
Lista 7: σ -ciała zbiorów mierzalnych

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

1. Niech $(A_n)_n$ będzie ciągiem podzbiorów $\mathbb{R}$. Wykazać, że

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k > n} A_k = \{x \in \mathbb{R} : x \in A_k \text{ dla nieskończenie wielu } n\}$$
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k > n} A_k = \{x \in \mathbb{R} : \exists_{n_0} x \in A_k \text{ dla } k > n_0\}$$

2. Czy istnieje σ -ciało złożone z dokładnie jednego elementu? Dokładnie dwóch elementów? Dokładnie trzech elementów?
3. Sprawdzić, czy następujące rodziny są σ -ciałami:

- (a) $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}\}$.
(b) $X = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ jest ograniczony lub $X \setminus A$ jest ograniczony.
(c) $X = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ jest przeliczalny lub $X \setminus A$ jest przeliczalny.

4. Niech $A, B \subset X$ będą niepuste. Jak wygląda σ -ciało podzbiorów X generowane przez A i B , jeśli (a) $A \cap B = \emptyset$, (b) $A \cap B \neq \emptyset$?

5. Niech $X = [-3, 3]$. Znaleźć σ -ciała podzbiorów X generowane przez zbiory:

- (a) $(0, 1)$, (b) $\{-3\}, \{3\}$, (c) $(-1, 0) \cup (1, 3)$, $[1, 2)$.

6. Pokazać, że poniższe rodziny generują rodzinę zbiorów borelowskich:

- (a) rodzina przedziałów otwartych $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$,
(b) rodzina zbiorów postaci (a, ∞) , $a \in \mathbb{Q}$.

Z definicji rodzina zbiorów borelowskich generowana jest przez wszystkie otwarte.

7. Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie σ -ciałem i niech $B \subset X$ będzie niepustym zbiorem. Definiujemy

$$(a) \mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}, \quad (b) \mathcal{A}^B = \{A \in \mathcal{A} : A \subset B\}$$

Wykazać, że zarówno $\mathcal{A}_B$, jak i $\mathcal{A}^B$ są σ -ciałami jako rodziny podzbiorów B . Czy są także σ -ciałami jako rodziny podzbiorów X ?

8. Załóżmy, że $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą. Zbadać, czy prawdziwe są następujące własności:

- (a) $\mu(A) = \mu(B) \Rightarrow A = B$,
(b) $\mu(A) \leq \mu(B) \Rightarrow A \subset B$,
(c) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$,
(d) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$,

9. Niech X będzie zbiorem skończonym. Sprawdzić, że wzór $\mu(A) = \frac{|A|}{|X|}$ określa miarę probabilistyczną na $(X, \mathcal{P}(X))$. Probabilistyczna znaczy $\mu(X) = 1$