Lista 4: Zbiory ograniczone. Ciągłość.

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

We wszystkich zadaniach zakładamy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną. Metrykę euklidesową oznaczamy d_E, metrykę taksówkową d_T, metrykę maximum d_M, metrykę rzeka d_R, metrykę centrum d_C, metrykę dyskretną d_D.

1. Obliczyć średnicę zbioru A w podanej metryce:

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 4\}$, $X = \mathbb{R}^2$, $d = d_M$;

   (b) $A = [1, 2] \times [1, 2]$, $X = \mathbb{R}^2$, $d = d_C$;

   (c) $A = [0, 1] \times \{1\}$, $X = \mathbb{R}^2$, $d = d_R$.

2. Podać przykład zbioru nieograniczonego w podanej przestrzeni lub uzasadnić, że nie istnieje: (a) $(\mathbb{R}^2, d_M)$, (b) $(\mathbb{R}^2, d_R)$, (c) $(\mathbb{R}^2, d_D)$.

3. Wykazać, że dla dowolnego $x \in X$ i $r \geq 0$ zachodzi nierówność

   $$\operatorname{diam} K(x, r) \leq 2r.$$

   Znaleźć przykład przestrzeni metrycznej, w której równość nie musi zachodzić.

4. Pokazać, że jeśli A jest ograniczony, to $\operatorname{diam} \operatorname{Cl}(A) = \operatorname{diam} A$. Czy $\operatorname{diam} \operatorname{Int}(A) = \operatorname{diam} A$ dla dowolnego zbioru A?

5. Wykazać, że zachodzą następujące własności przeciwobrazu: dla $A, B \subset X$, $f : X \to Y$,

   $$\text{(a)} \quad f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B], \qquad \text{(b)} \quad f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

6. Które z poniższych funkcji są ciągłe? czy są homeomorfizmami?

   (a) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto x_2 \in (\mathbb{R}, d_E)$,

   (b) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto x_2 \in (\mathbb{R}, d_D)$,

   (c) $f : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto (\ln(x_1^2), x_1 - x_2) \in (\mathbb{R}^2, d_E)$,

   (d) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1) \in (\mathbb{R}^2, d_C)$,

   (e) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1^3, e^{x_2}) \in (\mathbb{R}^2, d_E)$

   (f) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1^3 - x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2, d_E)$

   (g) $f : ((-\pi/2, \pi/2), d_E) \ni x \mapsto \tan x \in (\mathbb{R}, d_E)$

7. Czy przekształcenie

   $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1, \sin x_2) \in (\mathbb{R}^2, d_E)$

   jest Lipschitza? Czy jest homeomorfizmem?

8. Pokaż, że złożenie przekształceń Lipschitza ze stałymi Lipschitza c_1, c_2 jest przekształceniem Lipschitza ze stałą $c_1 c_2$.

9. Podać przykład pary metryk, dla których funkcja $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, d_1) \ni x \mapsto x \in (\mathbb{R}^2, d_2)$ jest ciągła, ale nie jest homeomorfizmem.

10. Wykazać, że jeśli metryki d_1 i d_2 na X są równoważne, to (X, d_1) i (X, d_2) są homeomorficzne.

11. Wykazać, że pierścień $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ i cylinder $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ (z metryką euklidesową) są homeomorficzne.

    Wskazówka: Zbadać własności funkcji

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right).$$