Lista 5: Zbiory zwarte, spójne, ośrodkowe

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

Metrykę euklidesową oznaczamy d_E, metrykę taksówkową d_T, metrykę maximum d_M, metrykę rzeka d_R, metrykę centrum d_C, metrykę dyskretną d_D.

1. Niech x_0 będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej (X, d). Pokaż, że funkcja $f : X \mapsto \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x) = d(x, x_0)$$
jest ciągła. W $\mathbb{R}$ rozważamy metrykę euklidesową.

2. Podaj przykład funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (w metryce d_E) i zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}$ takiego, że jego obraz $f(U)$ nie jest otwarty.

3. Pokaz, że złożenie funkcji ciągłych $f : (X, d_X) \mapsto (Y, d_Y)$ i $g : (Y, d_Y) \mapsto (Z, d_Z)$ jest funkcją ciągłą.

4. Niech $f : (X, d_X) \mapsto (Y, d_Y)$ będzie ciągła i "na". Załóżmy, że (X, d_X) jest ośrodkowa. Pokaż, że (Y, d_Y) też jest ośrodkowa.

5. Niech (X, d_1), (X, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi takimi, że $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in X$. Udowodnić, że jeśli (X, d_1) jest ośrodkowa, to (X, d_2) także.
   Wskazówka: pokazać, że jeśli A jest ośrodkiem w (X, d_1), to jest ośrodkiem także w (X, d_2).

6. Pokaż, że $(\mathbb{R}^2, d_T)$ jest ośrodkowa, a $(\mathbb{R}^2, d_R)$ nie jest.

7. Sprawdzić zwartość i spójność zbiorów:
   (a) $A = \{1 - 1/n \colon n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{1\}$ w $(\mathbb{R}, d_E)$; (b) $B = \{(x, \frac{1}{x^2+1}) \colon x \in \mathbb{R}\}$ w $(\mathbb{R}^2, d_E)$;
   (c) $C = \overline{K}_E((0, 3), 1)$ w $(\mathbb{R}^2, d_R)$; (d) $D = K_D((2, 0), 1)$ w $(\mathbb{R}^2, d_D)$.

8. Opisać wszystkie zbiory spójne na $\mathbb{R}$ z metryką dyskretną. Opisać wszystkie zbiory zwarte na $\mathbb{R}$ z metryką dyskretną. Czy dowolna kula domknięta w $(\mathbb{R}, d_D)$ będzie zbiorem zwartym? Czy istnieje w $(\mathbb{R}, d_D)$ zbiór domknięty i ograniczony, który nie jest zwarty?

9. Podaj przykład funkcji ciagłej $f : X \to Y$ (lub uzasadnij, że nie istnieje), dla której
   (a) przeciwobraz kuli domkniętej jest zbiorem otwartym;
   (b) obraz zbioru otwartego jest otwarty;
   (c) obraz zbioru zwartego jest nie jest domknięty;
   (d) obraz zbioru niespójnego jest spójny.

10. Niech (X, d_1), (X, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi takimi, że $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in X$. Udowodnić, że jeśli zbiór A jest zwarty w (X, d_1), jest zwarty także w (X, d_2).

11. Czy w dowolnej przestrzeni metrycznej zachodzą własności:
    (a) wnętrze zbioru spójnego jest zbiorem spójnym?

(b) przekrój zstępującego ciągu zbiorów spójnych jest spójny?

(c) domknięcie zbioru zwartego jest zbiorem zwartym?

(d) nadzbiór zbioru gęstego jest gęsty?

12. Czy istnieje przestrzeń metryczna X i zbiór A nietrywialny $(A \neq \emptyset,\ A \neq X)$:

(a) spójny i niezwarty?

(b) zwarty i niespójny?

(c) niespójny i nieograniczony?

(d) otwarty i gęsty?

13. Podać przykłady lub uzasadnić, że nie istnieje:

(a) przestrzeń ośrodkowa, która nie jest zwarta;

(b) przestrzeń nieośrodkowa i niespójna;

(c) trójka zbiorów rozłącznych i gęstych w $\mathbb{R}$.

14. Czy w poniższych przypadkach istnieje ciągła surjekcja z przestrzeni X na przestrzeń Y?

(a) $X = ([0,1], d_E)$, $Y = (\{(x, 2x-1) \colon x \in \mathbb{R}\}, d_E)$;

(b) $X = ([0,4], d_E)$, $Y = ([-3,1] \cup [2,3], d_E)$;

(c) $X = ([0,1], d_D)$, $Y = ([0,1], d_T)$;

(d) $X = ((0,1], d_E)$, $Y = (\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 3\}, d_E)$;

(e) $X = ([0,1], d_E)$, $Y = ([0,1] \times \{\pi\}, d_R)$;

Wskazówka. Wykorzystac własności obrazów przekształceń ciągłych.