

# ELEMENTY KOMBINATORYKI

Edward Śtachowski

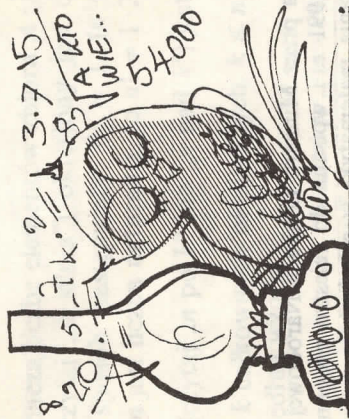




dr Edward Stachowski

# Elementy kombinatoryki i teorii prawdopodobieństwa

dla uczniów starszych klas  
szkoły podstawowej i szkoły średniej



OSTOJA

Warszawa 1991

Pod redakcją

Taisy Katner

Projekt okładki i ilustracje

Małgorzata Wickenhagen

Opracowanie graficzno-techniczne

Jacek Dubiel

Korekta

Michał Sobanski

Książka zakwalifikowana przez Ministra Edukacji Narodowej do użytku szkolnego w dniu 18 lipca 1991 r. i wpisana do rejestru proponowanych książek pomocniczych do nauczania matematyki w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza „Ostoja”



Nakładem Oficyny Wydawniczej „Ostoja”

ul. Targowa 15, Warszawa

Skład, druk i oprawa: Zakłady Graficzne „Tamka”, ul. Tamka 3, Warszawa

# Wstęp

Celem tego opracowania jest omówienie podstawowych pojęć i wzorów z kombinatoryki oraz prezentacja zastosowań kombinatoryki do rozwiązywania zadań z teorii prawdopodobieństwa (w przypadku schematu klasycznego). Przedstawiony materiał jest ilustrowany dużą liczbą przykładów. Przy studiowaniu tekstu Czytelnik ma możliwość samodzielnego rozwiązywania zadań zamieszczonych w tekście, do których odpowiedzi może znaleźć na końcu opracowania.

Ze względu na różny poziom wiedzy matematycznej Czytelników podajemy fakty i oznaczenia, z których będziemy korzystali w tym opracowaniu:

- symbol  $\bar{A}$  oznacza liczbę elementów zbioru  $A$  ( $\bar{A}$  czytaj — „moc  $A$ ”),
- symbol  $n!$  (czytaj „ $n$  silnia”) określony jest dla liczb całkowitych nieujemnych w sposób następujący:  $0! = 1$ ,  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ , co oznacza, że gdy  $n$  jest liczbą naturalną, to  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ,

- symbol  $\binom{n}{k}$  (czytaj „ $n$  po  $k$ ” lub „ $n$  nad  $k$ ”) jest to symbol Newtona, określony dla  $n, k$  całkowitych nieujemnych,  $k \leq n$ .

Obliczamy go według wzoru:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

- zadania z teorii prawdopodobieństwa zamieszczone w tym opracowaniu dotyczą schematu klasycznego, tzn. sytuacji, gdy zdarzenia elementarne jednakowo prawdopodobne (to założenie jest podane w treści większości zadań), w tego typu zadaniach prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia obliczamy wg wzoru

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$$

gdzie  $\bar{A}$  — oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ ,

$\bar{\Omega}$  — oznacza liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w danym doświadczeniu.

- symbol  $A'$  oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia  $A$  tzn.  $A' = \Omega \setminus A$ .

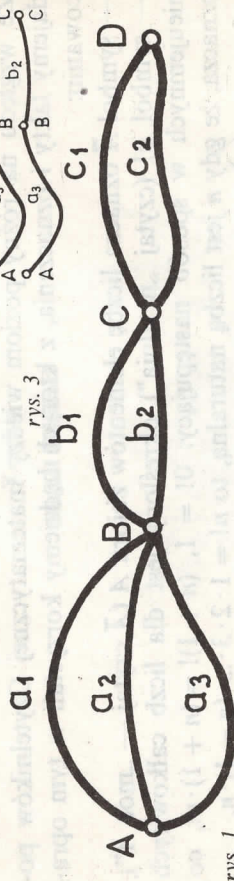


# I. Twierdzenie o mnożeniu

Zaczynamy od przykładu.

## Przykład 1.

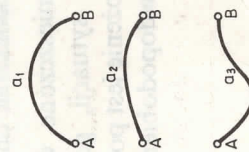
Chcemy odbyć wycieczkę z miasta A do miasta D przechodząc przez B i C. Z A do B prowadzą trzy drogi  $a_1, a_2, a_3$ , z B do C dwie  $b_1, b_2$  i z C do D też dwie  $c_1, c_2$  (rys. 1). Na ile różnych sposobów możemy wybrać trasę wycieczki?



rys. 1

## Rozwiązanie 1.

Jeden ze sposobów rozwiązywania tego zadania polega na wypisaniu wszystkich możliwych dróg. Aby nie pominąć żadnej trasy, będziemy wypisywali je kolejno.



rys. 2

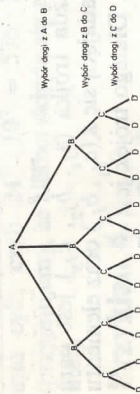
Z A do B prowadzą trzy drogi (rys. 2). Po wyborze trasy z A do B (trzy możliwości) należy wybrać jedną z dwóch dróg z B do C. Otrzymujemy  $3 \cdot 2 = 6$  różnych dróg z A do C przez B (rys. 3).

rys. 4

Po przejściu trasy z A do C (6 różnych tras) należy wybrać jedną z dwóch dróg z C do D. Otrzymujemy  $6 \cdot 2 = 12$  różnych tras z A do D przez B i C (rys. 4).

## Rozwiązanie 2.

Przy rozwiązywaniu tego zadania możemy również skorzystać z bardzo modnej ostatnio metody „drzewek”. Podobnie jak poprzednio, aby wybrać trasę będziemy kolejno wybierali drogi, metoda zapisu będzie jednak znacznie prostsza, patrz rys. 5.

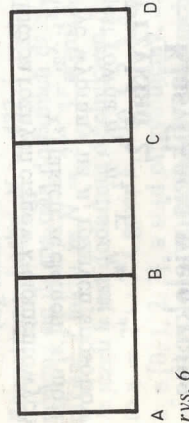


rys. 5

Z drzewka odczytujemy, że liczba różnych tras jest równa  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ .

## Rozwiązanie 3.

Metoda wypisywania wszystkich tras, jak i metoda „drzewek” jest uciążliwa. Nasuwa się inny sposób rozwiązywania tego problemu. W zadaniu należy trzy razy wybrać drogę: z A do B, z B do C, z C do D. Problem trzykrotnego wyboru można sprowadzić do wypełnienia trzech kratek (rys. 6).

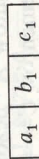


rys. 6

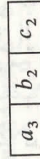
W pierwszą kratkę należy wpisać symbol wybranej drogi z A do B, w drugą symbol wybranej drogi z B do C, w trzecią z C do D. Pierwszą kratkę możemy wypełnić na trzy sposoby (patrz rys. 2), drugą na dwa sposoby (pierwsze dwie kartki możemy wypełnić

na  $3 \cdot 2 = 6$  sposobów, patrz rys. 3), trzecią na dwa sposoby.

Otrzymaliśmy  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$  różnych wariantów wyboru trasy (patrz rys. 4). Każdemu wypełnieniu kratek odpowiada dokładnie jedna droga i na odwrót, każdej drodze odpowiada tylko jeden sposób wypełnienia krater. Przykładowo, układowi



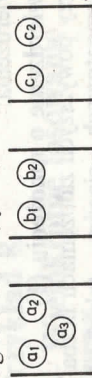
odpowiada pierwsza droga z rys. 4, a układowi



ostatnia.

