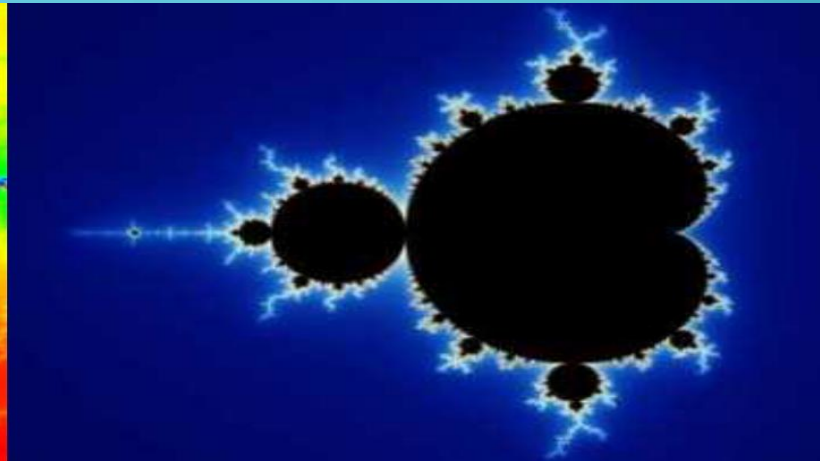
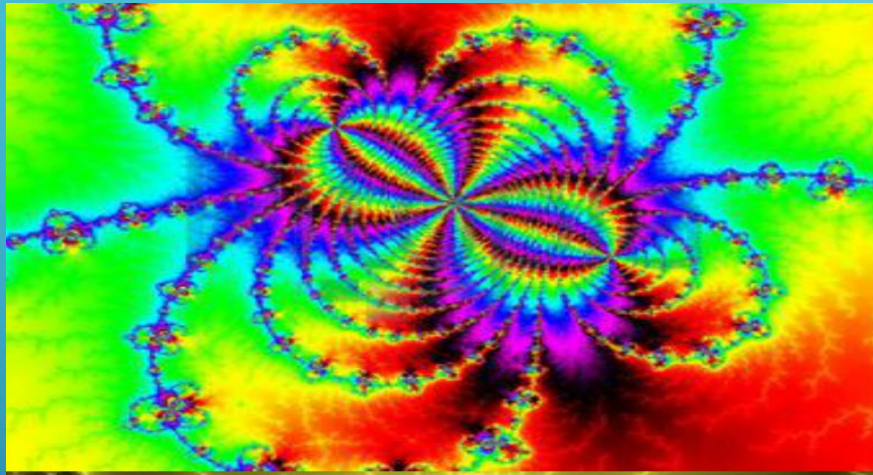


# FRAKTALE, CZYLI KIEDY MATEMATYKA

## STAJE SIĘ PIĘKNA



# Co to jest fraktal?

Fraktal, według definicji encyklopedycznej to obiekt, dla którego wymiar fraktalny (Hausdorffa-Besicovitcha) jest większy od wymiaru topologicznego.

Według definicji „potocznej” fraktal jest obiektem samopodobnym – tzn. takim, którego części są podobne do całości – lub „nieskończenie subtelny” czyli taki, który ukazuje subtelne detale nawet w wielokrotnym powiększeniu danego obrazu.

Ze względu na olbrzymią różnorodność przykładów matematycy obecnie unikają podawania ścisłej definicji i proponują określać fraktal jako zbiór, który posiada wszystkie poniższe charakterystyki albo przynajmniej ich większość:

- ma nietrywialną strukturę w każdej skali,
- struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej,
- jest samopodobny, jeśli nie w sensie dokładnym, to przybliżonym lub stochastycznym,
- jego wymiar Hausdorffa jest większy niż jego wymiar topologiczny,
- ma względnie prostą definicję rekurencyjną,
- ma naturalny („poszarpany”, „klębiasty” itp.) wygląd.



# HISTORIA

Pojęcie fraktala zostało wprowadzone do matematyki przez Benoît Mandelbrota w latach 70. XX wieku. Odkryty przez niego zbiór Mandelbrota nie był jednak pierwszym przykładem fraktala. Wcześniej istniała już cała gama zbiorów o niecałkowitym wymiarze Hausdorffa, postrzeganych jednak głównie jako kontrprzykłady pewnych twierdzeń. Bardziej systematycznie fraktalami zajmowała się geometryczna teoria miary, mająca swoje początki w pracach Constantin Carathéodory'ego i Felixa Hausdorffa.

Szczególnymi fraktalami zajmowali się Waław Sierpiński, Paul Lévy, a także Donald Knuth. Szczególny wkład w rozwój geometrycznej teorii miary wniósł Abraham Bezikowicz oraz Gaston Julia i Pierre Fatou, którzy utworzyli zbiór Julii, ściśle związany ze zbiorem Mandelbrota. Był on badany w latach 20. zeszłego wieku.

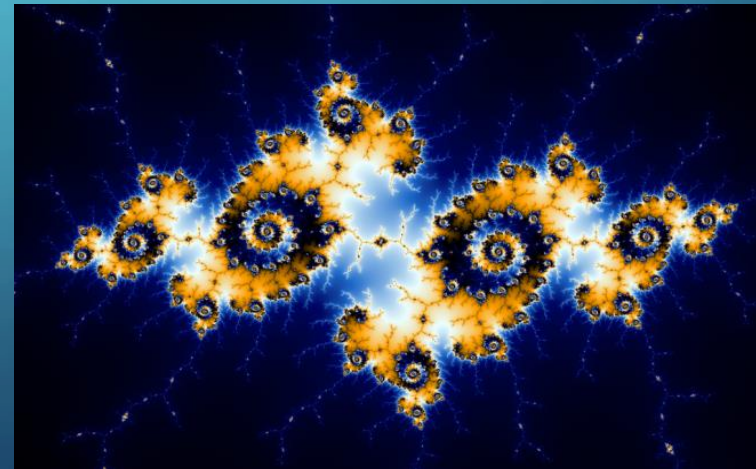


**Benoît B. Mandelbrot (ur. 20 listopada 1924 w Warszawie, zm. 14 października 2010 w Cambridge) – polski Żyd pochodzenia litewskiego, francuski i amerykański matematyk. Zajmował się szerokim zakresem problemów matematycznych, znany jest przede wszystkim jako ojciec geometrii fraktalnej, opisał zbiór Mandelbrota oraz wymyślił samo słowo „fraktal”.**

