciągu $\{x_{n_k}\}_k$ istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $k > N_1$ mamy $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Wtedy dla $m > \max\{N_0, N_1\}$ mamy
$$d(x_m, x) \leqslant d(x_m, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
(bo n_k jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, zatem $n_m \geqslant m \geqslant N_0$).
Z dowolności ε mamy $x_n \longrightarrow x$. $\square$

Z powyższego twierdzenia wynika:

Twierdzenie 6.18.
Zbiór zwarty jest zupełny (przestrzeń zwarta jest zupełna).

Dowód.
Niech zbiór X będzie zwarty. Weźmy ciąg $\{x_n\}_n \subseteq X$ spełniający warunek Cauchy'ego. Ze zwartości X ciąg $\{x_n\}_n$ ma podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}_k$. Na mocy poprzedniego twierdzenia ciąg $\{x_n\}_n$ także jest zbieżny, a stąd X jest zupełny.

□

6.4 Ośrodkowość

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

Definicja 6.19.
Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest **gęsty** (w X), jeśli jego domknięcie jest całą przestrzenią.

Uwaga.
Na mocy Twierdzenia 5.24 otrzymujemy

$$Cl(A) = \{x \in X : \forall_{r>0}\ K(x,r) \cap A \neq \emptyset\},$$

a wtedy

$$Cl(A) = X \iff \forall_{x \in X}\ \forall_{r>0}\ K(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

To oznacza, że istnieje element $a \in A$ taki, że $a \in K(x,r) \cap A$, zatem Definicja 6.19 jest równoważna poniższej:

Definicja 6.20.
Zbiór A jest **gęsty** w (X, d) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a \in A}\ d(a,x) < \varepsilon.$$

Czyli dowolnie blisko każdego elementu ze zbioru X znajdziemy element z A.

Przykłady.

1. Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$.

2. Zbiór $A = \{(p,q) : p, q \in \mathbb{Q}\}$ jest gęsty w przestrzeniach $(\mathbb{R}^2, d_E)$, $(\mathbb{R}^2, d_T)$, $(\mathbb{R}^2, d_M)$.

3. Zbiór $B = \{(x,q) : x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}\}$ jest gęsty w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_R)$.

Definicja 6.21.
Mówimy, że przestrzeń (X, d) jest **ośrodkowa**, jeśli istnieje przeliczalny zbiór A gęsty w X. Taki zbiór A nazywamy **ośrodkiem** zbioru X.

Przykłady.

1. Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, d_E)$ z ośrodkiem $\mathbb{Q}^n$.
2. Przestrzenie $(\mathbb{R}^2, d_T)$, $(\mathbb{R}^2, d_M)$ z ośrodkiem $\mathbb{Q}^2$.
3. Przestrzeń $(\mathbb{N}, d_D)$ z ośrodkiem $\mathbb{N}$.

Uwaga.
Przestrzeń (X, d_D) jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem przeliczalnym, ponieważ ośrodkiem może być tylko cała przestrzeń X.

Twierdzenie 6.22.
Jeżeli w przestrzeni (X, d) istnieje nieprzeliczalny podzbiór $A \subseteq X$ oraz istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

$$\forall_{a,b\in A}\ a \neq b \Longrightarrow d(a, b) \geqslant \varepsilon,$$

*to (X, d) **nie jest ośrodkowa**.*

Dowód.
Załóżmy nie wprost, że przestrzeń (X, d) jest ośrodkowa. Wówczas istnieje podzbiór $Y \subseteq X$, który jest gęsty i przeliczalny.

Z gęstości Y mamy, że dla każdego $x \in X$

$$K_d(x, \frac{\varepsilon}{4}) \cap Y \neq \emptyset.$$

To oznacza, że dla każdego $x \in X$ istnieje element $y_x \in Y$ taki, że

$$y_x \in K_d(x, \frac{\varepsilon}{4}).$$

W związku z powyższym możemy zdefiniować funkcję $f : A \longrightarrow Y$, która elementowi $a \in A$ przyporządkowuje element $y_a \in Y$. Funkcja ta jest różnowartościowa, bo dla $a, b \in X,\ a \neq b$

$$K_d(a, \frac{\varepsilon}{4}) \cap K_d(b, \frac{\varepsilon}{4}) = \emptyset.$$

Istotnie, jeśli $c \in K_d(a, \frac{\varepsilon}{4}) \cap K_d(b, \frac{\varepsilon}{4})$, otrzymujemy

$$d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Jest to sprzeczne z założeniem, że $d(a,b) \geqslant \varepsilon$.
Ponieważ Y jest przeliczalną przeciwdziedziną, otrzymujemy

$$\aleph_0 \geqslant |Y| \geqslant |A| = \mathfrak{c},$$

co oznacza sprzeczność.

$\square$

Przykład 6.23.
Korzystając z Twierdzenia 6.22 pokażemy, że przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_C)$ nie jest ośrodkowa.

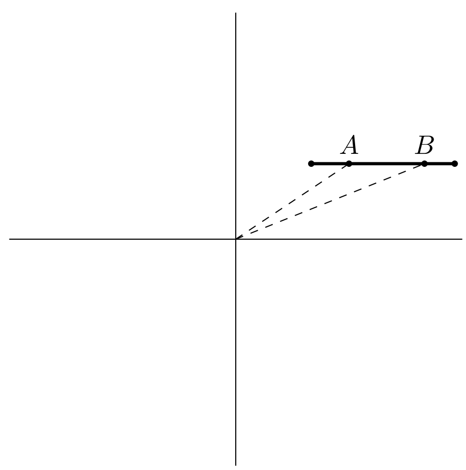
Rozpatrzmy podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^2$ postaci $X = [1,2] \times \{1\}$.
Zbiór X jest nieprzeliczalny, ponieważ jest odcinkiem mocy $\mathfrak{c}$.
Rozważmy dwa dowolne elementy ze zbioru X. Są one postaci $A = (a,1)$ oraz $B = (b,1)$.
Obliczając odległość między tymi punktami, względem metryki centrum, otrzymujemy:

$$d_C((a,1),(b,1)) = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} \geqslant 2.$$

Zatem istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla dowolnych $A, B \in X$ mamy

$$d_C(A,B) \geqslant \varepsilon,$$

co oznacza, że $(\mathbb{R}^2, d_C)$ nie jest ośrodkowa.