## Rozwiązanie 4.

Wyobraźmy sobie, że chcemy wybrać trasę metodą losowania. Weźmy 3 urny. W pierwszej urnie będą 3 kule — każda oznaczona jest symbolem drogi z A do B, w drugiej 2 kule oznaczone odpowiednio symbolami dróg z B do C i w trzeciej 2 kule oznaczone symbolami dróg z C do D (rys. 7).



rys. 7

Z każdej urny losujemy po jednej kuli, kula z urny I wyznacza drogę z A do B, z urny II — drogę z B do C, z urny III — z C do D. Kulę z urny I możemy wybrać na 3 sposoby, do każdej kuli wybranej z urny I, kulę z urny II możemy wybrać na 2 sposoby, kule z urny I i II możemy wybrać na  $3 \cdot 2 = 6$  sposobów. Do każdego wyboru kul z urny I i II kulę z urny III możemy wybrać na 2 sposoby. Mamy więc  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$  sposobów wyboru trasy. Każdy układ kul wyznacza dokładnie jedną trasę (różne układy kul — różne trasy), jest więc 12 różnych tras.

Rozpatrzmy jeszcze raz sytuację z przykładu. Mieliśmy trzy zbiory:



wszystkich klas w tej klasyfikacji jest  $2 \cdot 2 \cdot 17 = 68$ .

### Przykład 3.

#### — Dowody osobiste.

Numer dowodu osobistego składa się z dwóch liter i siedmiu cyfr. Oznaczmy  $A_1 = A_2 =$  zbiór liter,  $A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 =$  zbiór cyfr.

Różnych numerów dowodów osobistych może być tyle, ile jest różnych ciągów złożonych z dwóch liter i siedmiu cyfr, czyli  $24^2 \cdot 10^7 = 576 \cdot 10^7$  (przyjmujemy, że alfabet składa się z 24 liter).

### Przykład 4.

#### — Karty brydżowe.

Każda karta jest określona przez podanie jej wartości i koloru. Niech  $A_1$  będzie zbiorem wartości tzn.  $A_1 = \{A, K, D, W, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$ ,  $A_2$  — zbiorem kolorów  $A_2 = \{\text{pik, kier, karo, trefl}\}$ . Zbiór  $A_1$  ma 13 elementów,  $A_2$  — 4 elementy, tzn. mamy  $13 \cdot 4 = 52$  różnych par, tj. kart.

### Przykład 5.

#### — Dodatnie dzielniki danej liczby.

Rozpatrzmy liczbę  $N = 432$  i zastanówmy się ile ma ona dodatnich dzielników. Z faktu, że  $N = 2^4 \cdot 3^3$  wynika, że jeżeli  $n$  jest dodatnim dzielnikiem  $N$ , to  $n = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2}$ , gdzie  $k_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $k_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ , a stąd otrzymujemy, że  $N$  ma  $5 \cdot 4 = 20$  różnych dodatnich dzielników.

### Przykład 6.

#### — Rzut kostką i monetą.

Doświadczenie polega na równoczesnym rzucie kostką i monetą. Wynik doświadczenia opisany jest przez parę

| $A_2$     | $b_1$            | $b_2$            | $\dots$ | $b_{j_2}$            | $\dots$ | $b_{n_2}$            |
|-----------|------------------|------------------|---------|----------------------|---------|----------------------|
| $A_1$     |                  |                  |         |                      |         |                      |
| $a_1$     | $(a_1, b_1)$     | $(a_1, b_2)$     | $\dots$ | $(a_1, b_{j_2})$     | $\dots$ | $(a_1, b_{n_2})$     |
| $a_2$     | $(a_2, b_1)$     | $(a_2, b_2)$     | $\dots$ | $(a_2, b_{j_2})$     | $\dots$ | $(a_2, b_{n_2})$     |
| $a_3$     | $(a_3, b_1)$     | $(a_3, b_2)$     | $\dots$ | $(a_3, b_{j_2})$     | $\dots$ | $(a_3, b_{n_2})$     |
| $\vdots$  |                  |                  |         |                      |         |                      |
| $a_{j_1}$ | $(a_{j_1}, b_1)$ | $(a_{j_1}, b_2)$ | $\dots$ | $(a_{j_1}, b_{j_2})$ | $\dots$ | $(a_{j_1}, b_{n_2})$ |
| $\vdots$  |                  |                  |         |                      |         |                      |
| $a_{n_1}$ | $(a_{n_1}, b_1)$ | $(a_{n_1}, b_2)$ | $\dots$ | $(a_{n_1}, b_{j_2})$ | $\dots$ | $(a_{n_1}, b_{n_2})$ |

rys. 8

Każda trójka  $(a_{j_1}, b_{j_2}, c_{j_3})$  jest parą składającą się z  $(a_{j_1}, b_{j_2})$  oraz elementu  $c_{j_3}$ . Dlatego trójek jest

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ . Stosując indukcję otrzymujemy dowód dla wszystkich  $k$ . Krok indukcyjny jest analogiczny jak przejście od  $k = 2$  do  $k = 3$  tzn. zakładamy prawdziwość twierdzenia dla  $k = n$ , dla  $k = n + 1$ , ciąg  $(n + 1)$ -elementowy przedstawiamy jako parę złożoną z ciągu  $n$ -elementowego i jednoelementowego, wykorzystując twierdzenie dla par i założenie indukcyjne otrzymujemy tezę.

Zanim przejdziemy do przykładu podamy bez dowodu nieco ogólniejsze sformułowanie twierdzenia o mnożeniu.

#### Twierdzenie o mnożeniu (2)

Liczba różnych ciągów  $k$ -elementowych  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  takich, że element  $x_j$  może być wybrany na  $n_j$  różnych sposobów jest równa  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ .

### Przykład 2.

#### — Klasyfikacja wielokrotna.

Przypuśćmy, że ludzie są klasyfikowani według płci, stanu cywilnego i zawodu. Płeć, stan cywilny i zawód stanowią pewne kategorie klasyfikacji. Rozmaite kategorie klasyfikacji odgrywają tu rolę zbiorów. Jeżeli wyróżniamy 2 stany cywilne i 17 zawodów, to ogółem

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$  (drogi z  $A$  do  $B$ ),  $B = \{b_1, b_2\}$  (drogi z  $B$  do  $C$ ),  $C = \{c_1, c_2\}$  (drogi z  $C$  do  $D$ ).

Chcielśmy utworzyć trójkę uporządkowaną, taką aby na pierwszym miejscu występował element ze zbioru  $A$ , na drugim z  $B$  na trzecim z  $C$ . Pytanie brzmi: ile jest takich różnych trójek? Okazało się, że jest ich  $3 \cdot 2 \cdot 2$  tzn. liczba elementów  $A \cdot$  liczba elementów  $B \cdot$  liczba elementów  $C = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ . Ja

k można uogólnić ten problem?

Założmy, że mamy  $k$  zbiorów:

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\}, \bar{A}_1 = n_1, \\ A_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_{n_2}\}, \bar{A}_2 = n_2, \\ \vdots$$

$$A_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_k}\}, \bar{A}_k = n_k.$$

Ile jest różnych ciągów  $k$ -elementowych  $(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, x_{j_k})$  takich, że element na pierwszym miejscu należy do  $A_1$ , na drugim do  $A_2, \dots$ , na  $k$ -tym do  $A_k$ ? Porównując obecną sytuację z przykładem wydaje się, że powinno ich być  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_k$ . Rzeczywiście tak jest i fakt ten stanowi treść twierdzenia:

#### Twierdzenie o mnożeniu (1)

Przy powyższych założeniach liczba  $k$ -elementowych ciągów, takich, że  $a_{j_1} \in A_1, b_{j_2} \in A_2, \dots, x_{j_k} \in A_k$  jest równa  $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_k = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ .

#### Dowód.

Niech  $k = 2$ . Ustawmy pary  $(a_{j_1}, b_{j_2})$  w tablicę prostokątną zawierającą  $n_1$  wierszy i  $n_2$  kolumn (rys. 8), tak, aby para  $(a_{j_1}, b_{j_2})$  stała na przecięciu wiersza o numerze  $j_1$  i kolumny o numerze  $j_2$ . W ten sposób każda para jest napisana i to jeden i tylko jeden raz, a tablica ma  $n_1 \cdot n_2$  elementów.

Jeżeli  $k = 3$ , to przyjmujemy parę  $(a_{j_1}, b_{j_2}, c_{j_3})$ .

$j_1 \in \{1, 2, \dots, n_1\}, j_2 \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ , za element nowego rodzaju. Istnieje  $n_1 \cdot n_2$  elementów nowego rodzaju oraz  $n_3$  elementów zbioru  $A_3 = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_3}\}$ .