**Benoît Mandelbrot**

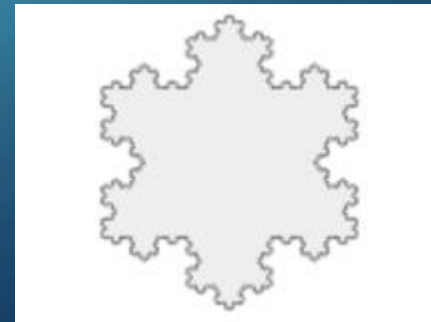


**Zbiór Mandelbrota**



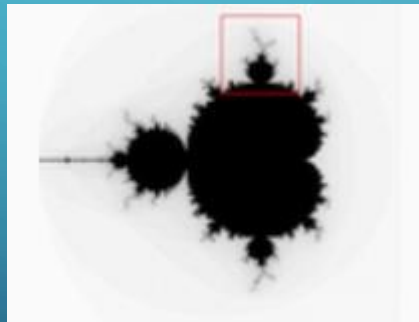
Benoit Mandelbrot twierdzi, że **fraktalem jest wszystko**. Nie jest to typowa, ścisła matematyczna definicja, ale jednak wyrażona przez wybitnego matematyka, więc musi mieć jakieś podstawy. Oglądając każdy obiekt (fizyczny, materialny) w pewnym momencie zauważamy, że ma ona **strukturę fraktalną**. Wszystko zależy od **skali** w jakiej dany obiekt oglądamy, a w przypadku obiektów matematycznych także od przybliżenia. Tak jak przyglądając się najzwyklejszemu plasterkowi żółtego sera, nie zdajemy sobie sprawy z faktu, że białko które jest jego podstawą ma strukturę fraktalną tak i oglądając zbiór Mandelbrota w błędnej skali możemy sobie nie zdawać sprawy z jego fraktalności. Słowo fraktal (ang. fractal) pochodzi z łaciny od słowa "fractus", które oznacza **złamany**. Zostało ono wprowadzone przez Mandelbrota, który tłumaczy, że powinno się przez nie rozumieć nieregularność, "fragmentowość" fraktali, a także konieczność "złamania" ich w celu uzyskania powyższej nieregularności.

Jedną z metod tworzenia fraktali jest wykorzystywanie pewnych specjalnych funkcji matematycznych. Powstające obiekty są często zbiorami mającymi względnie prostą definicję matematyczną i naturalny (poszarpany lub kłębiasty) wygląd. W ten sposób możemy otrzymać fraktale o ciekawych nazwach: zbiór Cantora, trójkąt Sierpińskiego, kostka Menger'a, paproć Barnsleya, krzywa Kocha, smok Heighwaya.





Inną metodą tworzenia fraktali jest wykorzystywanie ciągów liczbowych, dzięki którym można otrzymać interesujące fraktale: zbiór Mandelbrota, zbiór Julii, „płonący statek”. Często obrazy omawianych zbiorów są bardzo kolorowe, cechuje je nietrywialność struktury w każdej skali, ponadto struktura ta nie daje się łatwo opisać przy pomocy zwykłej geometrii.





Za jedną z cech charakterystycznych fraktala uważa się jego samopodobieństwo, to znaczy podobieństwo części do całości. Dla figur samopodobnych możemy zdefiniować wielkość zwaną wymiarem samopodobieństwa lub wymiarem pudełkowym. Są to wielkości będące uogólnieniem klasycznych definicji wymiaru. Przy definiowaniu wymiaru samopodobieństwa figury używamy logarytmów. W przypadku zbiorów fraktalnych wymiar ten może nie być liczbą całkowitą, np. wymiar samopodobieństwa zbioru Cantora wynosi:

$$d = \log 2 / \log 3 = 0.630929754\dots,$$

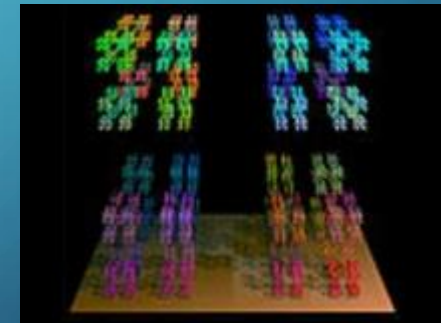
wymiar samopodobieństwa trójkąta Sierpińskiego jest równy:

$$d = \log 3 / \log 2 = 1.584962501\dots,$$

natomiast wymiar samopodobieństwa dywanu Sierpińskiego to:

$$d = \log 8 / \log 3 = 1.892789261\dots$$

Zatem kolejnym wyzwaniem dla matematyków jest obliczanie wymiarów zbiorów fraktalnych, które stanowi skomplikowany proces.



## INNE FRAKTALE ZNANYCH UCZONYCH

### Zbiór Cantora

Georg Cantor



Georg Cantor (1845-1918) był wybitnym niemieckim matematykiem - twórcą m. in. teorii mnogości. Zbiór przez niego stworzony jest niezwykle istotny nie tylko dla samego świata fraktali, ale dla całej matematyki. Za jego pomocą dowodzi się **nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych**, jest on także podstawą **zbioru Julii**. Został on opisany w **1883** roku.

Jego konstrukcja jest bardzo prosta. Odcinek dzielimy na **trzy** równe odcinki i **usuwamy środkowy**. Postępujemy tak z każdym z pozostałych dwóch odcinków w nieskończoność. Wraz z kolejnymi krokami liczba odcinków rośnie w nieskończoność, a ich długość dąży do zera.

