Lista 11: Twierdzenia całkowe

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

1. Załóżmy, że umiemy pokazać następujący fakt. Niech f bedzie funkcją prostą, $\mu(X)$ jest skończona, $a \leq f \leq b$, to
$$a\mu(X) \leq \int_x f \ d\mu \leq b\mu(X).$$
Udowodnić to samo dla dowolnej funkcji mierzalnej f nieujemnej stosując schemat z wykładu. Tzn. : Niech f bedzie nieujemną funkcją mierzalną, $\mu(X)$ jest skończona, $a \leq f \leq b$, to
$$a\mu(X) \leq \int_x f \ d\mu \leq b\mu(X).$$

2. Załóżmy, że umiemy pokazać następujący fakt. Niech f bedzie funkcją prostą, $f = 0$ μ- prawie wszędzie to $\int_X f \ d\mu = 0$. Udowodnić to samo dla dowolnej funkcji mierzalnej f nieujemnej stosując schemat z wykładu. Tzn. : Niech f bedzie nieujemną funkcją mierzalną, $f = 0$ μ-prawie wszędzie to
$$\int_X f \ d\mu = 0.$$

3. Obliczyć poniższe granice, powołując się na odpowiednie twierdzenia graniczne dla całki
$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sin nx}{x^2 + nx} d\lambda(x) \quad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{2n^3x + 5n + 4}{n^3x + 2n} d\lambda(x), \quad \text{(iii)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(1 + \frac{x}{n})} d\lambda(x).$$

4. Wykazać, że
$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{[n,n+1]} d\lambda < \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[n,n+1]} d\lambda,$$
gdzie $\mathbf{1}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A. Wyjaśnić, dlaczego fakt ten nie stoi w sprzeczności ani z twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej ani z twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

5. Rozważając przestrzeń $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\nu =$ miara licząca na $\mathbb{N}$ i funkcje $f_n(k) = \frac{1}{n} 1_{\{1,2,\ldots,n\}}(k)$, sprawdzić, że założenie o ograniczoności w twierdzeniu Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej jest istotne.

6. (Twierdzenie Lebesgue'a w wersji dla szeregów) Niech $(f_n)_n$ będzie takim ciągiem funkcji całkowalnych, że $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| d\mu < \infty$. Udowodnić, że szereg $\sum_n f_n$ jest zbieżny prawie wszędzie i
$$\int_X \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu.$$

7. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda$, jeśli $f = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-3)^n \mathbf{1}_{A_n}$, $A_n = (n, n + \frac{1}{9^n})$.

8. Opisz przestrzeń miarową (X, Σ, μ) związaną z rzutem kostką i przestrzeń miarową (Y, Π, ν) związaną z rzutem monetą. Opisz miare produktową $\mu \otimes \nu$. Z jakimi wydarzeniami losowymi (zdarzeniami elementarnymi) jest ona związana?

9. Oblicz miarę $\lambda_2(A)$ jesli

   (a) $A = [0,1] \times \{0,1\}$ $\qquad$ $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$.

10. Rozpatrujemy przestrzeń $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ z σ-ciałem $Bor(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i miarą $\lambda \otimes \mu$, gdzie oznacza 1-wymiarowa miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, μ – miarę liczącą na $\mathbb{N}$. Oblicz miarę A, gdzie

    (a) $A = [0,1] \times \{0,1\}$ $\qquad$ $A = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : n \leq m\}$.

11. Uzasadnić, że $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ oraz wykazać, że miara produktowa dwóch miar liczących na $\mathbb{N}$ jest miarą liczącą na $\mathbb{N}^2$.

12. Rozpatrujemy przestrzeń $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ z σ-ciałem $Bor(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$; λ oznacza 1-wymiarowa miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, ν – miarę liczącą na $\mathbb{N}$, δ_a - miarę Diraca w a (na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{N}$). Sprawdzić, czy:

    (a) $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$,
    (b) $\delta_a \otimes \nu(A) = |A_a|$, gdzie $|A_a|$ oznacza liczność x-przekroju zbioru A w punkcie a.
    (c) $\lambda \otimes \lambda(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \in \mathbb{Q}\}) = 1$,
    (d) $\lambda \otimes \nu(\{(x,m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : x \leq m\}) = \infty$.

13. Niech $X = Y = [0,1]$, λ oznacza miarę Lebesgue'a na X, ν oznacza miarę liczącą na Y. Definiujemy funkcję
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$$
    Sprawdzić, że f jest funkcją mierzalną oraz że całki iterowane $\int_X \int_Y f(x,y) d\nu(y) d\mu(x)$ i $\int_Y \int_X f(x,y) d\mu(x) d\nu(y)$ nie są sobie równe. Dlaczego?

14. Korzystając z twierdzenia Tonellego, obliczyć całkę
$$\int_A \frac{1}{(2-x)(y+1)} d\lambda_2(x,y),$$
    gdy $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.