Rysunek 28: Zbiór X z dowolnymi elementami A, B.

Definicja 6.24.
Mówimy, że zbiór A jest **brzegowy**, jeśli

$$Int(A) = \emptyset.$$

Mówimy, że zbiór A jest **nigdziegęsty**, jeśli

$$Int(Cl(A)) = \emptyset.$$

Zbiór nigdziegęsty w szczególności nie jest gęsty, bo dla A gęstego w X mamy

$$Int(Cl(A)) = Int(X) = X.$$

Przykład.
Rozpatrzmy zbiór $B = \{x\}$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, d_E)$.

- Zbiór B jest brzegowy, ponieważ $Int(\{x\}) = \emptyset$.
- Jest także nigdziegęsty, gdyż $Int(Cl(\{x\})) = Int(\{x\}) = \emptyset$.

6.5 Spójność

Definicja 6.25.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest **spójna**, jeśli **nie istnieją** otwarte podzbiory $A, B \subset X$ spełniające następujące warunki:

- $A \cap B = \emptyset$ (rozłączne),
- $A \dot\cup B = X$ (wypełniają całą przestrzeń X).

Zbiór $Y \subseteq X$ jest zbiorem **spójnym**, jeśli (Y, d_Y) jest przestrzenią spójną, jako podprzestrzeń przestrzeni (X, d_X).

Przykłady.
W przestrzeni $(\mathbb{R}, d_E)$ spójne są następujące zbiory:

1. Przedziały postaci $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$.
2. Półproste $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, (a, ∞).
3. Prosta $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 6.26.
W dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) równoważne są następujące warunki:

1° (X, d) *nie jest spójna.*

2° *Istnieją niepuste, rozłączne i domknięte podzbiory $Y_1, Y_2 \subseteq X$ takie, że $X = Y_1 \dot\cup Y_2$.*

3° *Istnieje niepusty podzbiór $U \subsetneq X$, który jest jednocześnie otwarty i domknięty (zbiór otwarto– domknięty).*

Dowód.
($1° \Longrightarrow 2°$)
Z definicji, jeżeli X jest niespójna, to istnieją niepuste, otwarte zbiory rozłączne A, B, takie że $X = A \cup B$.
Ponieważ A i B wypełniają całą przestrzeń, mamy

$$A = X \setminus B \text{ oraz } B = X \setminus A.$$

Stąd A oraz B są domknięte, jako dopełnienia zbiorów otwartych. W związku z tym spełniają warunki zawarte w tezie.

($2° \Longrightarrow 3°$)
Podzbiory Y_1, Y_2 są domknięte, rozłączne oraz tworzą całą przestrzeń X.
Zatem

$$Y_1 = X \setminus Y_2,$$

czyli Y_1 jest otwarty jako dopełnienie zbioru domkniętego, a stąd Y_1 jest otwarto– domkniętym podzbiorem przestrzeni X.
Analogicznie, zbiór Y_2 jest otwartym dopełnieniem zbioru Y_1.

($3° \Longrightarrow 1°$)
Przyjmijmy $A := U$ oraz $B := X \setminus U$. Wówczas A i B dowodzą niespójności X, ponieważ

- $A \cup B = X$,
- $A \cap B = \emptyset$,
- A jest niepusty i otwarty,
- B jest niepusty z założenia i otwarty jako dopełnienie zbioru domkniętego.

□

Przykłady.
Przykłady zbiorów, które nie są spójne:

1. Zbiory postaci $A = \mathbb{R} \setminus \{x_0\} = (-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty)$ w $(\mathbb{R}, d_E)$.
2. Zbiory postaci $B = \{x_0\} \cup X \setminus \{x_0\}$ w (X, d_D).
3. Zbiory postaci $C = \{x_0\} \times \mathbb{N}$ w $(\mathbb{R}^2, d_R)$.

Fakt 6.27.
*Zbiór $Y \subset X$ jest **niespójny** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją otwarte podzbiory $U_1, U_2 \subset X$ spełniające następujące warunki:*

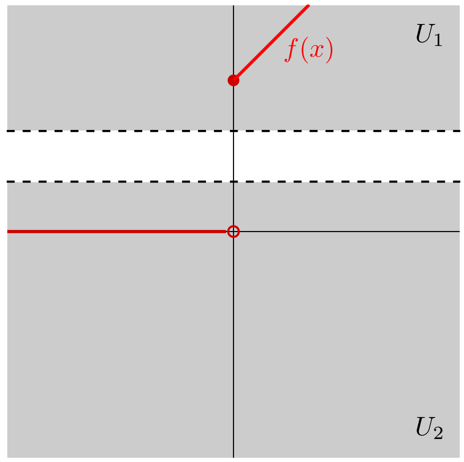
- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$,
- $Y = (Y \cap U_1) \cup (Y \cap U_2)$.

To oznacza, że zbiór niespójny daje się "nakryć" rozłącznymi zbiorami otwartymi. Powyższy fakt jest wygodny do pokazywania niespójności.

Dowód.
$(" \Longleftarrow ")$
Jeżeli
$$Y = (Y \cap U_1) \cup (Y \cap U_2) \text{ oraz } U_1 \cap U_2 = \emptyset,$$
to zbiory postaci
$$V_1 = Y \cap U_1,\ V_2 = Y \cap U_2$$
są otwarte w Y (z definicji topologii dziedziczonej).
Zatem $Y = V_1 \cup V_2$ jest niespójny jako suma rozłącznych podzbiorów otwartych.