## Wymiar fraktalny:

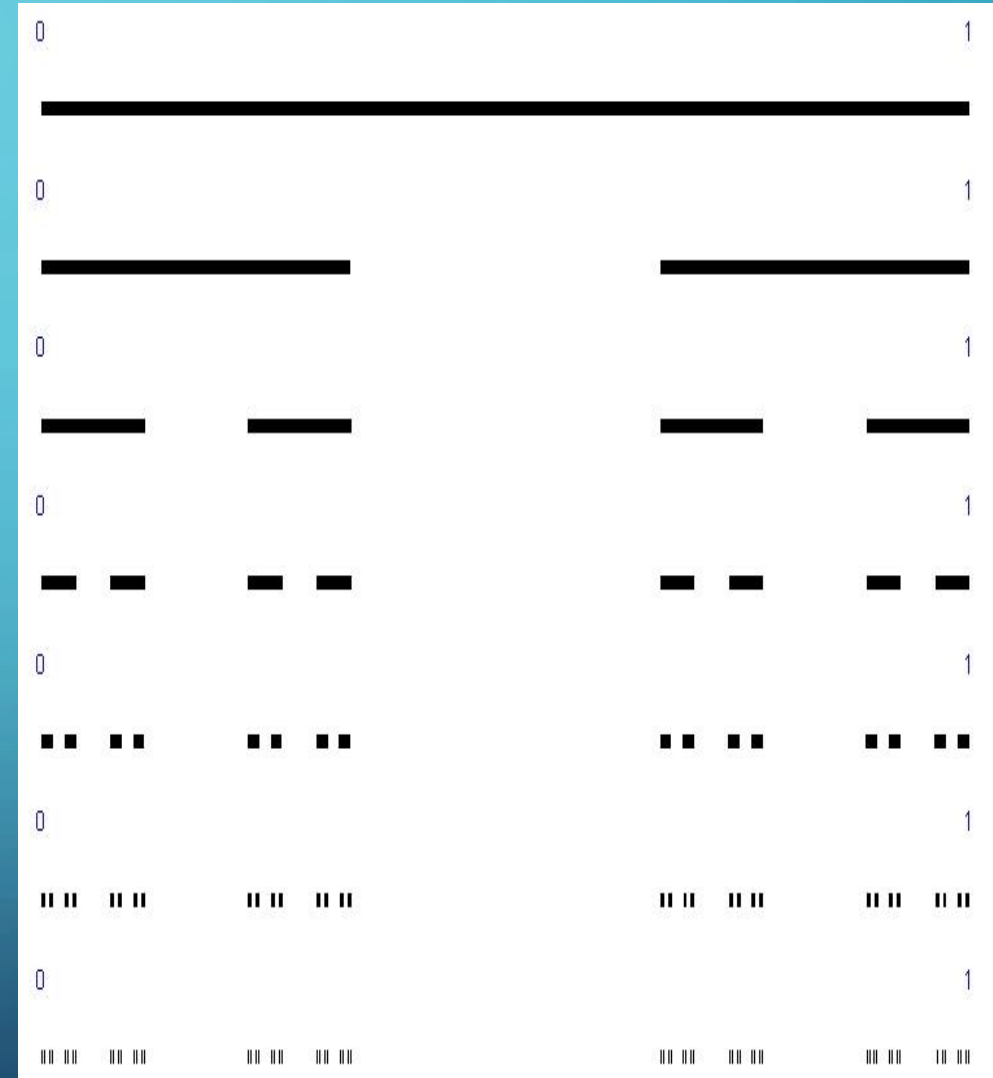
Szukamy takiej skali, w której cały zbiór się powtarza.

W skali 3 zbiór powtarza się dwukrotnie.

$$2=3^d$$

$$d=\log_3 2$$

$$d=\log 2 / \log 3 = 0,6309$$





**Gaston Maurice Julia (ur. 3 lutego 1893 w Sidi Bel Abbès w Algierii, zm. 19 marca 1978 w Paryżu) – matematyk francuski, jeden z prekursorów teorii systemów dynamicznych, profesor École polytechnique.**

**Brał udział jako żołnierz w I wojnie światowej, w walkach stracił nos i do końca życia nosił skórzaną przepaskę. Najbardziej znaną jego pracą matematyczną jest *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* (traktat o iteracji funkcji wymiernych), w której opisał własności fraktala nazwanego później zbiorem Julii.**



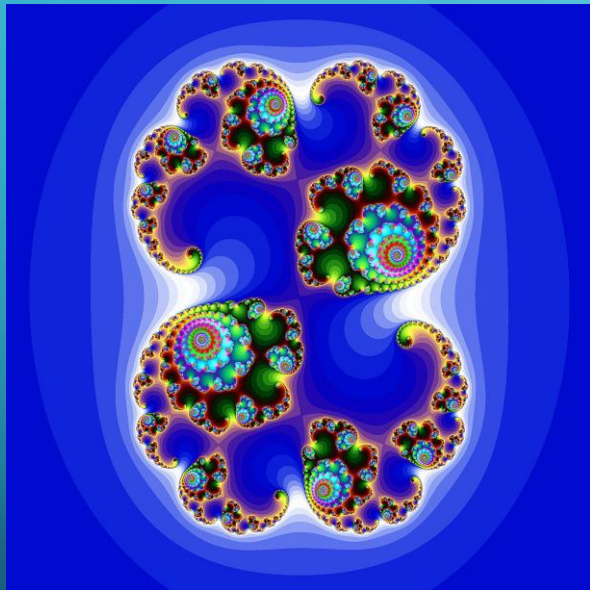
Julia zajmował się najpiękniejszą grupą fraktali stworzoną na płaszczyźnie zespolonej. Tutaj także obraz jest uzyskiwany przez iteracyjne przekształcanie wcześniej uzyskanych wyników, jednakże tym razem operujemy na liczbach zespolonych, a zamiast przekształceń afinicznych korzystamy z wielomianów zespolonych.

Rozważmy funkcję:

$$f(z)=z^2+c$$

tyle, że tym razem  $z$  przebiega po liczbach zespolonych zaś  $c$  jest zespolonym parametrem. Własnościami tego przekształcenia zajmował się Gaston Julia w latach 30-tych XX wieku, który badał układy dynamiczne, w szczególności iteracje funkcji kwadratowej na płaszczyźnie zespolonej.

## Zbiór Julii



Zbiór Julii i zbiór Fatou – dwa komplementarne (tzn. będące swoimi dopełnieniami) zbiory zdefiniowane przez odwzorowanie będące funkcją wymierną. Nieformalnie, zbiór Fatou funkcji zawiera wartości o takiej właściwości, że w ich bliskim otoczeniu pozostałe wartości zachowują się podobnie po iterowanym przekształcaniu daną funkcją, natomiast w zbiorze Julii są te wartości, dla których dowolnie małe zaburzenie może powodować drastyczne zmiany w ciągu iterowanych wartości. Stąd zachowanie funkcji w zbiorze Fatou jest „regularne”, natomiast w zbiorze Julii „chaotyczne”.

Zbiór Julii funkcji jest powszechnie oznaczany jako  $J(f)$ , a zbiór Fatou jako  $F(f)$ . Nazwy zbiorów pochodzą od nazwisk francuskich matematyków Gastona Julii i Pierre’a Fatou, którzy w latach 1918–1920 badali własności układów dynamicznych opisanych funkcją wymierną.