(wynik rzutu kostką, wynik rzutu moneta),  $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A_2 = \{0, R\}$ . Stąd różnych wyników jest  $6 \cdot 2 = 12$ .

### Przykład 7.

#### — Wielokrotny rzut kostką.

Rzucamy  $k$  razy kostką. Wynikiem doświadczenia jest  $k$ -elementowy ciąg  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , gdzie  $a_i$  — liczba oczek otrzymanych w  $i$ -tym rzucie kostką ( $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ ). Mamy  $A_1 = A_2 = \dots = A_k = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Stąd różnych wyników jest  $\underbrace{6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 6}_k$  razy.

Należy w tym miejscu zauważyć, że w przypadku jednoczesnego rzutu  $k$  ponumerowanymi kostkami sytuacja jest analogiczna. Wynikiem doświadczenia jest  $k$ -elementowy ciąg  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , gdzie  $a_i$  — liczba oczek na kostce o numerze  $i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ). Tak, jak poprzednio  $A_1 = A_2 = \dots = A_k = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$  i liczba różnych wyników jest równa  $6^k$ .

### Przykład 8.

#### — Wielokrotne losowanie z urny.

W urnie znajduje się  $n$  kul oznaczonych symbolami  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (mogą to być przykładowo różne kolory).

Doświadczenie polega na  $k$ -krotnym losowaniu z urny po jednej kuli ze zwracaniem. Tak więc losujemy pierwszy raz, wylosowaną kulę wkładamy z powrotem do urny, losujemy drugi raz, zwracamy wylosowaną kulę do urny itd. (np. w ten sposób postępujemy przy losowaniu sześciocyfrowej koncówki banderoli: w urnie jest 10 kul oznaczonych cyframi i losujemy 6 razy). Wynikiem doświadczenia jest ciąg  $k$ -elementowy. W tym przypadku  $A_1 = A_2 = \dots = A_k$  (cały czas losujemy z tego samego zbioru) i liczba różnych wyników jest równa  $n^k$ .



## II. Wariacje z powtórzeniami

Rozpatrzymy jeszcze raz sytuację z przykładu 8,  $k$ -krotne losowanie z tego samego zbioru (losowanie ze zwracaniem), to nie innego, jak wyznaczenie funkcji  $f$  określonej na zbiorze  $\{1, 2, \dots, k\}$  o wartościach w zbiorze  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $f(j) = a_m$ ,  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  oznacza, że w losowaniu o numerze  $j$  wyciągnięto kulę oznaczoną  $a_m$ . Takie funkcje nazywamy wariacjami z powtórzeniami (dany element może być wylosowany kilka razy, może się powtarzać).

### Definicja

Dany jest zbiór  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Każdą funkcję  $f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , a więc funkcję, która liczbie naturalnej ze zbioru  $\{1, 2, \dots, k\}$  przyporządkowuje dokładnie jeden element  $a_m$  ze zbioru  $A$  nazywamy  $k$ -elementową wariacją z powtórzeniami zbioru  $A$ .

Często spotykamy definicję: „Każdy ciąg  $k$ -elementowy, którego wyrazy należą do zbioru  $A$  nazywamy  $k$ -elementową wariacją z powtórzeniami zbioru  $A$ ”. Definicja ta jest zgodna z naszą, ponieważ ciąg  $k$ -wyrazowy jest funkcją określoną na zbiorze  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

### Twierdzenie I

Liczba  $k$ -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $n$ -elementowego jest równa  $n^k$ .

### Dowód.

Oznaczmy zbiór  $n$ -elementowy przez  $A$ . Z twierdzenia o mnożeniu dla zbiorów:  $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$ , otrzymujemy:  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ . Zgodnie z tezą twierdzenia o mnożeniu, liczba

$k$ -elementowych ciągów o wartościach ze zbioru  $A$  jest równa

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k$$

### Przykład 8. (c.d.)

Sytuacja przedstawiona w przykładzie 8 jest bardzo ogólna. Dla każdego zbioru  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  i dowolnej liczby naturalnej  $k$  można skonstruować schemat losowania odpowiadający wariacjom z powtórzeniami. Z urny, w której są kule oznaczone symbolami  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , losujemy  $k$  razy po jednej kuli ze zwracaniem. Każdy wynik losowania określa dokładnie jedną funkcję  $f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  i każdej funkcji odpowiada dokładnie jeden wynik losowania.

### Przykład 9.

#### — Rozmieszczenie kul w komórkach.

Mamy  $k$  kul ponumerowanych od 1 do  $k$  i  $n$  komórek ponumerowanych od 1 do  $n$ . Rozpatrzmy rozmieszczenia kul w komórkach. Każde rozmieszczenie sprowadza się do wyboru jednej komórki dla każdej kuli. Należy więc określić funkcję  $f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  ( $f(i) = j$  oznacza, że kula o numerze  $i$  znajduje się w komórce o numerze  $j$ ).

Schemat urnowy (przykład 8), który temu doświadczeniu odpowiada to  $k$ -krotne losowanie ze zwracaniem z urny, w której są kule o numerach 1, 2, ...,  $n$ . W tym przypadku numery losowań odpowiadają numerom kul; numer losowania w przykładzie 8 odpow-

wiała numerowi kuli w przykładzie 9.

Zagadnienie rozmieszczenia kul w komórkach ma bardzo dużo różnych interpretacji.

**9.1.** — Rzuty kostką. Możliwe wyniki rzutu  $k$  kostkami do gry ( $k$ -krotnego rzutu kostką) odpowiadają rozmieszczeniu  $k$  kul (rzuty) w  $n = 6$  komórkach. (Każdej liczbie oczek odpowiada jedna komórka). Rzucając monetą mamy do czynienia z  $n = 2$  komórkami (komórki w tym przypadku można oznaczyć symbolami 0 i R).

**9.2.** — Pleć  $k$  osób.

Mamy  $k$  osób (w naszym schemacie kule) i  $n = 2$  płci (w naszym schemacie komórki).

**9.3.** — Dni urodzin.

Różne kombinacje dni urodzin  $k$  osób odpowiadają rozmieszczeniu  $k$  osób w  $n = 365$  komórkach (dni roku, zakładając, że rok liczby 365 dni).

**9.4.** — Wypadki drogowe.

Klasyfikacja  $k$  wypadków drogowych według dni tygodnia, w których się zdarzyły odpowiada rozmieszczeniu  $k$  wypadków w  $n = 7$  dniach tygodnia.

**9.5.** — Asy w brydżu.

Przy rozdaniu kart do brydża interesuje nas rozmieszczenie asów. Gracze odpowiadają komórkom i mamy  $k = 4$  kule (asy) i  $n = 4$  komórki (gracze) czyli  $4^4 = 256$  różnych rozmieszczeń.

**9.6.** — Totalizator piłkarski.

Wypełnienie kuponu totalizatora polega na wpisaniu w każdej z 13 pozycji jednego z trzech symboli: 1 (zwycięstwo gospodarzy), x (remis), 2 (zwycięstwo gości). Mamy  $k = 13$  kul (pozycje na kuponie) i  $n = 3$  komórki (symbole). Z twierdzenia 1 wynika, że kupon można wypełnić na  $3^{13} = 1\,594\,323$  różnych sposobów.

**9.7.** — Końcówka banderoli.

Przy losowaniu szesciocyfrowej końcówki banderoli mamy  $k = 6$  kul (liczba losowań) i  $n = 10$  komórek (cyfry).

### Przykład 10.

#### — Końcówka banderoli (c.d. 9.7).

Zakładając, że wszystkie wyniki losowania są jednakowo prawdopodobne obliczymy prawdopodobieństwa zdarzeń: wylosowana końcówka banderoli będzie kończyła się:

a)  $A$ : liczbą 33,

b)  $B$ : liczbą parzystą.

Zdarzeniami elementarnymi w tym doświadczeniu są wszystkie możliwe wyniki losowania końcówki. Każdy wynik losowania jest funkcją  $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (numer losowania)  $\rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  (wynik losowania), czyli wariacją z powtórzeniami.