$(" \Longrightarrow ")$
Jeśli zbiór Y jest niespójny, to jest sumą rozłącznych podzbiorów otwartych V_1 oraz V_2. Wówczas (z definicji) $V_i = U_i \cap Y$, przy czym U_i są otwarte w X dla wszystkich $i \in \mathbb{R}$. $\square$

Przykład 6.28.
Zdefiniujmy funkcję $f(x)$ w następujący sposób:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 + x & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}.$$
Korzystając z Faktu 6.27 pokażemy, że wykres funkcji F, czyli zbiór $Y = \{(x, f(x)) :\ x \in \mathbb{R}\}$, nie jest spójny.
Niech $U_1 = \mathbb{R} \times (\frac{2}{3}, \infty)$ oraz $U_2 = \mathbb{R} \times (-\infty, \frac{1}{3})$. Zbiory U_1, U_2 są rozłączne i otwarte.



Rysunek 29: Wykres funkcji $f(x)$ wraz z "nakryciami" U_1, U_2.

Zauważmy, że przekrój $Y \cap U_1$ daje część wykresu $f(x)$ określoną dla $x \geqslant 0$.
Podobnie, $Y \cap U_2$ jest częścią wykresu określoną dla $x < 0$.
Stąd, po wykonaniu sumy $(Y \cap U_1) \cup (Y \cap U_2)$, otrzymujemy pełny wykres funkcji $f(x)$, czyli zbiór Y.

7 Ciągłość

Przypomnijmy, że klasycznie (w $\mathbb{R}$) ciągłość funkcji w punkcie definiowaliśmy na dwa sposoby:

- Poprzez definicję Heinego:
  Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest **ciągła w** $x_0 \in \mathbb{R}$, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$
  $$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0).$$
- Poprzez definicję Cauchy'ego:
  Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest **ciągła w** $x_0 \in \mathbb{R}$, gdy
  $$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in \mathbb{R}} \; |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Powyższe definicje są równoważne. Obie z nich możemy uogólnić na dowolne przestrzenie metryczne, zamieniając $|x - x_0|$ na $d(x, x_0)$ i zbieżność w $\mathbb{R}$ na zbieżność względem danej metryki, czyli:

Definicja 7.1.
Niech $(X, d_X), (Y, d_Y)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Mówimy, że $f : X \to Y$ jest ciągła w $x_0 \in X$, jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\}_n \subseteq X$
$$x_n \xrightarrow{d_X} x_0 \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x_0)$$

albo równoważnie

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\ d_X(x,x_0)<\delta \Longrightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon.$$

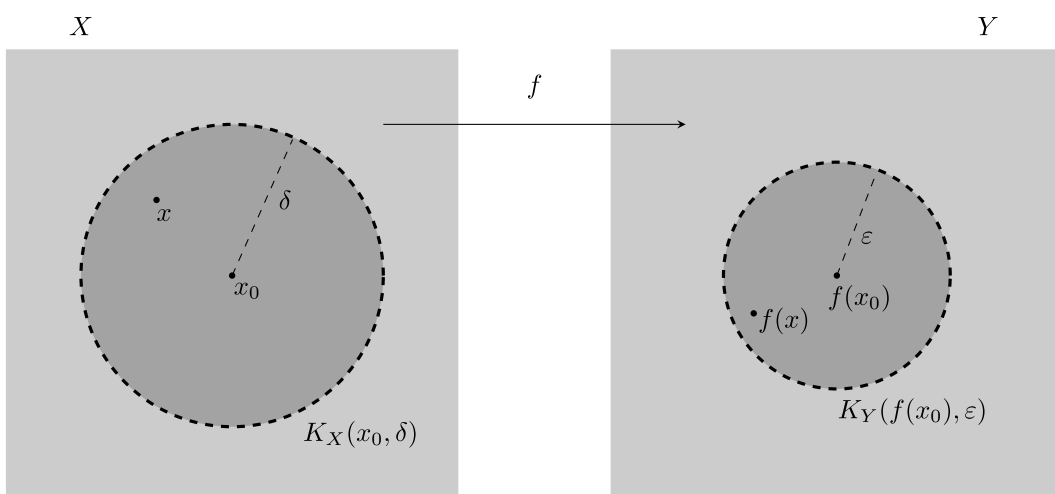
Uwaga 7.2.
Zauważmy, że definicję Heinego możemy zapisać następująco:
Dla każdego ciągu $\{x_n\}_n \subseteq X$ zbieżnego do x_0 mamy

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Uwaga 7.3.
W topologii nie zawsze mamy do czynienia z przestrzeniami metrycznymi, ale chcielibyśmy w takich przestrzeniach definiować ciągłość funkcji mając do dyspozycji tylko zbiory otwarte. Pierwszym krokiem w tym kierunku może być sformułowanie powyższej definicji używając pojęcia kuli otwartej.

Twierdzenie 7.4.
Przekształcenie $f: X \to Y$ jest ciągłe w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in X}\ x\in K_X(x_0,\delta) \Longrightarrow f(x)\in K_Y(f(x_0),\varepsilon).$$



Dowód.
Równoważność z definicją Cauchy'ego jest oczywista, ponieważ

$$d_X(x,x_0)<\delta \iff x\in K_X(x_0,\delta)$$

oraz

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \iff f(x) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Pokażemy równoważność z definicją Heinego jednocześnie pokazując, że definicje Heinego i Cauchy'ego są równoważne.

Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}_n \subseteq X$ taki, że $x_n \xrightarrow{d_X} x_0$. Chcemy pokazać, że

$$f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x_0),$$

to znaczy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon,$$

czyli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ f(x_n) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon). \tag{5}$$

Rozważmy $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\forall_{n>n_0}\ f(x_n) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Z założenia istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że dla każdego $x \in X$ mamy

$$x \in K_X(x_0, \delta_0) \Longrightarrow f(x) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Zauważmy, że z założenia $x_n \xrightarrow{d_X} x_0$ wynika:

$$\forall_{\alpha>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ x_n \in K_X(x_0, \alpha).$$

W szczególności dla powyższego δ_0 mamy

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ x_n \in K_X(x_0, \delta_0),$$

ale wtedy

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ f(x_n) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon),$$

a ponieważ ε było dowolne, to zachodzi (5), co chcieliśmy pokazać.