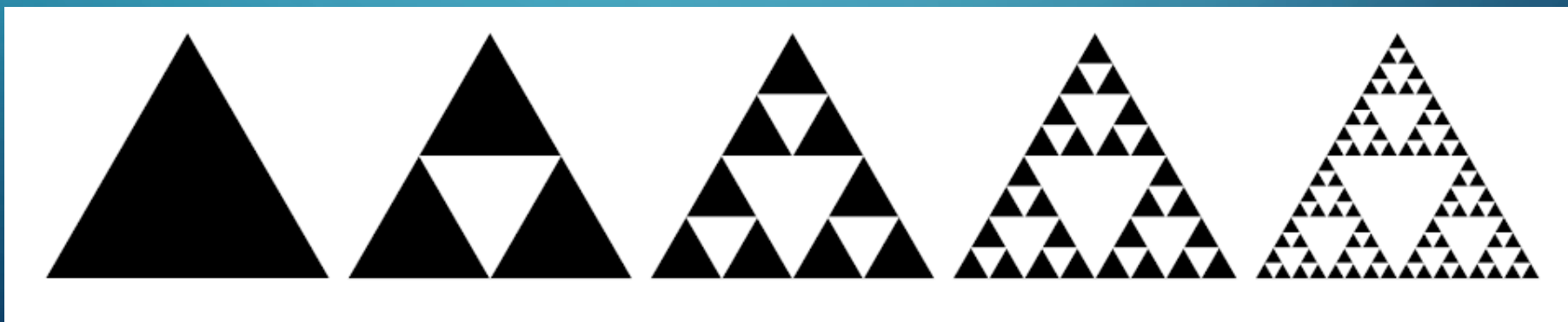
**Wacław Sierpiński (1882-1969) urodzony w Warszawie. Wybitny polski matematyk mający na swoim koncie liczne sukcesy w różnych dziedzinach matematyki, od teorii liczb do geometrii fraktalnej.**



**Fraktale Sierpińskiego, są jednymi z najbardziej znanych. Ich konstrukcja jest podobna do zbioru Cantora, jednakże ich reprezentacja graficzna jest znacznie ładniejsza.**

**Mając na płaszczyźnie wypełniony trójkąt dzielimy go na cztery mniejsze. Aby to zrobić, wyznaczamy trzy punkty będące środkami boków pierwotnego trójkąta, przeprowadzamy proste łączące te punkty. Teraz mając cztery trójkąty, usuwamy środkowy, a pozostałe dzielimy w identyczny sposób jak na początku.**

**Trójkąt Sierpińskiego można stworzyć używając do tego trójkąta Pascala. Jest to trójkątna tablica, której pierwszy wiersz stanowi liczba 1, a każdy następny jest tworzony w ten sposób, że na początku i końcu wiersza znajdują się liczby 1, a każda liczba znajdująca się pod dwoma innymi jest ich sumą. Zakładając, że wiersze i kolumny liczymy od zera. Najpierw rysujemy trójkąt, początkowo jedynie z 8 wierszami. Teraz zamalowujemy pola z liczbami nieparzystymi na czarno, pozostałe na biał.**