$\Omega = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$ ,  $\bar{\Omega} = 10^6$ , ( $k = 6$ ,  $n = 10$ ).

a) Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi  $A$  są te funkcje, dla których  $f(5) = 3$  i  $f(6) = 3$  (w dwóch ostatnich losowaniach wyciągnięto cyfrę 3)

$A = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 9\}, f(5) = 3, f(6) = 3\}$ . Jest ich

tylko 4,  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\} \times \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  (pierwsze cztery wartości mogą być dowolne)  $\bar{A} = 10^4$ . Stąd szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{10^4}{10^6} = \frac{1}{100}$$

Obliczając liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających, z twierdzenia o mnożeniu mamy:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}, A_6 = \{3\}.$$

b) Na parzystość liczby ma wpływ tylko ostatnia cyfra. Na ostatnim miejscu może występować każda z 10 cyfr, a w 5 przypadkach liczba jest parzysta.

Stąd

$$P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Dla Czytelników, których to proste



rozumowanie nie zadowala mamy inny argument. Z twierdzenia o mnożeniu

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}_3 = \bar{A}_4 = \bar{A}_5 = 10, \\ \bar{A}_6 = 5. \text{ Stad } \bar{B} = 10^5 \cdot 5.$$

## Przykład 11.

— Rzuty kostką.

Zakładając, że wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A: przy sześciu rzutach kostką otrzymamy co najmniej raz „szóstkę”. Każdemu rzutowi przyporządkowujemy wynik otrzymany w tym rzucie. Zdarzeniami elementarnymi w tym doświadczeniu są funkcje

$$f: \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}.$$

$$\Omega = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}\}.$$

Sprzyjającymi naszemu zdarzeniu  $A$  są te funkcje, które co najmniej raz przyjmują wartość 6.

$$A = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}, \\ f(1) = 6 \vee f(2) = 6 \vee f(3) = 6 \vee f(4) = 6 \vee \\ \vee f(5) = 6 \vee f(6) = 6\}.$$

Łatwiej jest policzyć liczbę zdarzeń elementarnych niesprzyjających, tj. funkcji, które nie przyjmują wartości 6 tzn. funkcji o wartościach w zbiorze  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

$$A' = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}\},$$

$$\text{Std } P(A') = \frac{\bar{A}'}{\bar{\Omega}} = \frac{5^6}{6^6},$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5^6}{6^6} = 0,6651...$$

Można oczekiwać, że w 6 rzutach kostką „szóstka” powinna się „pojawić”, ale prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest mniejsze od  $\frac{2}{3}$ .

# Zadania.

1) Wypisz wszystkie funkcje:

- a)  $f: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ,  
 b)  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}$ ,  
 c)  $f: \{3, 4\} \rightarrow \{a, b\}$ ,  
 d)  $f: \{c, d\} \rightarrow \{4, 6, 7\}$ ,  
 e)  $f: \{a, b\} \rightarrow \{x, y, z\}$ ,  
 f)  $f: \{1, a\} \rightarrow \{1, 2, x\}$ .

2) Z miasta  $A$  do  $B$  prowadzi cztery drogi, a z miasta  $B$  do miasta  $C$  trzy drogi. Ile dróg przechodzących przez  $B$  wiedzie z  $A$  do  $C$ ?

3) Z dwóch klas, z których każda liczy 30 uczniów należy wybrać po jednym uczniu do pocztu sztandarowego. Na ile sposobów można ich wybrać?

4) Na ile sposobów można wybrać jedną samogłoskę i jedną spółgłoskę z wyrazu **PARKIET**?

5) Na ile różnych sposobów można postawić na szachownicy dwa pionki, białego i czarnego, tak aby biały stał na białym polu, a czarny na czarnym?

6) Na ile różnych sposobów można postawić na szachownicy dwie więcej różnych kolorów, tak aby jedna była druga?

7) Mamy 5 rodzajów czystych kopert oraz cztery rodzaje znaczków pocztowych tej samej wartości. Na ile sposobów można wybrać kopertę i znaczek do wysłania listu?

8) Dane są trzy baki mające odpowiednio 6, 8, 12 ścianek. Na ile różnych sposobów mogą one upaść?

9) 6 krawatów należy umieścić w 3 szufladach. Na ile różnych sposobów można to zrobić?

10) Ile różnych pojęć można zakodować za pomocą dwóch znaków umieszczonych na pięciu miejscach?

11) Mamy 10 listów i 3 rodzaje kopert: białe, kremowe i niebieskie. Każdy z 10 listów należy włożyć do koperty. Na ile różnych sposobów można to zrobić?

12) Znajdź liczbę dzielników liczby  
 $N = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^4$ .

$$N = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^4.$$

13) Na ile różnych sposobów możemy rozłożyć 10 kul w pięciu komórkach, tak aby kula o numerze 1 była w pierwszej komórce?

14) Losujemy sześciocyfrową końców-  
kę banderoli (patrz przykład 10). Za-  
kładając, że wszystkie wyniki losowania  
są jednakowo prawdopodobne, oblicz  
prawdopodobieństwa zdarzeń: wylo-  
sowana liczba będzie

a) A: kończyła się cyfrą 7,  
b) B: kończyła się liczbą 1987,  
c) C: miała cyfrę tysięcy równą 9,  
d) D: zawierała co najmniej raz cyfrę 4,  
e) E: składała się tylko z liczb nieparzystych.

15) Rzucamy 4 razy symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

a) A: suma oczek będzie większa niż 5,  
b) B: co najmniej raz otrzymamy parzysty cyfry.

16) Rzucamy 8 razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

- a) A: w trzecim rzucie wypadnie orzeł,  
b) B: co najmniej dwa razy otrzymamy  
orła.

17) Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ : na obu kostkach otrzymamy tę samą liczbę oczek.

18) Rozmieszczone losowo 10 kul w pięciu komórkach. Zakładając, że wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

- a)  $A$ : wszystkie kule będą w jednej komórcie,  
b)  $B$ : pierwsza komórka będzie pusta,  
c)  $C$ : w pierwszej komórce będzie co najmniej jedna kula.





# III. Wariacje bez powtórzeń, permutacje

## Przykład 12.

### — Losowanie bez zwracania.

Z urny przedstawionej w przykładzie 8 ( $n$  kul oznaczonych symbolami  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) losujemy  $k$  ( $k \leq n$ ) razy bez zwracania, tzn. wylosowaną kulę odkładamy na bok. Oznacza to, że określamy funkcję  $f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , która jest różnowartościowa (kula raz wylosowana nie może być wylosowana po raz drugi). Takie funkcje nazywamy wariacjami bez powtórzeń.

### Definicja.

Dany jest zbiór  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Każdą funkcję różnowartościową\*  $f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , ( $k \leq n$ ) nazywamy  $k$ -elementową wariacją bez powtórzeń zbioru  $A$ . Często spotykamy definicję „każdy  $k$ -elementowy uporządkowany podzbiór zbioru  $A$  nazywamy  $k$ -elementową wariacją bez powtórzeń zbioru  $A$ ”. Definicje te są zgodne ponieważ  $k$ -elementowy uporządkowany podzbiór jest to różnowartościowa funkcja określona na zbiorze  $\{1, 2, \dots, k\}$  o wartościach w zbiorze  $A$ .

\* funkcję  $f$  nazywamy różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwa jest implikacja:

$$\bigwedge_{x, y \in D_f} (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y)).$$

Inaczej mówiąc funkcja jest różnowartościowa, jeżeli różnym argumentom odpowiadają różne wartości.

### Twierdzenie 2.

Liczba  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń elementów zbioru  $n$ -elementowego ( $k \leq n$ ) jest równa

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ czynników}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

### Dowód.

Teza wynika z twierdzenia o mnożeniu (2).  $f(1)$  możemy określić na  $n$  sposobów,  $f(2)$  już tylko na  $(n-1)$  sposobów, ...,  $f(k)$  ma  $(n-k+1)$  sposobów (do zbioru wartości funkcji  $f$  należy już  $(k-1)$  elementów). Korzystając z faktu, że

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \text{ otrzymujemy tezę.} \end{aligned}$$

## Przykład 12. (c.d.)

### — Losowanie bez zwracania

Sytuacja przedstawiona w przykładzie 12 jest bardzo ogólna. Dla każdego zbioru  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  i liczby naturalnej  $k$  ( $k \leq n$ ) można skonstruować odpowiedni schemat losowania. Z urny, w której są kule oznaczone  $a_1, a_2, \dots, a_n$  losujemy  $k$  razy po jednej kuli bez zwracania. Każdy wynik takiego losowania odpowiada dokładnie jednej funkcji różnowartościowej i każdej funkcji różnowartościowej odpowiada dokładnie jeden wynik losowania. Przykład ten dobrze ilustruje twierdzenie 2. Pierwszą kulę można wybrać na  $n$  spo-

sobów, drugą na  $(n-1)$ , trzecią na  $(n-2)$ , ...,  $k$ -tą na  $(n-k+1)$  sposobów (przed  $k$ -tym losowaniem z urny wyjęliśmy  $(k-1)$  kul). Stąd ciąg  $k$  różnych kul możemy wylosować na  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$  sposobów.

