
Lista 9: Funkcje mierzalne i miara Lebesgue'a

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2019/2020

W zadaniach zakładamy, że X jest niepustym zbiorem, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ -ciałem, λ oznacza miarę Lebesgue'a.

1. Przez χ_A oznaczamy indykator (funkcję charakterystyczną) zbioru A . Funkcją prostą nazywamy funkcję postaci $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$.

(a) Sprawdzić, że zachodzą równości

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x), \quad \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \chi_B(x).$$

(b) Sprawdzić, że rodzina funkcji prostych jest zamknięta na kombinacje liniowe i mnożenie.

(c) Wykazać, że funkcja prosta $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$ (dodatkowo zakładamy, że $A_k \cap A_m = \emptyset$ dla $k \neq m$) jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ze zbiorów A_k jest mierzalny.

(d) Wykazać, że funkcja $|f|$, gdzie $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$ (dodatkowo zakładamy, że $A_k \cap A_m = \emptyset$ dla $k \neq m$) jest funkcją prostą.

2. Wykazać, że jeśli $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są $\mathcal{A}$ -mieralne, to zbiory $A = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$, $B = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ oraz $C = \{x \in X : f(x) \neq 3\} \cap \{x \in X : g(x) < \infty\}$ należą do $\mathcal{A}$.

3. Pokazać, że jeśli $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest $\mathcal{A}$ -mieralna i $A \in \mathcal{A}$, to funkcja

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

jest także $\mathcal{A}$ -mieralna.

4. Pokazać, że poniższe funkcje są borelowskie. Które z nich są funkcjami prostymi?

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{sgn}(x), & f_2(x) &= [x], & f_3(x) &= \begin{cases} x^2 + \pi, & x < 1 \\ \ln(x) - x, & x \geq 1 \end{cases} \\ f_4(x) &= \begin{cases} e^x, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}, & f_5(x) &= \begin{cases} x^2, & \sin x > 0 \\ 2, & \sin x = 0 \\ \cos x, & \sin x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5. Niech $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ będzie ciągiem funkcji $\mathcal{A}$ -mieralnych. Sprawdzić, że następujące zbiory należą do $\mathcal{A}$:

- (a) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 0$ dla wszystkich n ;
- (b) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 0$ dla prawie wszystkich n ;
- (c) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 0$ dla nieskończenie wielu n ;
- (d) zbiór $x \in X$ takich, że $\sup_n f_n(x) \geq 0$;
- (e) zbiór $x \in X$ takich, że ciąg $(f_n(x))_n$ jest (słabo) rosnący;