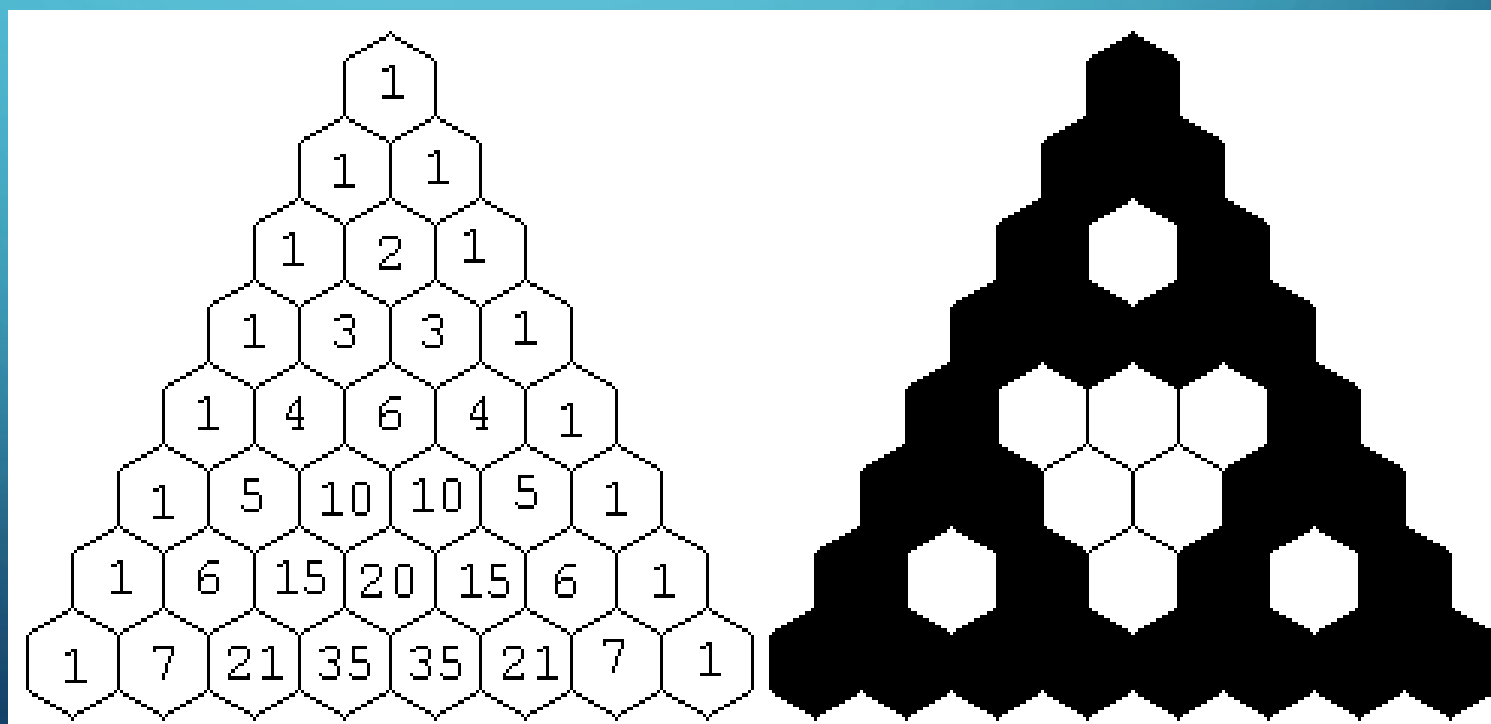




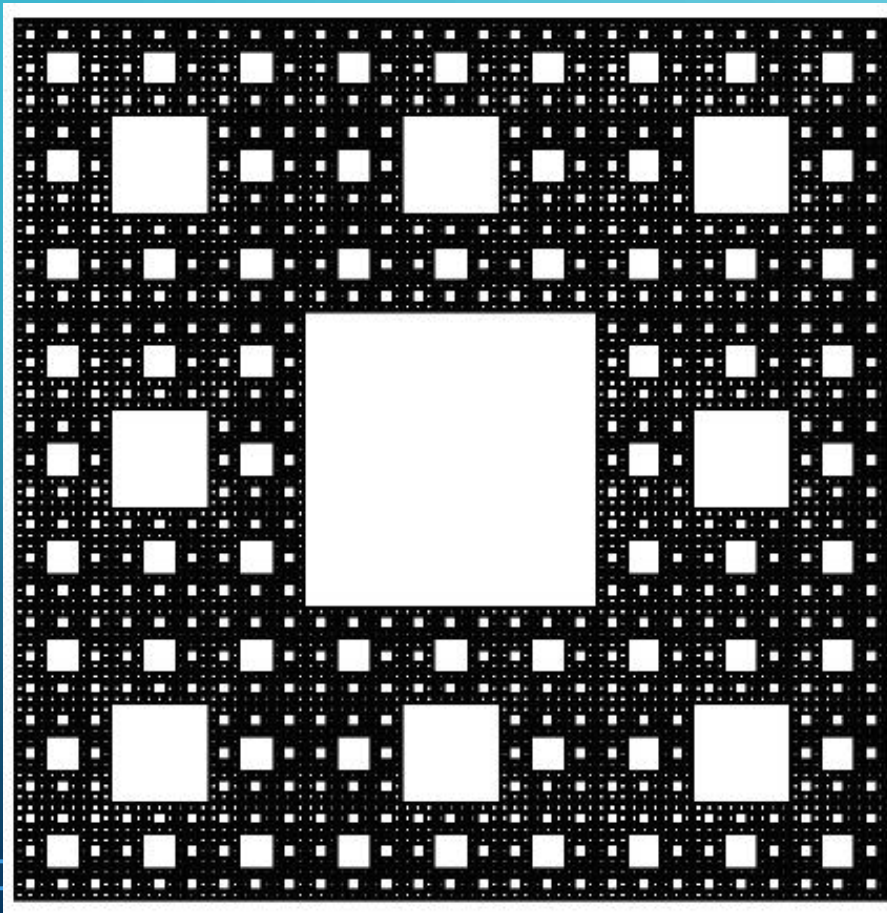
### Wymiar fraktalny:

Cały trójkąt jest podobny do siebie w skali 2, a powtarza się trzykrotnie:

$$d = \log 3 / \log 2 = 1,5849$$



## Dywan Sierpińskiego



Wymiar fraktalny:

Cały dywan jest do siebie podobny w skali 3,  
powtarza się 8 razy:

$$d = \log 8 / \log 3 = 1,8928$$

Krok 1. Kwadrat dzielimy na 9 części i  
usuwamy środkową część.

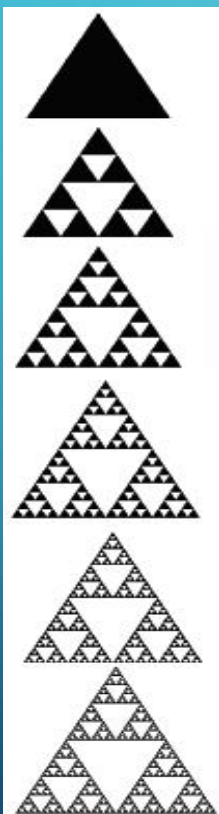
Krok 2. Postępujemy kolejno tak samo z  
kolejnymi kwadratami.

Oto figura po pięciu krokach.

- Po nieskończenie wielu krokach z początkowej figury powstaje zbiór punktów
- Pole Dywanu Sierpińskiego (jak i innych jego fraktali) jest równe zero
- Liczbę „dziur” po n-tym przekształceniu można obliczyć ze wzoru:

$$1 + 8 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{k-1}$$

## Trójkąt i dywan Sierpińskiego



W obu obiektach stworzonych przez Sierpińskiego widoczne jest ich podobieństwo. Główną różnicą jest figura początkowa, z jakiej powstaje fraktal. Drugą istotną różnicą jest **topologiczny niezmiennik** - rząd rozgałęzień.

Aby go obliczyć, trzeba wziąć możliwie małe koło, zawierające dany punkt i policzyć ilość przecięć z odcinkami wychodzącymi z tego punktu. W trójkącie Sierpińskiego istnieją punkty o rzędzie rozgałęzienia równym 2, 3 lub 4. Natomiast w dywanie Sierpińskiego znajdują się punkty o dowolnym rzędzie rozgałęzienia, z czego wynika, że zawiera on topologiczną wersję trójkąta Sierpińskiego.

Innymi rzadziej pokazywanymi konstrukcjami są **piramida Sierpińskiego** i **gąbka Menger**. Zbiory te, to przeniesienie trójkąta i dywanu Sierpińskiego w przestrzeń trójwymiarową. Gąbkę stworzył **Karl Menger** w 1925 roku.



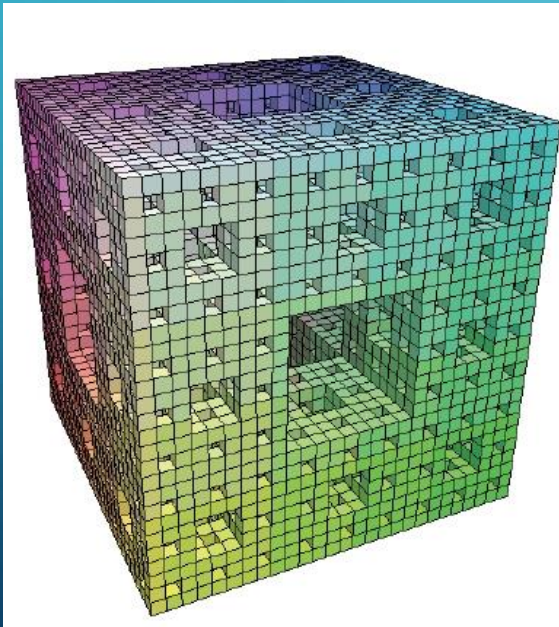
## Wymiar fraktalny:

Powtórzenie następuje w skali 3, ilość wystąpień oryginału wynosi 20:

$$d = \log 20 / \log 3 = 2,72683$$

Gąbka Menger'a to trójwymiarowy odpowiednik dywanu Sierpińskiego.