Załóżmy teraz, że $x_n \xrightarrow{d_X} x_0 \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x_0)$. Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in X}\ x \in K_X(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Załóżmy nie wprost, że istnieje ε_0 takie, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje $x \in X$ spełniające

$$x \in K_X(x_0, \delta) \text{ oraz } f(x) \notin K_Y(f(x_0), \varepsilon_0).$$

W szczególności dla $\delta = \frac{1}{n}$ istnieje x_n takie, że

$$x_n \in K_X(x_0, \frac{1}{n}) \text{ i } f(x_n) \notin K_Y(f(x_0), \varepsilon_0). \tag{6}$$

Jednak skoro $x_n \in K_X(x_0, \frac{1}{n})$, to $d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$, czyli

$$\lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x_0) = 0.$$

Stąd $x_n \xrightarrow{d_X} x_0$, a więc $f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x_0)$. Jednak wtedy $f(x_n) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon_0)$, dla dostatecznie dużych n, co daje sprzeczność z (6). $\square$

Definicja 7.5.
Powiemy, że funkcja $f : X \to Y$ jest **ciągła**, jeśli jest ciągła **w każdym punkcie swojej dziedziny**, to znaczy zachodzi którykolwiek z równoważnych warunków:

- $\forall_{x_0\in X}\forall_{x_n\subseteq X}\ x_n \xrightarrow{d_X} x_0 \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x_0)$
- $\forall_{x_0\in X}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\ d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
- $\forall_{x_0\in X}\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in X}\ x \in K_X(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

Warunków tych będziemy używać zamiennie (w zależności od sytuacji) jako definicji ciągłości funkcji.

Przykład 7.6.
Zbadamy ciągłość funkcji $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R}^2, d_E)$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, |x - y|).$$

Przyjmijmy, że $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ oraz $f_2(x, y) = |x - y|$.
Zatem mamy $f(x, y) = f(f_1(x, y), f_2(x, y))$.
Weźmy ciąg $(x_n, y_n)_n$ zbiegający do (x, y). Sprawdzimy, że zachodzi

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow{d_E} f(x, y).$$

Powyższy warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f_1(x_n, y_n) \xrightarrow{d_E} f_1(x, y) \text{ oraz } f_2(x_n, y_n) \xrightarrow{d_E} f_2(x, y).$$

Równoważnie

$$|f_1(x_n, y_n) - f_1(x, y)| \xrightarrow{d_E} 0 \text{ oraz } |f_2(x_n, y_n) - f_2(x, y)| \xrightarrow{d_E} 0. \tag{7}$$

Istotnie, mamy

$$f_1(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2)=\lim_{n\to\infty}(x_n)^2+\lim_{n\to\infty}(y_n)^2=x^2+y^2=f_1(x,y).$$

Zatem otrzymujemy, że $|f_1(x_n,y_n)-f_1(x,y)|\xrightarrow{d_E}0$.
Dla dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$ mamy $||a|-|b||\leqslant|a-b|$ oraz $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, stąd

$$|f_2(x_n,y_n)-f_2(x,y)|=||x_n-y_n|-|x-y||\leqslant$$

$$\leqslant|(x_n-y_n)-(x-y)|=|x_n-x+y-y_n|\leqslant$$

$$\leqslant|x_n-x|+|y-y_n|\xrightarrow{d_E}0+0=0.$$

Pokazaliśmy, że zachodzi (7), więc funkcja f jest ciągła.

W ogólnej przestrzeni topologicznej mamy następującą definicję ciągłości:

Definicja 7.7.
Niech X i Y bedą dowolnymi przestrzeniami topologicznymi. Funkcja $f:X\to Y$ jest ciągła, jeśli przeciwobraz przez f każdego zbioru otwartego jest otwarty.

Przypomnijmy, że **obrazem** zbioru $A\subseteq X$ przez funkcję $f:X\to Y$ nazywamy zbiór:

$$f[A]:=\{f(x):x\in A\},$$

a **przeciwobrazem** zbioru $B\subseteq Y$ przez funkcję $f:X\to Y$ nazywamy zbiór:

$$f^{-1}[B]:=\{x\in X:f(x)\in B\}.$$

Twierdzenie 7.8.
W przestrzeni metrycznej Definicje 7.5 i 7.7 są równoważne.

Dowód.
Pokażemy najpierw, że z Definicji 7.5 wynika Definicja 7.7. Wykorzystamy trzeci warunek z Definicji 7.5.
Niech $U\subseteq Y$ będzie zbiorem otwartym oraz niech $x_0\in f^{-1}[U]$. Pokażemy, że istnieje kula otwarta, do której należy x_0 i która zawiera się w $f^{-1}[U]$.
Ponieważ U jest otwarty, to wokół każdego jego punktu mamy kulę otwartą, która zawiera się w U. W szczególności istnieje $\varepsilon>0$ takie, że $K(f(x_0),\varepsilon)\subseteq U$.
Z założenia istnieje $\delta>0$ takie, że

$$\forall_{x\in K(x_0,\delta)}\ f(x)\in K(f(x_0),\varepsilon),$$

ale wtedy

$$K(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}[K(f(x_0),\varepsilon]\subseteq f^{-1}[U],$$

co dowodzi, że $f^{-1}[U]$ jest otwarty.

Pokażemy teraz, że z Definicji 7.7 wynika Definicja 7.5.
Zakładamy, że dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq Y$ przeciwobraz $f^{-1}[U]$ jest otwarty. Niech $x_0 \in X$ i niech $\varepsilon > 0$. Kula $K(f(x_0), \varepsilon)$ jest zbiorem otwartym, zatem z założenia mamy, że $f^{-1}[K(f(x_0), \varepsilon)]$ także jest otwarty. To oznacza, że istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$K(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}[K(f(x_0), \varepsilon)].$$

Zatem dla każdego $x \in K(x_0, \delta)$ mamy

$$f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon),$$

co daje trzeci warunek w Definicji 7.5. □

Fakt 7.9.
Niech X i Y będą dowolnymi przestrzeniami topologicznymi. Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz przez f każdego zbioru domkniętego jest domknięty.