## Przykład 13.

### — Toto-lotek.

Podczas ciągnięcia toto-lotka numery w telewizji są podawane w wylosowanej kolejności. Liczby nie mogą się powtórzać, bo piłeczka z wylosowanym numerem nie wraca do bębna. Czyli mamy do czynienia z wariacją bez powtórzeń zbioru liczb  $\{1, 2, \dots, 49\}$ , sześćcio- lub siedmioelementową, w zależności od tego czy uwzględnimy dyscyplinę dodatkową, czy też nie.

## Przykład 14.

W 10 ponumerowanych komórkach rozmieszczamy 5 ponumerowanych kul. Zakładając, że wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ : wszystkie kule będą w różnych komórkach.

Każdej kuli możemy przyporządkować numer komórki, w której została umieszczona. W ten sposób każde rozmieszczenie jest opisane funkcją określoną na zbiorze kul, o wartościach w zbiorze numerów komórek.

$\Omega = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}\}$ . Na mocy twierdzenia 1,  $\bar{\Omega} = 10^5$ . Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi są te funkcje, które różnym kulom przypisują różne komórki tzn. funkcje różnowartościowe.

$$A = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}, f(i) \neq f(j) \text{ dla } i \neq j\}.$$

Na mocy twierdzenia 2,

$$\bar{A} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6, \text{ stąd}$$

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0,03024 \dots$$

## Przykład 15.

### — Dni urodzin.

Dni urodzin  $k$  osób, przy założeniu, że żadna nie urodziła się w roku przestępnym, można traktować jako rozmieszczenie  $k$  kul w 365 komórkach. Prawdopodobieństwo zdarzenia: każda spośród  $k$  osób obchodzi urodziny innego dnia, przy założeniu, że wszystkie rozkłady dni urodzin są jednakowo prawdopodobne, jest równe

$$P_k = \frac{365 \cdot (365-1) \cdot \dots \cdot (365-k+1)}{365^k}$$

dla  $k \leq 365$  oraz  $P_k = 0$  dla  $k > 365$ .

Okazuje się, że przy  $k \geq 23$ ,  $P_k < \frac{1}{2}$ .

Wynika stąd, że w grupie liczącej co najmniej 23 osoby prawdopodobieństwo znalezienia dwóch osób o tym samym dniu urodzin jest większe od  $\frac{1}{2}$ .

## Przykład 16.

Ze zbioru cyfr  $\{1, 2, \dots, 9\}$  losujemy kolejno trzy bez zwracania i tworzymy liczbę trzycyfrową, tzn. pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą setek, druga dziesiątek, trzecia jednostki. Zakładając, że wszystkie wyniki losowania są jednakowo prawdopodobne, obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ : otrzymana liczba będzie większa niż 700.

Zdarzeniami elementarnymi w naszym doświadczeniu są funkcje różnowartościowe  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  (wariacje bez powtórzeń)

$$\Omega = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 9\}, f(i) \neq f(j) \text{ dla } i \neq j\}.$$

Na mocy twierdzenia 2,

$$\bar{\Omega} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Jeżeli otrzymana liczba ma być większa niż 700, to liczba setek musi być wylosowana ze zbioru  $\{7, 8, 9\}$ . Tak więc

$$A = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 9\}, f(1) \in \{7, 8, 9\}, f(i) \neq f(j), \text{ dla } i \neq j\},$$

$$\bar{A} = 3 \cdot 8 \cdot 7,$$



$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

\* \* \*

Szczególny przypadek wariacji z powtórzeniami otrzymujemy, gdy  $n = k$ . Takie wariacje nazywamy permutacjami.

### Definicja.

Permutacją zbioru  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  nazywamy każdą funkcję różnowartościową  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Często spotykamy definicję: „Permutacją zbioru  $A$  nazywamy każde uporządkowanie elementów tego zbioru”. Definicje są zgodne, ponieważ uporządkowanie elementów zbioru, to po prostu ponumerowanie tych elementów, czyli funkcja różnowartościowa (dwa elementy nie mogą mieć tego samego numeru).

$$f: \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\text{na}} A.$$

Bezpośrednio z twierdzenia 2 otrzymujemy.

### Wniosek.

Liczba permutacji zbioru  $n$ -elementowego jest równa  $n!$ .

### Przykład 17.

Jeżeli mamy pewien zbiór np. uczniów w klasie, to każde uporządkowanie: alfabetyczne (lista w dzienniku), wg wzrostu, wg wieku itp. jest permutacją tego zbioru. Przykładowo 11 osób (drużyna piłkarska) można uporządkować na  $11! = 39\,916\,800$  różnych sposobów.

### Przykład 18.

Jeżeli rozmieszczamy losowo  $n$  kul w  $n$  komórkach, to przy założeniu, że wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne, prawdopodobieństwo, że wszystkie komórki będą zajęte jest równe  $\frac{n!}{n^n}$ . To prawdopodobieństwo jest

zadziwiająco małe: np. dla  $n = 7$  jest równe 0,006119...

### Przykład 19.

Cyfrы 1, 2, 3, 4, 5 zostały uporządkowane w sposób losowy. Zakładając, że wszystkie uporządkowania są jednakowo prawdopodobne obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ : cyfry 1 i 2 będą obok siebie i w wymienionej kolejności.

Zdarzeniami elementarnymi w naszym doświadczeniu są permutacje zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

$\Omega = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, f(i) \neq f(j) \text{ dla } i \neq j\}$ . Na mocy wniosku  $|\Omega| = 5!$ . Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi są permutacje, w których na pewnym miejscu występuje cyfra 1, na następnym 2, a pozostałe cyfry są uporządkowane dowolnie

$$A = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, f(i) \neq f(j) \text{ dla } i \neq j,$$

$$f(1) = 1 \text{ i } f(2) = 2 \text{ lub } f(2) = 1 \text{ i}$$

$$f(3) = 2 \text{ lub } f(3) = 1 \text{ i } f(4) = 2 \text{ lub}$$

$$f(4) = 1 \text{ i } f(5) = 2\}.$$

Jak widzimy para (1,2) może występować na czterech miejscach, stąd

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$A_k = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$f(i) \neq f(j) \text{ dla } i \neq j,$$

$$f(k) = 1, f(k+1) = 2, k = 1, 2, 3, 4,$$

tnz. 1 stoi na miejscu o numerze  $k$ , a 2 na

miejscu o numerze  $k+1$ . Obliczmy

$P(A)$ . Sprzyjające są wszystkie funkcje

różnowartościowe

$$f: \{3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 4, 5\} \text{ (dowolne upo-}$$

rządkowanie pozostałych trzech cyfr).

$$|\bar{A}_1| = 3!,$$

$$P(A_1) = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}.$$

$$P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{20}$$

Analogicznie obliczając otrzymujemy

$$P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{20}$$

23) Ile różnych naszyjników (bez za-  
pięcia) można zrobić:  
a) z siedmiu różnych kamieni szlachet-  
nych?

b) z siedmiu kamieni szlachetnych, je-  
żeli sześć kamieni jest identycznych,  
a jeden jest większy?

c) z siedmiu różnych kamieni szlachet-  
nych, jeżeli kamienie są dwóch rodza-  
jów, pięć mniejszych i dwa większe?

24) Na stacji kolejowej znajduje się 10  
latarni sygnałowych. Ile różnych syg-  
nałów można włączyć, jeżeli każda la-  
tarnia ma trzy światła: czerwone, żółte  
i zielone i co najmniej jedno światło co  
najmniej jednej latarni ma być włą-  
czone?