## Gąbka Menger'a



**Kostka Menger'a powstaje w następujący sposób:**

- 1. Dany jest sześcian.**
- 2. Tniemy go na 27 sześcianów równej wielkości płaszczyznami równoległymi do ścian.**
- 3. Usuwamy wszystkie sześciany przyległe do środków ścian pierwotnego sześcianu oraz sześcian znajdujący się w jego środku.**
- 4. Do każdego z 20 pozostałych sześcianów stosujemy poprzednią procedurę.**

Po nieskończonej liczbie powtórzeń opisanych operacji otrzymujemy kostkę Menger'a.

Poniższy pseudokod, będący rekurencyjną implementacją kostki Menger'a, wykorzystywany jest często w wielu językach programowania.

## Krzywa i płatek Kocha



Twórcą tego fraktala jest Helge von Koch, szwedzki matematyk. Krzywa ta jest specyficzna, ze względu na fakt, iż nie posiada żadnych prostych, ani odcinków.

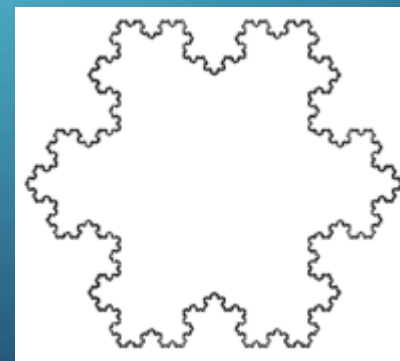
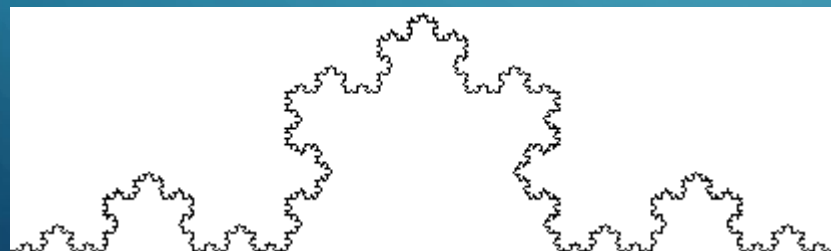
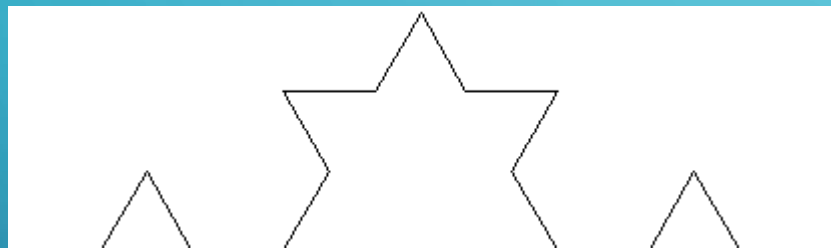
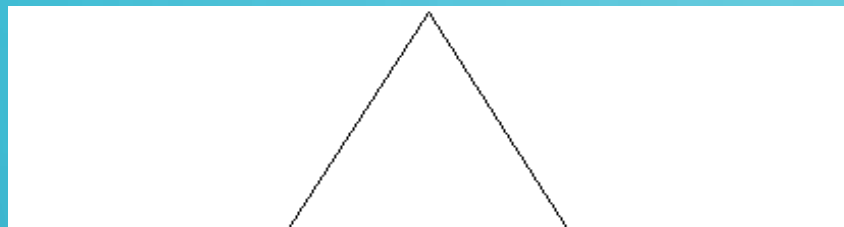
Mając dany kawałek, podobnie jak w przypadku zbioru Cantora, dzielimy go na trzy części i usuwamy środek. Tym razem jednak w powstałą „dziurę”, wstawiamy trójkąt równoboczny, któremu usuwamy podstawę. Tak postępujemy dla każdego z czterech powstałych elementów. Płatek Kocha powstaje po połączeniu trzech krzywych Kocha pod kątem  $60^\circ$ , „chropowatą” stroną na zewnątrz.

Krzywa ta jest nieskończenie długa, mieści się jednak na skończonej powierzchni. Można więc narysować pewne jej przybliżenie. Połączenie trzech krzywych przypomina płatek śniegu i nazywane jest płatkami Kocha.

## Wymiar fraktalny:

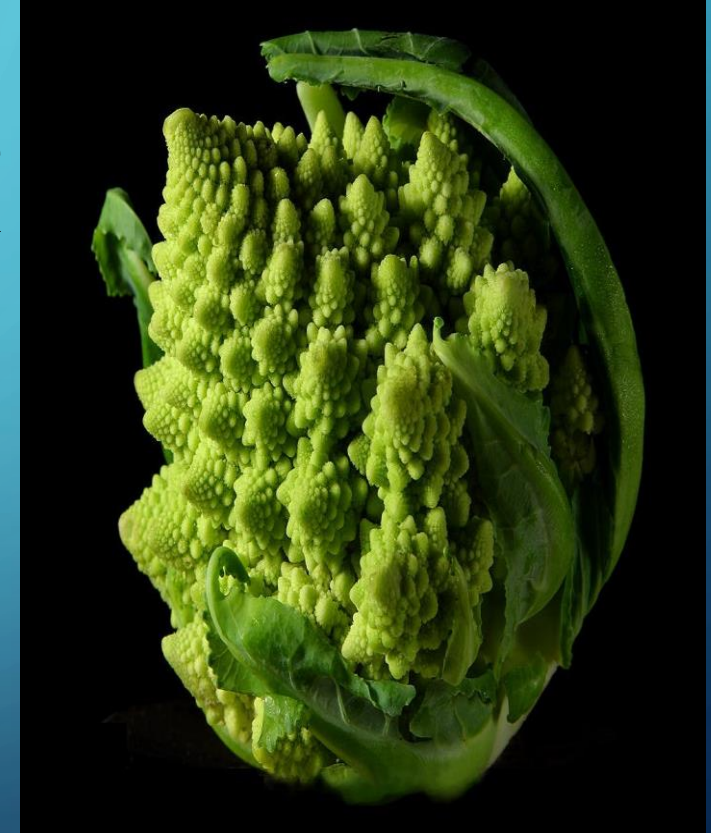
Krzywa powtarza się w  
skali 3 czterokrotnie:

$$d = \log 4 / \log 3 = 1,2618$$



## Zastosowanie fraktali

- [informatyka] – Grafika komputerowa - generowanie sztucznych krajobrazów i roślin
- [biologia] - Zastosowanie do klasyfikacji roślin (wymiary fraktalne liści)
- [informatyka] - Zastosowania w analizie tekstur, dekompozycja obrazu na podstawie lokalnego wymiaru fraktalnego, Kompresja fraktalna obrazu (znajdowanie IFS dla zadanego prototypu)
- [psychologia] – Generowanie obrazów nie powodujących żadnych skojarzeń
- Opis procesów chaotycznych zachodzących w układach dynamicznych
- Przetwarzanie i kodowanie obrazów cyfrowych
- Modelowanie tworów naturalnych dla celów realistycznej grafiki komputerowej
- Badanie struktury łańcuchów DNA
- Badanie samopodobnych struktur harmonicznnych występujących w muzyce