Dowód.
Założmy, że f jest ciągła. Chcemy pokazać, że przeciwobraz przez f zbioru domkniętego jest domknięty.
Weźmy domknięty zbiór $W \subseteq Y$. Wtedy W^c jest otwarty. Z własności przeciwobrazu mamy

$$f^{-1}[W^c] = (f^{-1}[W])^c.$$

Ponieważ $(f^{-1}[W])^c$ jest otwarty, to $f^{-1}[W]$ jest domknięty, co chcieliśmy pokazać.

Założmy teraz, że przeciwobraz przez f zbioru domkniętego jest domknięty. Chcemy pokazać ciągłość funkcji f, czyli to, że przeciwobraz zbioru otwartego jest otwarty.
Weźmy otwarty zbiór $U \subseteq Y$. Ponieważ U^c jest domknięty, to z założenia mamy, że $f^{-1}[U^c]$ także jest domknięty. Z własności przeciwobrazu domknięty jest także $(f^{-1}[U])^c$, czyli $f^{-1}[U]$ jest otwarty, co chcieliśmy pokazać.

□

Definicja 7.10.
Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywamy **przekształceniem Lipschitza** o stałej $c > 0$, jeśli dla każdych $x, y \in X$ mamy:

$$d_Y(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d_X(x, y).$$

Fakt 7.11. *Przekształcenie Lipschitza jest ciągłe.*

Dowód.
Niech $(X, d_X), (Y, d_Y)$ będą przestrzeniami metrycznymi, a funkcja $f : X \longmapsto Y-$ przekształceniem Lipschitza.
Weźmy ciąg $x_n \in X$, taki że $x_n \xrightarrow{d_X} x$. Skoro f jest Lipschitza, to zachodzi nierówność:

$$d_Y(f(x_n), f(x)) \leqslant c \cdot d_X(x_n, x).$$

Ponieważ $x_n \xrightarrow{d_X} x$, to $d_X(x_n, x) \longrightarrow 0$. Stąd otrzymujemy, że

$$d_Y(f(x_n), f(x)) \leqslant c \cdot d_X(x_n, x) \xrightarrow{d_X} 0,$$

czyli

$$f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x).$$

W związku z powyższym f jest ciągła na mocy Definicji 7.5.

□

Przykład.
Rozpatrzmy funkcję $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R}^2, d_E)$ zdefiniowaną następująco:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Chcemy sprawdzić, czy funkcja f jest Lipschitza. Mamy:

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_E(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)) = \sqrt{((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))^2 + ((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2))^2}$$

oraz

$$c \cdot d_X(x, y) = c \cdot d_E((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = c \cdot \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Stosując podstawienie $y_i = x_i + t_i$ dla $i = 1, 2$ sprawdzimy, czy dla pewnej stałej $c > 0$ zachodzi nierówność

$$d_E(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d_E(x, y),$$

czyli

$$\sqrt{((x_1 + x_2) - (x_1 + t_1 + x_2 + t_2))^2 + ((x_1 - x_2) - (x_1 + t_1 - x_2 - t_2))^2} \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \sqrt{(x_1 - x_1 - t_1)^2 + (x_2 - x_2 - t_2)^2}.$$

Po podniesieniu obu stron nierówności do kwadratu, otrzymujemy:

$$(-t_1 - t_2)^2 + (-t_1 + t_2)^2 \leqslant c^2 \cdot ((-t_1)^2 + (-t_2)^2)$$

$$t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2 + t_1^2 + 2t_1t_2 + t_2^2 \leqslant c^2 \cdot (t_1^2 + t_2^2)$$

$$2t_1^2 + 2t_2^2 \leqslant c^2 \cdot (t_1^2 + t_2^2)$$

$$2(t_1^2 + t_2^2) \leqslant c^2 \cdot (t_1^2 + t_2^2).$$

Zatem powyższa funkcja spełnia warunek Lipschitza z parametrem $c = \sqrt{2}$.

Przypomnijmy, że funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **surjekcją** (mówimy, że jest "na"), gdy

$$\forall_{y \in Y} \, \exists_{x \in X} \, f(x) = y.$$

Uwaga 7.12.
Jeśli funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła, to funkcja $g : X \to f[X]$ jest **ciągłą surjekcją**.

Pokażemy teraz, że pewne własności topologiczne są przenoszone przez funkcje ciągłe.

Twierdzenie 7.13.
*Niech odwzorowanie $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ będzie **ciągłe**. Wtedy:*

1. *Obraz zbioru **zwartego** przez odwzorowanie f jest zbiorem zwartym.*
2. *Obraz zbioru **spójnego** przez odwzorowanie f jest zbiorem spójnym.*
3. *Obraz zbioru **ośrodkowego** przez odwzorowanie f jest zbiorem ośrodkowym.*

*W szczególności, dla funkcji f będącej **ciągłą surjekcją**, zachodzi:*
Jeśli przestrzeń (X, d_X) jest zwarta/ spójna/ ośrodkowa, to przestrzeń (Y, d_Y) jest (odpowiednio) zwarta/ spójna/ ośrodkowa.

Dowód.

1. Pokażemy najpierw, że przekształcenia ciągłe zachowują zwartość.
   Weźmy $A \subseteq X$ zwarty oraz dowolny ciąg $y_n \in f[A]$, czyli dla każdego n istnieje $x_n \in X$ takie, że $f(x_n) = y_n$. Ponieważ A jest zwarty, to istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{n_k}$ zbieżny do $x \in A$ (względem metryki d_X).
   Ponadto f jest ciągła, zatem skoro $\{x_{n_k}\}_{n_k} \xrightarrow{d_X} x$, to $f(x_{n_k}) \xrightarrow{d_Y} f(x) \in f[A]$. Stąd otrzymujemy:
   $$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow{d_Y} f(x).$$
   Zatem znaleźliśmy podciąg $\{y_{n_k}\}_{n_k} \subseteq \{y_n\}_n$, ktory jest zbieżny w $f[A]$, czyli $f[A]$ jest zwarty z definicji.