25) a) Na ile sposobów można z pełnej  
talii kart (52 karty) wybrać po jednej  
karcie z każdego koloru?

b) Ile jest takich sposobów wtedy, gdy  
wśród wyjętych kart nie może być za-  
dnej pary kart jednakowych wartości  
tnz. dwóch króli, dwóch dziesiątek itp.?

26) Ile jest różnych rozmieszczeń 4 po-  
numerowanych kul w 6 szufladach, je-  
żeli w każdej szufladzie może być co  
najwyżej jedna kula?

27) Ile różnych liczb trzycyfrowych  
można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5,  
6 jeżeli:

a) cyfry mogą się powtarzać?

b) cyfry nie mogą się powtarzać?

c) cyfry mogą się powtarzać i 1 musi

występować co najmniej raz?

d) cyfry mogą się powtarzać i liczba ma

być większa niż 400?

28) Zbiór cyfr  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

został uporządkowany losowo. Zakła-

dając, że wszystkie uporządkowania są

jednakowo prawdopodobne oblicz

prawdopodobieństwa zdarzeń:

a)  $A$ : cyfry 3 i 5 będą obok siebie

w dowolnym porządku,

b)  $B$ : cyfry 1, 2, 3 będą obok siebie

w dowolnym porządku,

c)  $C$ : pomiędzy 1 i 2 występują do-

kładnie cztery cyfry.

a stąd

$$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{5}.$$

Można do tego wyniku dojść w nieco  
inny sposób. Para (1, 2) ma występo-  
wać w tym uporządkowaniu obok sie-  
bie i w tej kolejności, możemy ją więc  
traktować jako jeden nowy element  
(„sklejamy” te dwie cyfry). Otrzyma-  
liśmy w ten sposób cztery elementy  
i każde uporządkowanie tego zbioru  
sprzyja naszemu zdarzeniu. Cztery ele-  
menty można uporządkować na 4!

$$\text{Stąd } P(A) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}.$$

### Zadania.

19) Na ile różnych sposobów możemy  
ustawić w szeregu 5 osób?

20) Do oceny studentów używa się pię-  
ciu stopni  $A, B, C, D$  i  $E$ . Rozpatrujemy  
grupę pięciu studentów.

a) Na ile różnych sposobów możemy

ocenić tę grupę, tak aby żaden dwaj

student nie otrzymali tej samej oceny?

b) Wyróżniamy dwóch studentów  $X$  i

$Y$ . Na ile różnych sposobów możemy

ocenić tę grupę, tak by żaden dwaj

student nie otrzymali tej samej oceny

i  $X$  otrzymał ocenę wyższą niż  $Y$ ?

c) Na ile różnych sposobów możemy

ocenić tę grupę przy użyciu tylko dwóch

ocen  $A$  i  $B$ ?

21) Z miasta  $A$  do miasta  $B$  prowadzi

trzy różne drogi.

a) Na ile różnych sposobów można

pojechać z  $A$  do  $B$  i z powrotem?

b) Na ile różnych sposobów można

pojechać z  $A$  do  $B$  i z powrotem różnymi

drogami?

22) Test składa się z 10 pytań. Na każde

pytanie można udzielić jednej z trzech

odpowiedzi  $a, b$  albo  $c$ . Ile jest różnych

sposobów wypełnienia testu, jeżeli od-

powiedzi na dwa kolejne pytania są

zawsze różne?



29) Zbiór cyfr  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  został uporządkowany losowo. Zakładając, że wszystkie uporządkowania są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ : żadne dwie cyfry nieparzyste nie stoją obok siebie.

30) Po jednej stronie prostokątnego stołu posadzono losowo  $n$  osób. Zakładając, że wszystkie sposoby rozdzenia są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

a)  $A$ :  $m$  określonych osób usiadzie jedna przy drugiej w dowolnym porządku,  
 b)  $B$ : pomiędzy osobami  $A$  i  $B$  (ustalonymi) będzie siedziało dokładnie  $k$  osób ( $k \leq n - 2$ ).

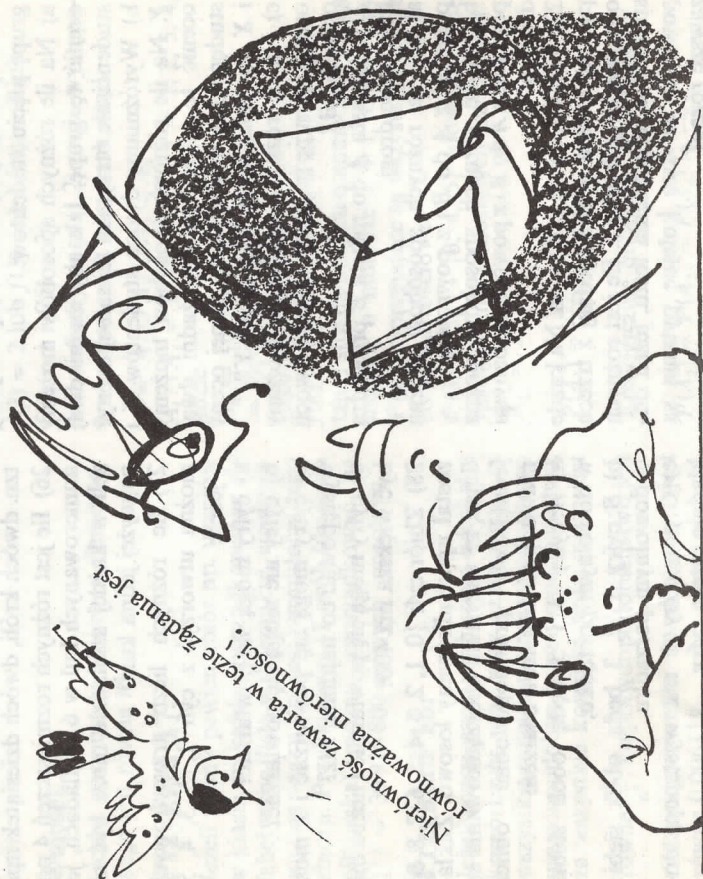
31) Ze zbioru liczb  $\{1, 2, \dots, 15\}$  losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Zakładając, że wszystkie wyniki losowania są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

a)  $A$ : liczba 4 zostanie wylosowana co najmniej raz,  
 b)  $B$ : wśród wylosowanych liczb będzie dokładnie jedno powtórzenie tzn. pewna liczba zostanie wylosowana dokładnie dwa razy.

32) W mieście o  $(n + 1)$  mieszkańcach jedna osoba powtarza plotkę drugiej, która z kolei powtarza ją trzeciej osobie itd. Za każdym razem plotka powtarzana jest osobie wybranej losowo spośród  $n$  osób dostępnych. Zakładając, że wszystkie przebiegi plotki są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: plotka zostanie powtórzona  $k$  razy

a)  $A$ : bez powrotu do osoby, która zapoczątkowała plotkę,  
 b)  $B$ : bez powtarzania dwa razy tej samej osobie.

$$(k \leq n).$$



## IV. Kombinacje

### Przykład 19. c.d.

#### — Toto-lotek.

Ostatecznym wynikiem losowania toto-lotka jest podzbiór 6 elementów (mijamy dyscyplinę dodatkową) zbioru 49-elementowego. Numery są wylosowane w pewnej kolejności, którą potem „gubimy”, podając wylosowane liczby w kolejności od najmniejszej do największej. Ten sam zbiór numerów może być wylosowany na 6! różnych sposobów, jeżeli uwzględnimy kolejność. W wielu przypadkach, gdy losujemy z danego zbioru kilka elementów (podzbiór), interesuje nas tylko to, które elementy zostały wybrane, bez uwzględnienia kolejności losowania. Takie podzbiory nazywamy kombinacjami.

#### Definicja.

$k$ -elementową kombinacją  $n$ -elementowego ( $k \leq n$ ) zbioru nazywamy każdy  $k$ -elementowy podzbiór tego zbioru.

