
Lista 6: Zupełność

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

1. Czy przestrzeń X z metryką dyskretną jest zupełna? Opisać wszystkie zbiory zupełne w tej przestrzeni.
2. Sprawdzić, korzystając z odpowiedniego twierdzenia (a nie z definicji), zupełność zbiorów w (\mathbb{R}, d_E) lub (\mathbb{R}^2, d_E) :
(a) $A = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{1\}$ (b) $B = \{(x, \frac{1}{x^2+1}) : x \in \mathbb{R}\}$ (c) $C = K_E((0, 3), 1)$.

3. Czy przestrzeń metryczna (\mathbb{R}, ρ) , gdzie

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & x, y \in \mathbb{Q} \text{ lub } x, y \notin \mathbb{Q}, \\ |x| + |y|, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

jest zupełna?

4. Udowodnić, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną zupełną, to (X, d^*) , gdzie

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

też jest przestrzenią metryczną zupełną.

5. Wykazać, że jeśli ciąg w przestrzeni metrycznej (X, d) spełnia warunek $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$, to spełnia warunek Cauchy'ego.

Czy istnieje ciąg w \mathbb{R} taki, że $|x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0$, ale nie jest zbieżny (a tym bardziej nie jest Cauchy'ego)?

6. Pokaż, że (\mathbb{R}^2, d_C) jest zupełna. *Wskazówka. Niech x_n będzie ciągiem Cauchy'ego. Rozważmy prostą p_n przechodzącą przez 0 i x_n . Mamy dwa przypadki. Albo jest skończenie wiele takich prostych, albo nieskończenie wiele. W każdym przypadku znaleźć podciąg zbieżny. Wskazówka Jasia Czajkowskiego: ciąg prostych p_n ustala się od pewnego miejsca albo nie. W każdym przypadku pokazać, że cały x_n jest zbieżny.*

7. Podać przykład (o ile istnieje) przestrzeni metrycznej, która jest

- (a) zupełna, ale nie ośrodkowa;
- (b) ośrodkowa, ale nie zupełna;
- (c) zupełna i ośrodkowa, ale nie jest zwarta;