Lista 10: Całka Lebesgue'a

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

W poniższych zadaniach zakładamy, że $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, czyli $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ jest σ-ciałem, a μ dowolną ustaloną miarą na $(X, \mathcal{A})$. λ oznacza miarę Lebesgue'a, δ_x oznacza miarę Diraca (skupioną w punkcie x).

1. Rozważmy zbiory $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{A}$ takie, że $A_1 \cap A_3 = \emptyset$, $A_1 \cap A_2 \cap A_4 = \emptyset$ i funkcję
$$f = a_1\chi_{A_1} + ... + a_4\chi_{A_4}.$$
Zapisać f w postaci
$$f = \sum_{i=1}^{n} b_j\chi_{B_j},$$
gdzie $B_i \cap B_j = \emptyset$, dla $i \neq j$.

2. Dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ określonej na $[0, 1]$ ($f(0) = \infty$) znajdź ciąg funkcji prostych s_n takich, że
$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x).... \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

3. Dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ określonej na $[1, \infty)$ znajdź ciąg funkcji prostych s_n takich, że
$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x).... \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

4. Dla funkcji $f(k) = k$ określonej na $\mathbb{N}$ znajdź ciąg funkcji prostych s_n takich, że
$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x).... \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

5. Załóżmy, że f jest funkcją prostą i dla każdego $x \in X$, $a \leq f(x) \leq b$. Pokaż, że
$$a\mu(X) \leq \int_X f \, d\mu \leq b\mu(X)$$
wprost z definicji, nie korzystając z faktów udowodnionych na wykładzie.

6. Niech $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $0 \leq f \leq M$ będzie funkcją mierzalną, a $A_{n,k} = \{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}$, $1 \leq k \leq M2^n$. Niech
$$s_n = \sum_{k=1}^{M2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{A_{n,k}}.$$
Pokaż, że dla każdego n, $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

7. Obliczyć całkę z funkcji prostej nieujemnej na zbiorze A względem miary Lebesgue'a, gdy:

   (a) $A = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{jeśli } x \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 3, & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

   (b) $A = [-10, 10)$, $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_1} k^2 1_{[k, k+\frac{1}{2})}(x)$;

   (c) $A = [0, \infty)$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1_{[k,k+1)}(x)}{3^k}$, $n \in \mathbb{N}$;

   (d) $A = [0, n]$, $f(x) = [x]$, $n \in \mathbb{N}$;

   (e) $A = [0, e^{10}]$, $f(x) = [\ln x]$;

   (f) $A = [0,1]$, $f(x) = [n\,x]$, $n \in \mathbb{N}$;

8. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}} [x] \mathrm{d}\mu$ oraz $\int_{[-3,3]} \ln(x+3)\mu$, gdzie $\mu = \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-2}$.

9. Wykazać, że dla dowolnej funkcji μ-całkowalnej f i dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{A}$ rozłącznych ($A \cap B = \emptyset$) zachodzi
$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

10. Wykazać, że jeśli dla funkcji nieujemnej mierzalnej f całka $\int_X f d\mu$ jest równa zero, to $f = 0$ μ-prawie wszędzie. *Wskazówka:* Zauważyć, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $f \geq f_n = \frac{1}{n} 1_{B_n}$, gdzie $B_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$.

11. Niech $A_n = (3^n, 3^n + 2n) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ oraz $t > 0$. Definiujemy $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz funkcję
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^n 1_{A_n}(x).$$

   (a) Uzasadnić, że funkcja f jest mierzalna i wyznaczyć f^+ i f^- dla funkcji f.

   (b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcja f jest całkowalna? Obliczyć $\int_A f d\lambda$.
   Wskazówka: ciąg funkcji aproksymujących można wyznaczyć biorąc skończoną liczbę wyrazów szeregu definiującego funkcję.

12. Obliczyć całki Lebesgue'a $\int_A f d\lambda$ (bez przybliżania funkcjami prostymi), jeśli:

   (a) $A = \{n \in \mathbb{N} : n^3 + 2n \leq 50\}$,
   $f(x) = xe^{x^2-1}$;

   (b) $A = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(|x|+1), & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}, \\ (1+x^2)^{-1}, & \text{jeśli } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

13. Rozważamy przestrzeń $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ z miarą liczacą, tzn. $\nu(A) = \begin{cases} n, & \text{gdy } |A| = n \\ \infty, & \text{gdy } |A| = \infty \end{cases}$.
   Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{N}} (x + x^2) \mathrm{d}\nu$. *Wskazówka:* Oszacować funkcję podcałkową od dołu przez funkcję prostą, której całkę łatwo policzyć.