Lista 1: Przestrzenie metryczne i kule

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

1. Sprawdzić, czy poniższe funkcje są metrykami na zbiorze X:

   (a) $d(x,y) = |7^x - 7^y|,\ X = \mathbb{R}$; (b) $d(x,y) = |3\sqrt{x} - 4\sqrt{y}|,\ X = [0,+\infty)$;

   (c) $d(n,m) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|,\ X = \mathbb{N}_1$; (d) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1| + |x_2|$, $X = \mathbb{R}^2$.

2. Niech $X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$. Przyjmujemy oznaczenia

$$d_T(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \ \text{(metryka taksówkowa)},$$
$$d_E(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \ \text{(metryka euklidesowa)},$$
$$d_M(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \ \text{(metryka maksimum)}.$$

   (a) Wykazać, że d_T jest metryką na $\mathbb{R}^2$.

   (b) Wykazać, że dla dowolnych punktów $x, y \in \mathbb{R}^2$ zachodzą nierówności

$$d_M(x,y) \le d_E(x,y) \le d_T(x,y) \le 2d_M(x,y).$$

   (c) Wywnioskować stąd, że d_T, d_E, d_M są parami równoważne.

3. Zapisać wzór na liczenie odległości w metryce rzeka d_R i sprawdzić, że faktycznie jest to metryka.

4. (*Poniższe zadanie pokazuje, jak można przenieść metrykę z jednego zbioru na inny, jest to tzw. transport metryki*) Niech X będzie niepustym zbiorem, (Y,d) – przestrzenią metryczną, a $f : X \to Y$ – injekcją (funkcją różnowartościową). Sprawdzić, że $d_f(x,y) := d(f(x), f(y))$ jest metryką na X.

5. Wyznaczyć kule $K(2, \frac{1}{2})$, $K(1,4)$, $K(0,1)$, $\overline{K}(0,1)$, $\overline{K}(1,1)$, $\overline{K}(2,4)$, w przestrzeni (X,d), gdzie $X = [0,3)$, $d(x,y) = |x-y|$. Na podstawie nabytego doświadczenia odpowiedzieć na pytania:

   (a) Czy dwie kule (otwarte) o różnych środkach mogą być sobie równe?

   (b) Czy kula otwarta może być równa kuli domkniętej o tym samym środku i tym samym promieniu?

   (c) Czy kula otwarta może być równa kuli domkniętej o nie tym samym środku i nie tym samym promieniu?

6. Narysować $K((0,0),1)$ i $K((-1,2),5)$ na płaszczyźnie z metryką euklidesową, taksówkową, maksimum, dyskretną, rzeka i centrum.

7. (*To zadanie jest bardzo ważne. Powinniście z niego zapamiętać, jak wyglądają bardzo małe kule w metryce rzeka i centrum.*) Jakie kształty mogą mieć kule w metrykach rzeka i centrum? Od czego one zależą? Jak wyglądają te kule, jeśli założymy, że promień jest bardzo mały?

8. Dla metryki $d(n,m) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ na $X = \mathbb{N}_1$ wyznaczyć kule $K(10,3)$, $K(2, \frac{1}{3})$, $\overline{K}(m, \frac{1}{m})$ (m ustalone, naturalne).