2. Udowodnimy teraz, że przekształcenia ciągłe zachowują spójność.
   Weźmy dowolny A spójny. Załóżmy nie wprost, że $f[A]$ jest niespójna. Wtedy istnieją niepuste zbiory A_1, A_2 otwarte i rozłączne, takie że
   $$f[A] = A_1 \mathbin{\dot\cup} A_2.$$
   Mamy
   $$A \subseteq f^{-1}[A_1 \mathbin{\dot\cup} A_2] = f^{-1}[A_1] \mathbin{\dot\cup} f^{-1}[A_2],$$

a stąd

$$A = A \cap (f^{-1}[A_1] \cup f^{-1}[A_2]) = (A \cap f^{-1}[A_1]) \cup (A \cap f^{-1}[A_2]).$$

Z Definicji 7.7 otrzymujemy, że $f^{-1}[A_1]$ oraz $f^{-1}[A_2]$ są otwarte.
Zatem $A \cap f^{-1}[A_1]$ i $A \cap f^{-1}[A_2]$ są otwartymi podzbiorami A jako podprzestrzeni przestrzeni X. Przedstawiliśmy A jako rozłaczną sumę jej niepustych podzbiorów otwartych, zatem A nie jest przestrzenią spójną, co jest sprzeczne z założeniem.

3. Na koniec pokażemy, że przekształcenia ciągłe zachowują ośrodkowość.
Załóżmy, że zbiór X jest ośrodkowy z ośrodkiem Q. Chcemy pokazać, że wówczas $f[Q]$ jest ośrodkiem w $f[X]$, czyli $f[Q]$ jest gęsty i przeliczalny w $f[X]$.

Ponieważ Q jest przeliczalny, to $|Q| \leqslant \aleph_0$. Stąd otrzymujemy

$$|f[Q]| \leqslant |Q| \leqslant \aleph_0,$$

zatem zbiór $f[Q]$ także jest przeliczalny.

Pokażemy teraz, że $f[Q]$ jest gęsty w $f[X]$.
Niech $y \in f[X]$. Istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$. Zbiór Q jest ośrodkiem w X, czyli $Cl(Q) = X$. Zatem z Twierdzenia 5.24 istnieje ciąg $q_n \in Q$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} q_n = x.$$

Wtedy, z ciągłości f, mamy

$$\lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = f(x) = y.$$

Dla każdego $y \in f[X]$ znaleźliśmy ciąg $f(q_n) \in f[Q]$ taki, że $f(q_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$. Zatem $f[Q]$ jest gęsty w $f[X]$.

$\square$

Uwaga 7.14.
Z powyższego twierdzenia można korzystać przy pokazywaniu nieciągłości funkcji. Jeśli obraz przez funkcję f zbioru zwartego/ spójnego/ ośrodkowego nie jest (odpowiednio) zwarty/ spójny/ ośrodkowy, to funkcja f nie może być ciągła.

Przykład 7.15.
Funkcja

$$f : ([-1,1], d_E) \to (\{-1,0,1\}, d_D)$$

zdefiniowana wzorem

$$f(x) = sgn(x)$$

jest surjekcją, więc aby zbadać jej ciągłość możemy skorzystać z Twierdzenia 7.13. Zauważmy, że przestrzeń $([-1, 1], d_E)$ jest spójna, natomiast przeciwdziedzinę $\{-1, 0, 1\}$ możemy zapisać jako sumę rozłącznych zbiorów otwartych (względem metryki d_D) jak poniżej:

$$\{-1, 0, 1\} = \{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\}.$$

To oznacza, że przestrzeń $(\{-1, 0, 1\}, d_D)$ nie jest spójna, zatem f nie jest ciągła, ponieważ nie zachowuje spójności.

Fakt 7.16.

Funkcja ciągła f ze zbioru zwartego A w liczby rzeczywiste przyjmuje swoje kresy, czyli istnieją a_0, a_1, takie że

$$\sup_{a\in A} f(a) = f(a_0) \textit{ oraz } \inf_{a\in A} f(a) = f(a_1).$$

Dowód.

Zbiór $f[A]$ jest zwarty, czyli w szczególności ograniczony. Stąd kres dolny i kres górny zbioru $f[A]$ są dobrze określone. Ponadto $f[A]$ jest domknięty. Pokażemy teraz, że $\sup_{a\in A} f(a) \in f[A]$. Ponieważ $\sup_{a\in A}$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A, mamy

$$\forall_n \exists_{a_n \in f[A]} \sup_{a\in A} f(a) - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup_{a\in A} f(a).$$

Skoro $f[A]$ jest domknięty, to na mocy Twierdzenia 5.24 mamy

$$\sup_{a\in A} f(a) = \lim_{n\to\infty} a_n \in f[A],$$

a stąd

$$\exists_{a_0\in A}\ f(a_0) = \sup_{a\in A} f(a).$$

W analogiczny sposób udowodnić można, że istnieje również $a_1 \in A$ takie, że

$$\inf_{a\in A} f(a) = f(a_1).$$

□

7.1 Łukowa spójność

Mając do dyspozycji pojęcie ciągłości możemy zdefiniować tzw. łukową spójność. Jest to własność mocniejsza niż spójność, ale często łatwiejsza do sprawdzenia.

Definicja 7.17.

Mówimy, że zbiór X jest **spójny łukowo**, jeśli każde dwa punkty zbioru X można połączyć **krzywą ciągłą**. To znaczy dla każdych $x, y \in X$ istnieje odcinek domknięty $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ i ciągła funkcja

$$\gamma : [a, b] \to X$$

taka, że

$$\gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y$$

(możemy przyjąć $a = 0, b = 1$).

Przykłady.
Zbiory przedstawione poniżej są spójne łukowo.

1. Kula $A = \{(x, y) : (x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 1\}$ w $(\mathbb{R}^2, d_R)$.
2. Odcinek $B = [1, 3] \times \{1\}$ w $(\mathbb{R}^2, d_M)$.
3. Parabola $C = \{(x, x^2+1) :\ x \in \mathbb{R}\}$ w $(\mathbb{R}^2, d_T)$.