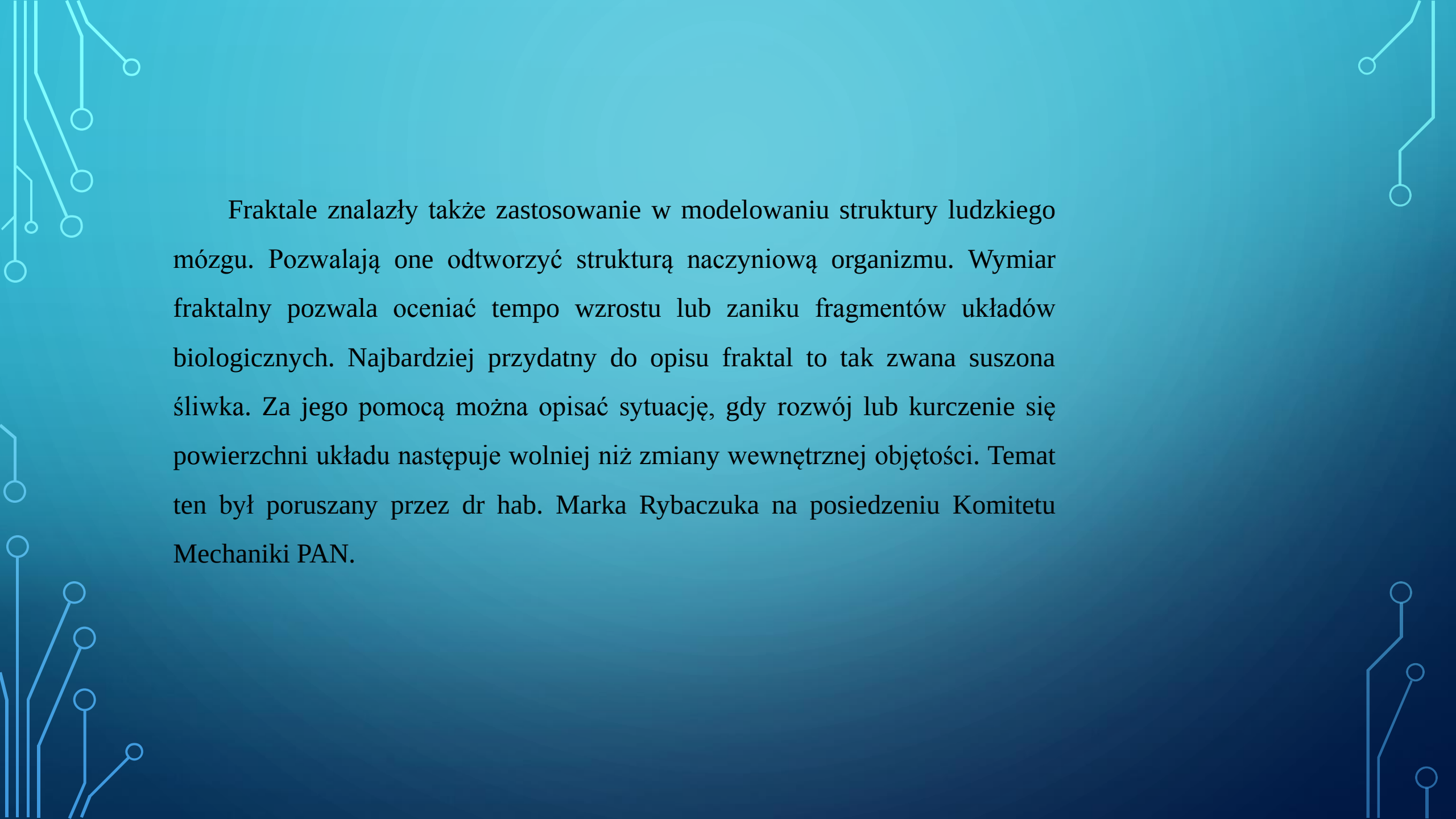
Fraktale znajdują zastosowanie w różnych dziedzinach życia. Obecnie prawie każdy telefon komórkowy korzysta z wbudowanej anteny fraktalnej. Wiele odpowiedników fraktali istnieje w otaczającej nas naturze. Przykładem mogą być błyskawice, chmury, fiordy, prądy zatokowe czy formacje skalne. Fraktale są obiektami często występującymi w grafice komputerowej.

W medycynie fraktale znalazły zastosowanie między innymi w analizie obrazów tomograficznych oraz w rozpoznawaniu komórek. Na przykład kilka lat temu w ośrodku badawczym w Mount Sinai w Nowym Jorku zostały wskazane zależności pomiędzy wymiarem fraktalnym chromosomu, a rakiem.

Fraktale czasem używane są także w filmach i wszelkiego rodzaju grach, głównie do tworzenia realistycznych efektów ognia.