#### Twierdzenie 3.

Liczba  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego jest równa  $\binom{n}{k}$ , przypominamy, że  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

#### Dowód.

Zbiór  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego podzielimy na klasy. Do jednej klasy zaliczymy wszystkie te wariacje bez powtórzeń, które składają się z tych samych elementów (różnią się tylko kolejnością). W każdej z tych klas jest  $k!$

wariacji ( $k$  elementów można uporządkować na  $k!$  sposobów) i każda taka klasa odpowiada dokładnie jednej kombinacji (elementy są identyczne). Stąd jeżeli liczbę kombinacji  $k$ -elementowych pomnożymy przez  $k!$ , to otrzymamy liczbę  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń, liczba kombinacji jest więc równa

$$\frac{k!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

### Przykład 19. c.d.

#### — Toto-lotek.

W tym przypadku  $n = 49$ ,  $k = 6$ , mamy  $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$

różnych wyników losowania.

Należy zauważyć, że gdyby losowano 43 liczby z 49, to liczba różnych wyników losowych byłaby taka sama, wynika to z równości  $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \binom{49}{43}$ .

$$\text{Ogólnie } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Równość ta jest intuicyjnie jasna. Jeżeli ze zbioru  $n$ -elementowego wybieramy podzbiór  $k$ -elementowy, to jednocześnie wyznaczamy podzbiór  $(n-k)$ -elementowy złożony z pozostałych elementów. Ponieważ każdy podzbiór  $k$ -elementowy wyznacza wzajemnie jednoznacznie podzbiór  $(n-k)$ -elementowy (złożony z pozostałych elementów), to jest ich tyle samo.

### Przykład 20. — Brydź.

Grający w brydża otrzymuje 13 kart, kolejność otrzymywania kart nie jest is-



totna, mamy więc do czynienia z 13-elementową kombinacją zbioru 52-elementowego (kart). Ostatnie twierdzenie ( $n = 52$ ,  $k = 13$ ) orzeka, że istnieje

$$\binom{52}{13} = 635\,013\,559\,600$$

różnych układów kart dla jednego gracza.

### Przykład 21. — Uporządkowanie dwóch rodzajów elementów.

Rozpatrzmy zbiór składający się z  $n = k + m$  elementów, z których  $k$  elementów należy do jednego gatunku (nazwijmy je typu  $c$ ),  $m$  do drugiego (typu  $b$ ). Przykładowo może to być  $k$  kul czerwonych i  $m$  kul białych. Dla wygody oznaczmy kule czerwone  $c_1, c_2, \dots, c_k$  białe  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Elementy te można uporządkować na  $n!$  różnych sposobów. Jeżeli będziemy traktowali zarówno elementy typu  $c$  jak i typu  $b$  jako nierozróżnialne (tzn. opuścimy wskazniki — nie rozróżnimy kul tego samego koloru), to pewnie uporządkowania staną się nierozróżnialne (dwa ustawienia będą różne, jeżeli na co najmniej jednym miejscu będą stały elementy różnych rodzajów). W tej sytuacji uporządkowanie jest całkowicie wyznaczone przez podanie  $k$  miejsc zajmowanych przez elementy typu  $c$ ,  $k$  miejsc można wybrać na

$$\binom{n}{k} = \binom{k+m}{k}$$

sposobów. Tak więc  $k$  nierozróżnialnych elementów typu  $c$  i  $m$  nierozróżnialnych elementów typu  $b$  można uporządkować na  $\binom{k+m}{k}$  różnych sposobów.

### Przykład 22.

W turnieju szachowym uczestniczy 10

zawodników. W systemie rozgrywek każdy z każdym zostanie rozegranych  $\binom{10}{2} = 45$  partii (liczba partii jest równa liczbie różnych podzbiorów dwuelementowych; każdy podzbiór dwuelementowy, to jedna partia).

### Przykład 23.

Każde 8 różnych punktów wybranych z okręgu wyznacza nam  $\binom{8}{2} = 28$  różnych prostych i  $\binom{8}{3} = 56$  różnych trójkątów.

### Przykład 24.

#### — Loteria.

Na loterii jest 100 losów: 20 wygrywających i 80 przegrywających. Kupiliśmy 5 losów. Zakładając, że wszystkie możliwe wybory losów są jednakowo prawdopodobne, obliczmy prawdopodobieństwa zdarzeń:

- A: dokładnie jeden los będzie wygrywający,
- B: co najmniej jeden los będzie wygrywający.

Zdarzeniami elementarnymi w naszym doświadczeniu są zbiory 5 losów (kupionych). Jest ich tyle, ile podzbiorów 5-elementowych (kombinacji) ze zbioru losów,

$$\bar{\Omega} = \binom{100}{5}.$$

- Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi są takie zbiory, w których jeden los jest wygrywający i cztery przegrywające. Jeden los wygrywający z 20 możemy wybrać na  $\binom{20}{1}$  sposobów. Cztery losy przegrywające z 80 możemy wybrać na  $\binom{80}{4}$  sposobów. Na

mocy twierdzenia o mnożeniu  $\bar{A} = \binom{20}{1} \cdot \binom{80}{4}$ , stąd szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{\binom{20}{1} \cdot \binom{80}{4}}{\binom{100}{5}} = 0,4147 \dots$$

- Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi są kombinacje 5-elementowe, które zawierają jeden, lub dwa, lub trzy, lub cztery, lub pięć losów wygrywających. Łatwiej jest policzyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego (zdarzenie przeciwne  $B'$  polega na tym, że wśród kupionych losów wszystkie są przegrywające, muszą być one wybrane z 80 przegrywających).  $\bar{B}' = \binom{80}{5}$ .

Stąd szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{\binom{80}{5}}{\binom{100}{5}} = 0,6807 \dots$$

### Przykład 25.

#### — Toto-lotek.

Zakładając, że w toto-lotku wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne, policzmy prawdopodobieństwa trafienia:

- A: „szóstki”,
- B: „piątki”.

Zadanie jest bardzo podobne do poprzedniego (przykład 24). Jeżeli grę w toto-lotka będziemy tłumaczyli na język loterii, to otrzymamy: na loterii jest 49 losów (wszystkie numery) wśród nich 6 wygrywających (wylosowane numery), kupiliśmy 6 losów (liczby skreślone przez nas na kuponie) — pytamy o prawdopodobieństwo:

- 6,
- 5 losów wygrywających. Zdarzeniami elementarnymi są podzbiory 6-elementowe (kombinacje) zbioru 49-elementowego. Jest ich

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816.$$

- „szóstka”: jest tylko jedno zdarzenie elementarne sprzyjające, stąd

$$P(A) = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

- „piątka”: zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi są kombinacje zawierające 5 liczb wylosowanych i 1 nie wylosowaną. 5 liczb z 6 wylosowanych możemy wybrać na  $\binom{6}{5} = 6$  sposobów,

a 1 z 43 niewylosowanych na  $\binom{43}{1} = 43$  sposoby. Na mocy twierdzenia o mnożeniu  $\bar{B} = 6 \cdot 43 = 258$ , a stąd

$$P(B) = \frac{258}{\binom{49}{6}} = 0,000018 \dots$$

### Przykład 26.

$k$  ponumerowanych kul rozmieszczono losowo w  $n$  ponumerowanych komórkach. Zakładając, że wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne, obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia A: w pierwszej komórce będzie dokładnie  $m$  ( $m \leq k$ ) kul.

Każdej kuli przyporządkujemy numer komórki, w której się znajduje, rozmieszczenie jest więc funkcją  $f: \{1, 2, 3, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  (wariacja z powtórzeniami).

$\bar{\Omega} = \{\omega: \omega = f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}\}$ . Zdarzeń elementarnych jest tyle, ile funkcji,  $\bar{\Omega} = n^k$ . Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi są



rozmięszczenia, w których  $m$  kul jest w pierwszej komórce, a pozostałe  $(k-m)$  kul jest rozmięszczone dowolnie w  $(n-1)$  pozostałych komórkach,  $m$  kul do pierwszej komórki możemy wybrać na  $\binom{k}{m}$  sposobów (w komórce istotny jest tylko zbiór kul, a nie kolejność),  $(k-m)$  kul w  $(n-1)$  pozostałych komórkach możemy rozmięścić na  $(n-1)^{k-m}$  sposobów.