Uwaga 7.18.
Zbiór łukowo spójny jest spójny, ale implikacja przeciwna nie musi zachodzić.

Dowód.
Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną. Załóżmy nie wprost, że X nie jest spójna. Wtedy istnieją niepuste, otwarte zbiory A, B takie, że $X = A \cupdot B$.
Niech $x \in A$ oraz $y \in B$. Z łukowej spójności istnieje ciągła funkcja $\gamma : [0, 1] \to X$ taka, że

$$\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y.$$

Mamy

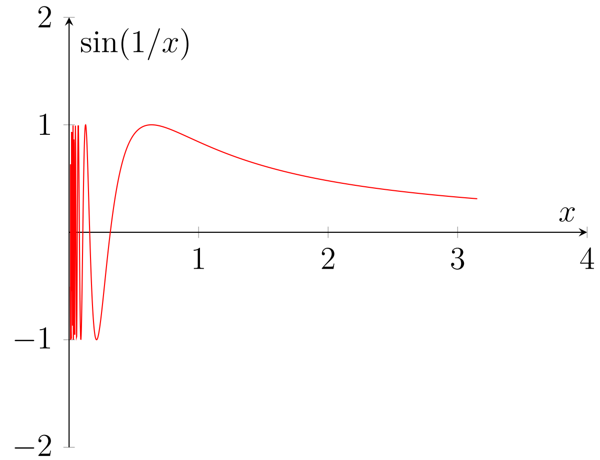
$$[0, 1] = \gamma^{-1}[X] = \gamma^{-1}[A \cupdot B] = \gamma^{-1}[A] \cupdot \gamma^{-1}[B].$$

Z ciągłości funkcji γ (Definicja 7.7) przeciwobrazy $\gamma^{-1}[A]$ i $\gamma^{-1}[B]$ są otwarte, co daje sprzeczność z założeniem, ponieważ odcinek $[0, 1]$ jest spójny.

$\square$

Przykład (Zbiór spójny, który nie jest łukowo spójny).

$$A = \{(x,\ sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leqslant \pi\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$



Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$A_1 = \{(x,\ sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leqslant \pi\} \text{ oraz } A_2 = \{0\} \times [-1, 1].$$

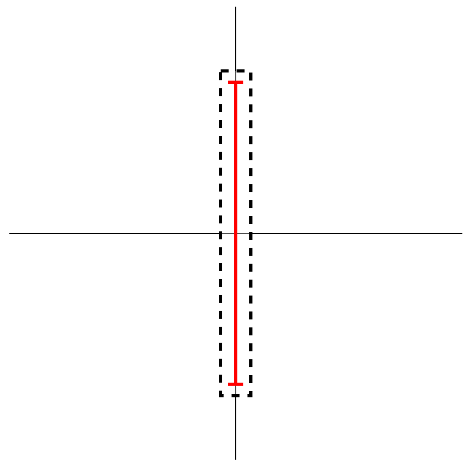
Jeśli A nie byłby spójny, wówczas zawierałby się w sumie otwartych zbiorów rozłącznych $U_1 \cup U_2$ w taki sposób, że $A \cap U_1 \neq \emptyset$ oraz $A \cap U_2 \neq \emptyset$. Ponieważ zarówno A_1, jak i A_2 są spójne (dowolne dwa punkty każdego z danych podzbiorów są połączone krzywą ciągłą), mamy

$$A_1 \subset U_1 \cup U_2 \Longrightarrow A_1 \subset U_1 \vee A_1 \subset U_2$$

oraz

$$A_2 \subset U_1 \cup U_2 \Longrightarrow A_2 \subset U_1 \vee A_2 \subset U_2.$$

Bez straty ogólności, załóżmy, że $A_1 \subset U_1$. Wówczas $A_2 \subset U_2$, czyli odcinek $\{0\} \times [-1, 1]$ możemy otoczyć zbiorem otwartym U_2.



Rysunek 30: Odcinek A_2 zawarty w otwartym zbiorze U_2.

Ponieważ krzywa A_1 jest dowolnie blisko odcinka A_2, jej część musi zawierać się w zbiorze U_2. Stąd $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, czyli zbiór A jest spójny, mimo że nie jest łukowo spójny.

7.2 Homeomorficzność

Definicja 7.19.
Przekształcenie $f : (X, d_X) \longmapsto (Y, d_Y)$ nazywamy **homeomorfizmem**, jeśli spełnione są następujące warunki:

- f jest ciągłe;
- f jest bijekcją;
- f^{-1} jest ciągłe.

Mówimy, że przestrzenie (X, d_X) oraz (Y, d_Y) są **homeomorficzne**, gdy istnieje między nimi homeomorfizm.

Uwaga.
Jeżeli przestrzenie metryczne są homeomorficzne, to z topologicznego punktu widzenia są takie same.

Przykład 7.20.
Sprawdzimy, czy funkcja $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, d_E)$ zdefiniowana wzorem

$$f(x, y) = (x^5, e^y)$$

jest homeomorfizmem.

1° Ciągłość f.

Wprowadzając oznaczenia

$$f_1(x,y) = x^5 \text{ oraz } f_2(x,y) = e^y$$

mamy

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)).$$

Aby zbadać ciągłość funkcji f sprawdzimy, czy ciągłe są zarówno f_1 jak i f_2. Weźmy ciąg $(x_n, y_n) \xrightarrow{d_E} (x,y)$. Otrzymujemy

$$f_1(x_n, y_n) = (x_n)^5 \xrightarrow{d_E} x^5 = f_1(x,y)$$

oraz

$$f_2(x_n, y_n) = e^{y_n} \xrightarrow{d_E} e^y = f_2(x,y).$$

Stąd dla $(x_n, y_n) \xrightarrow{d_E} (x,y)$ mamy

$$f(x_n,y_n) = (f_1(x_n,y_n), f_2(x_n,y_n)) \xrightarrow{d_E} (f_1(x,y), f_2(x,y)) = f(x,y),$$

czyli f jest ciągła.

2° Funkcja f jest bijekcją.