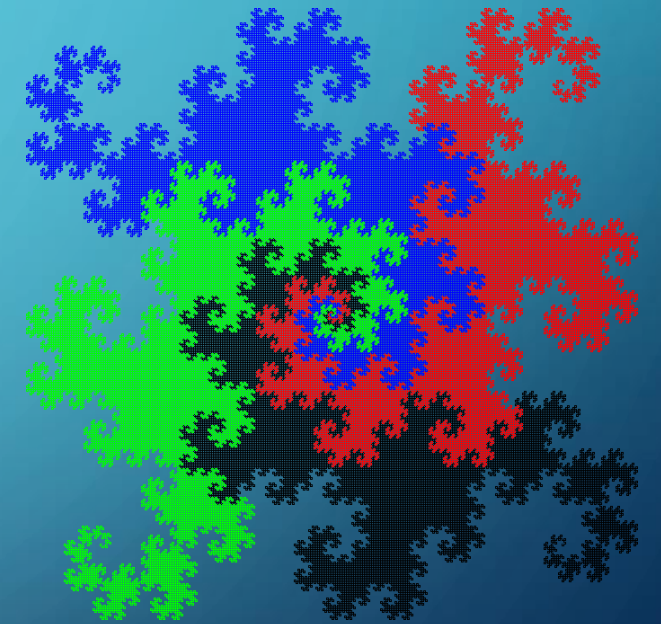
Na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu są prowadzone prace badawcze Zespołu Fizyki Medycznej między innymi na temat cyfrowej analizy obrazów dna oka. Skład zespołu zajmującego się tym zagadnieniem: dr M. Berndt-Schreiber, K. Majewska, A. Zduniak, D. Szczepaniak. Celem ich prac jest "stworzenie metody do obiektywnego i ilościowego określenie stanu oka", co według oczekiwań, powinno pomóc w diagnozowaniu jaskry. Opracowana metoda polega na wyznaczaniu wymiaru fraktalnego obrazu dna oka w skali szarości. Prawidłowe wartości dla osób zdrowych to od 2.4 do 2.5, natomiast dla osób chorych wartość ta jest wyższa i wynosi od 2.5 do 2.7. Oprócz opracowania samej metody zespół stworzył także bazę danych zawierającą obrazy oka, rozpoznanie, wymiar fraktalny oraz stosunek średnicy zagłębienia do powierzchni tarczy nerwu wzrokowego (C/V) i stosunek powierzchni naczyń krwionośnych do powierzchni tarczy nerwu wzrokowego (V/D).



Fraktale znalazły także zastosowanie w modelowaniu struktury ludzkiego mózgu. Pozwalają one odtworzyć strukturę naczyniową organizmu. Wymiar fraktalny pozwala oceniać tempo wzrostu lub zaniku fragmentów układów biologicznych. Najbardziej przydatny do opisu fraktal to tak zwana suszona śliwka. Za jego pomocą można opisać sytuację, gdy rozwój lub kurczenie się powierzchni układu następuje wolniej niż zmiany wewnętrznej objętości. Temat ten był poruszany przez dr hab. Marka Rybaczuka na posiedzeniu Komitetu Mechaniki PAN.

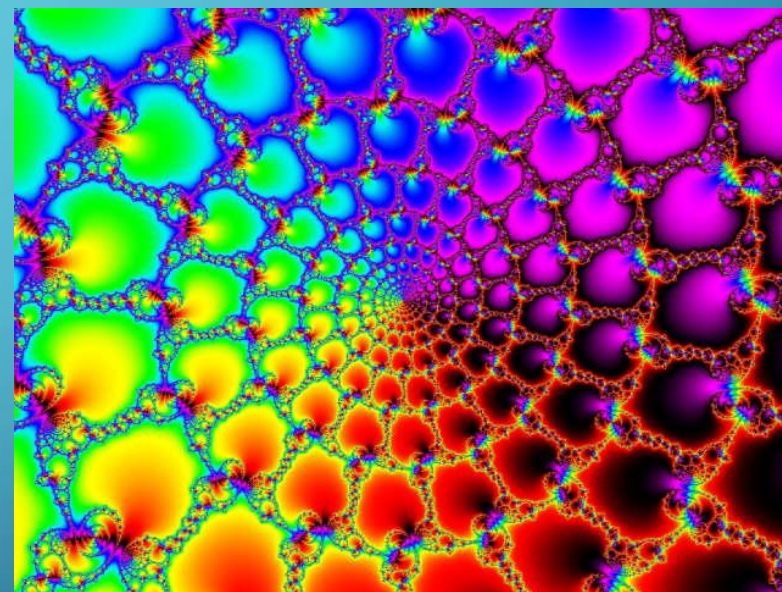
## Odwieczny urok

Fraktale mają jeszcze jedną intrygującą właściwość – są po prostu ładne. Podobają nam się zarówno w postaci generowanych przez komputer wzorków, jak i naturalnych tworów czy zjawisk. Ba, nawet utwory muzyczne, które mają strukturę fraktalną, są miłsze dla naszego ucha. Część uczonych – np. Kenneth i Andrew Hsu ze Szwajcarii – utrzymuje, że to właśnie decyduje o atrakcyjności muzyki klasycznej, w tym dzieł Bacha, Mozarta czy Beethovena. Na pewno zaś można wykorzystać fraktale do komponowania nowych utworów – sporo przykładów takiej twórczości odnajdujemy w internecie.



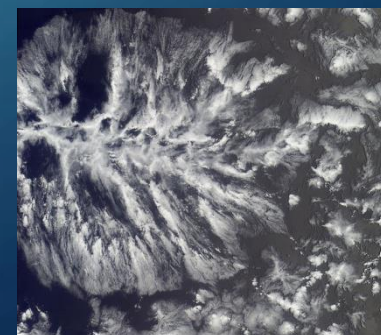


Ogromne zainteresowanie teorią fraktali a przez to jej dynamiczny rozwój przyczynił się do powstania Geometrii Fraktalnej jako największej z dotychczas odkrytych tajemnic natury. Dzięki niej mamy możliwość sporządzenia genialnego opisu wszystkich żywych i martwych organizmów, wniknięcia w skomplikowaną naturę narodzin całego świata i wszechświata. Geometria fraktalna to również uniwersalny klucz do poznania budowy naszych płuc, nerek, naczyń krwionośnych, nerwów a przede wszystkim klucz do najważniejszego kodu naszego DNA. Złożoność jej jest różna, zależnie od stopnia komplikacji danej formy w którą jest wpisana.





**Zastosowanie geometrii fraktalnej w przyrodzie umożliwi np. obliczenie wydzielanego tlenu i pochłanianego dwutlenku węgla przez dowolnej wielkości las, obliczając te wartości dla jednego drzewa. Wprowadzenie średniego obwodu drzew w lesie i ich ilości z prostego wzoru wyprowadzimy bardzo ważny dla bezpieczeństwa równowagi ekologicznej, pożądany wynik.**







## Bibliografia

S. Mozaffari, K. Faez, M. Ziaratban, *Character Representation and Recognition Using Quadtree-based Fractal Encoding Scheme*, IEEE Computer Society, ICDAR, 2005

Piotr Pierański, *Fraktale, Od geometrii do sztuki*, Wydanie 1, Instytut Fizyki Molekularnej PAN, Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań 1992

Michał Tempczyk, *Fraktale czyli poszarpana geometria*, 1995

<http://www.gap-system.org/~history/Biographies>

<http://pl.wikipedia.org/>

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Koch.html>