Lista 8: Miary

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

1. Niech $a = (a_n)_n$ będzie pewnym ciągiem liczb rzeczywistych. Na przestrzeni $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiujemy funkcję
$$\mu_a(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \sum_{n\in A} a_n, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$
   (a) Dla jakich $(a_n)_n$ μ_a jest miarą na $\mathbb{N}$?
   (b) Kiedy μ_a jest miarą skończoną? A kiedy σ-skończoną?
   (c) Dla jakich $(a_n)_n$ powyższy wzór definiuje miarę liczącą?

2. Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem oraz że mamy funkcję $f\colon X \to [0, \infty]$. Zdefiniujmy $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ wzorem
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sum\limits_{x\in A} f(x), & \text{jeśli } A \text{ jest co najwyżej przeliczalny,} \\ \infty, & \text{jeśli } A \text{ jest nieprzeliczalny.} \end{cases}$$
   Pokazać, że μ jest miarą.

3. Niech $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ będą miarami probabilistycznymi na X.
   (a) Wykazać, że dla $a, b > 0$ funkcja $\kappa = a\mu + b\nu$, czyli
$$\kappa(A) := a\mu(A) + b\nu(A), \quad A \in \mathcal{A},$$
   jest miarą na X.
   (b) Kiedy κ jest miarą probabilistyczną?
   (c) Czy funkcja $\mu(A) = \begin{cases} 0, & 2018 \notin A \text{ i } -2018 \notin A \\ 1, & (2018 \in A \text{ i } -2018 \notin A) \text{ lub } (2018 \notin A \text{ i } -2018 \in A) \\ 2, & 2018 \in A \text{ i } -2018 \in A \end{cases}$
   jest miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?

4. Czy dla każdego $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ zachodzi $\lambda(A) = \lambda(\mathrm{Int}(A))$? A $\lambda(A) = \lambda(\mathrm{Cl}(A))$?

5. Dana jest rodzina zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taka, że:
$$\text{(a)}\ \ A_n \in \mathcal{L}, \quad \text{(b)}\ \ A_{n+1} \subset A_n, \quad \text{(c)}\ \ \lambda(A_1) = 2018, \quad \text{(d)}\ \ \lambda(A_{n+1}) = \frac{5}{9}\lambda(A_n).$$
   Policzyć miarę Lebesgue'a zbioru $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

6. Podać przykład lub uzasadnić, że nie istnieje:
   (a) zbiór $A \subset \mathbb{R}$, który jest nieprzeliczalny i $\lambda(A) = 0$;

(b) zbiór $A \subset \mathbb{R}$, który jest nieograniczony i $\lambda(A) = 1$;

(c) zbiór $A \subset \mathbb{R}$ taki, że $\lambda(A) = 2$, $\lambda(\mathrm{Int}(A)) = 1$, $\lambda(\mathrm{Cl}(A)) = 2$,

(d) zbiór $A \subset \mathbb{R}$ taki, że $\lambda(\mathrm{Int}(A)) = 1$, $\lambda(\mathrm{Cl}(A)) = \infty$,

(e) zbiór otwarty V zawierający $A = [0, 1] \cup \{3\}$ i taki, że $\lambda(V \setminus A) < \varepsilon$.

7. Pokaż, że dla każdego zbioru borelowskiego i każdej liczby $a \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(A + a) = \lambda(A).$$

Uwaga: $A + a = \{x + a : x \in A\}$. Zacznij od sprawdzenia na odcinkach.