Wystarczy pokazać, że istnieje funkcja odwrotna do f. W tym celu weźmy punkt $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Dla (u,v) w obrazie funkcji f mamy:

$$u = x^5, \text{ czyli } x = \sqrt[5]{u}$$

oraz

$$v = e^y, \text{ czyli } y = ln(v).$$

Stąd funkcję odwrotną zadamy następująco:

$$f^{-1}(u,v) = (\sqrt[5]{u}, ln(v)).$$

Sprawdzimy, że rzeczywiście jest to dobrze zdefiniowana funkcja odwrotna do f poprzez pokazanie, że złożenia $f(f^{-1}(u,v))$ oraz $f^{-1}(f(x,y))$ dają identyczność. Mamy

$$f(f^{-1}(u,v)) = f(\sqrt[5]{u}, ln(v)) = ((\sqrt[5]{u})^5, e^{ln(v)}) = (u,v)$$

oraz

$$f^{-1}(f(x,y)) = f^{-1}(x^5, e^y) = (\sqrt[5]{x^5}, ln(e^y)) = (x,y).$$

3° Ciągłość f^{-1}.
Przyjmując, że
$$f_1^{-1}(u,v) = \sqrt[5]{u} \text{ oraz } f_2^{-1}(u,v) = ln(v)$$
mamy
$$f^{-1}(u,v) = (f_1^{-1}(u,v), f_2^{-1}(u,v)).$$
Weźmy ciąg $(u_n, v_n) \xrightarrow{d_E} (u,v)$. Otrzymujemy
$$f_1^{-1}(u_n,v_n) = \sqrt[5]{u_n} \xrightarrow{d_E} \sqrt[5]{u} = f_1^{-1}(u,v)$$
oraz
$$f_2^{-1}(u_n,v_n) = ln(v_n) \xrightarrow{d_E} ln(v) = f_2^{-1}(u,v).$$
Stąd dla $(u_n, v_n) \xrightarrow{d_E} (u,v)$ mamy
$$f^{-1}(u_n,v_n) = (f_1^{-1}(u_n,v_n), f_2^{-1}(u_n,v_n)) \xrightarrow{d_E} (f_1^{-1}(u,v), f_2^{-1}(u,v)) = f^{-1}(u,v),$$
czyli f^{-1} jest ciągła.

Zatem pokazaliśmy, że funkcja f jest homeomorfizmem.

Przykład 7.21.
Sprawdzimy, czy funkcja $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R}^2, d_C)$ zdefiniowana wzorem
$$f(x,y) = (x^2, y^2)$$
jest homeomorfizmem.

Zbadamy ciągłość funkcji f.
Weźmy ciąg $a_n \in (\mathbb{R}^2, d_E)$ postaci
$$a_n = (1, 1 + \frac{1}{n}).$$
W metryce euklidesowej granicą tego ciągu jest punkt $(1,1)$. Sprawdzimy, czy zachodzi
$$f(1, 1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{d_C} f(1,1),$$
czyli
$$d_C(f(1, 1 + \frac{1}{n}), f(1,1)) \to 0.$$
Mamy
$$d_C(f(1, 1 + \frac{1}{n}), f(1,1)) = d_C((1^2, (1 + \frac{1}{n})^2), (1^2, 1^2)) = d_C((1, 1 + \frac{2n+1}{n^2}), (1,1)) =$$

$$= \sqrt{1^2 + (1 + \frac{2n+1}{n^2})^2} + \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2 + \frac{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{n^4}} + \sqrt{2} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2} + \sqrt{2} \neq 0.$$

Zatem f nie jest ciągła, czyli nie jest homeomorfizmem.

Uwaga.
Funkcja, która jest ciągła, nie musi być homeomorfizmem.

Przykład 7.22.
Pokażemy, że funkcja $f : (\mathbb{R}^2, d_R) \to (\mathbb{R}, d_E)$ zdefiniowana wzorem

$$f(x, y) = y$$

jest ciągła, ale nie jest homeomorfizmem.

Ciągłość f można sprawdzić tak samo jak w Przykładzie 7.20, ale zastosujemy tu inną metodę opartą na Definicji 7.7. Robimy to by pokazać, że to podejście może być równie efektywne. Pokażemy najpierw, że przeciwobraz przez f zbioru otwartego $U \subset (\mathbb{R}, d_E)$ jest otwarty. Poprzez I_s oznaczmy odcinek otwarty wokół $s \in U$. Ponieważ przeciwdziedziną f jest cała prosta rzeczywista, odcinki otwarte utożsamiamy z kulami otwartymi. Zatem

$$U = \bigcup_{s \in U} I_s.$$

Mamy

$$f^{-1}[U] = f^{-1}[\bigcup_{s \in U} I_s] = \bigcup_{s \in U} f^{-1}[I_s].$$

Z definicji przeciwobrazu otrzymujemy:

$$f^{-1}[I_s] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) \in I_s\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in I_s\} = \mathbb{R} \times I_s.$$

Stąd

$$f^{-1}[U] = \bigcup_{s \in U} \mathbb{R} \times I_s.$$

Istotnie, $\mathbb{R} \times I_s$ jest otwartym podzbiorem płaszczyzny z metryką d_R (patrz Przykład 5.2), zatem suma $\bigcup_{s \in U} \mathbb{R} \times I_s$ jest otwarta. W związku z tym f jest ciągła na mocy Definicji 7.7.
Zauważmy, że f nie jest bijekcją, ponieważ nie jest różnowartościowa. Na przykład

$$f(1, 5) = 5 = f(7, 5).$$

Zatem f nie jest homeomorfizmem.

Literatura

[1] Paweł Krupski *Wstęp do topologii (A), skrypt dla studentów*
`http://math.uni.wroc.pl/sites/default/files/krupski.pdf`

[2] Stanisław Betley, Józef Chaber, Elżbieta Pol i Roman Pol
Topologia I, wykłady i zadania, październik 2020
`http://duch.mimuw.edu.pl/ betley/wyklad1/topologia.pdf`

[3] Kazimierz Kuratowski *Rachunek różniczkowy i całkowy: funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2008