Na podstawie twierdzenia o mnożeniu mamy

$$\bar{A} = \binom{k}{m} \cdot (n-1)^{k-m}, \text{ a stąd}$$

$$P(A) = \frac{\binom{k}{m} \cdot (n-1)^{k-m}}{n^k}.$$

### Zadania.

33. Z okręgu wybieramy 10 różnych punktów. Ile różnych

a) prostych, b) trójkątów wyznaczają te punkty?

34. Ile różnych płaszczyzn można przeprowadzić w przestrzeni trójwymiarowej przez 4 punkty, nie leżące w jednej płaszczyźnie?

35. Ile nastąpi powitań (uścisków dłoni), gdy spotka się jednocześnie  $n$  osób?

36. Gracz w brydża otrzymuje 13 kart. Zakładając, że wszystkie układy są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: gracz otrzyma

- A: dokładnie 2 króle,
- B: dokładnie 5 kart starszych od waleta,
- C: dokładnie 3 karty w kolorze kierowym,
- D: dokładnie 8 kart w jednym kolorze.

37. Spośród liczb 1, 2, ..., 20 losujemy 6 bez zwracania, a następnie ustawiamy je w porządku rosnącym

$x_1 < x_2 < \dots < x_6$ . Zakładając, że wszystkie wyniki losowania są jedna-

kowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

- $A: 5 \leq x_1$ ,
- $B: x_6 \leq 15$ ,
- $C: 5 \leq x_1$  i  $x_6 \leq 15$ ,
- $D: x_2 \leq 3$ .

38. W małym lotku losujemy 5 liczb z 35. Oblicz prawdopodobieństwa trafienia:

a) „piątki”, b) „czwórki”, c) „trójki”.

39. Oblicz prawdopodobieństwa trafienia: a) „trójki”, b) „czwórki”, w toto-lotku.

40. W pudełku znajduje się 40 bezpieczników, w tym 5 wadliwych. Z pudełka wyjęto 8 bezpieczników. Zakładając, że wszystkie wyniki losowania są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

a) A: wśród wyjętych bezpieczników będzie co najmniej jeden wadliwy.

b) B: wśród wyjętych bezpieczników będą dokładnie dwa wadliwe.

41. W  $n$  ( $n \geq 3$ ) ponumerowanych komórkach rozmieszczono losowo  $k$  ponumerowanych kul. Zakładając, że wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

- A: druga komórka będzie pusta,
- B: w trzeciej komórce będzie  $m$  ( $m \leq k$ ) kul,
- C: w pierwszej komórce będzie  $k_1$ , a w drugiej  $k_2$  kul ( $k_1 + k_2 \leq k$ ).



## V. Permutacje z powtórzeniami

W przypadku kombinacji  $k$ -elementowych zbiór  $n$ -elementowy dzieliśmy na dwa podzbiory:  $k$  oraz  $(n-k)$ -elementowy. Rozpatrzmy problem ogólniejszy: chcemy podzielić dany zbiór  $n$ -elementowy na  $m$  podzbiorów, tak aby pierwszy zawierał  $k_1$  elementów, drugi  $k_2$ , ...,  $m$ -ty  $k_m$  elementów,  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . O tym na ile sposobów możemy to zrobić mówi twierdzenie:

**Twierdzenie 4.**

Niech  $k_1, k_2, \dots, k_m$  będą liczbami całkowitymi takimi, że  $k_j \geq 0$  dla  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Liczba różnych sposobów podziału zbioru  $n$ -elementowego na  $m$  podzbiorów, z których pierwszy zawiera  $k_1$  elementów, drugi  $k_2$  elementów itd. jest równa

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} \cdot \binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}{k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

### Dowód.

Aby otrzymać wymagany podział, musimy najpierw wybrać  $k_1$  elementów spośród  $n$  danych (będą one tworzyły pierwszy podzbiór), możemy to zrobić na  $\binom{n}{k_1}$  sposobów; spośród pozostałych  $(n-k_1)$  elementów wybieramy  $k_2$  — drugi podzbiór itd. Po utworzeniu  $(m-1)$  podzbiorów pozostanie nam  $(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}) = k_m$  elementów, które utworzą ostatni zbiór. Na mocy twierdzenia o mnożeniu, liczba sposobów, na które można dokonać tej operacji jest równa

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \dots \\ & \cdot \binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}{k_m} = \\ & = \frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)! \cdot k_2! \cdot (n-k_1-k_2)! \cdot \dots} \\ & \cdot \frac{k_m! \cdot (n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1})!}{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1})!} = \\ & = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \end{aligned}$$

### Przykład 27.

Dla  $k_3 = k_4 = \dots = k_m = 0$  otrzymujemy podział na dwa podzbiory, czyli zwykłe kombinacje.

### Przykład 28. — Brydż.

Przy grze w brydża rozdaje się 52 karty pomiędzy czterech graczy, po 13 kart każdemu, wobec tego liczba różnych sytuacji jest równa

$$\frac{52!}{13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13!} = \frac{52!}{(13!)^4} = (5,36 \dots) \cdot 10^{28}.$$

### Przykład 29.

#### — Kostki do gry

Jednoczesny rzut dwunastoma kostkami do gry może dać  $6^{12}$  różnych wyników i każdemu z nich przypisujemy jednakowe prawdopodobieństwo. Zdarzenie polegające na dwukrotnym pojawieniu się każdej ścianki może zajść



na tyle sposobów, na ile sposobów można je ustawić w sześciu grupach, po dwie w każdej. Wobec tego prawdopodobieństwo otrzymania każdej liczby oczek dwa razy jest równe

$$\frac{12!}{5!7!} = 0,003438...$$

**Przykład 30.**  
— Uporządkowanie  
elementów kilku typów.

W przykładzie 21 rozpatrywaliśmy różne uporządkowania  $k$  elementów typu  $c$  i  $m$  elementów typu  $b$  (elementy tego samego typu były nierozróżnialne). Jaka będzie sytuacja w przypadku  $k_1$  elementów typu  $a_1$ ,  $k_2$  typu  $a_2, \dots, k_m$  typu  $a_m$  (elementy tego samego typu są nierozróżnialne  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ )?

Ile jest różnych uporządkowań tego zbioru, jeżeli dwa uporządkowania uważamy za różne w przypadku, gdy na co najmniej jednym miejscu występują elementy różnych typów. Okazuje się, że jest ich dokładnie tyle samo, co podziałów zbioru  $n$ -elementowego na  $m$  podzbiorów omawianych w ostatnim twierdzeniu. Aby wyznaczyć takie uporządkowanie, należy wskazać  $k_1$  numerów miejsc, na których będą stały elementy typu  $a_1$ , następnie spośród pozostałych  $(n - k_1)$  numerów miejsc wybrać  $k_2$  numerów miejsc dla elementów typu  $a_2$  itd. Omawiane wyżej uporządkowania elementów kilku typów nazywamy permutacjami z powtórzeniami.

### Definición.

Mamy  $k_1$  elementów typu  $a_1$ ,  $k_2$  typu  $a_2$ , ...,  $k_m$  typu  $a_m$  (elementy tego samego typu są nierozróżnialne,  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ).

Każde uporządkowanie tego zbioru nazywamy permutacją z powtórzeniami tego zbioru. Dwa uporządkowania uważamy za różne, jeżeli na co najmniej

jednym miejscu występują elementy różnych typów.

Bepośrednio z twierdzenia 4 i przykłądu 30 otrzymujemy:

## Wniosek.

Liczba różnych permutacji z powtórzeniami  $k_1$  elementów typu  $a_1$ ,  $k_2$  typu  $a_2$ , ...,  $k_m$  typu  $a_m$ ,  $(k_1 + k_2 + \dots + k_m = n)$  jest równa

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

### Przykład 31.

Z cyfr 1, 1, 3, 3, 5 możemy utworzyć

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30 \text{ różnych liczb pięcio-}$$

cyfrowych.

Do wzoru, który otrzymaliśmy w twierdzeniu 4 można również dojść w inny sposób. Pokażemy to na przykładzie.

### Przykład 32.

Siedem osób  $A, B, C, D, E, F$  i  $G$  mamy umieścić w trzech pokojach hotelowych: w pokoju pierwszym (na pierwszym piętrze) dwuosobowym, w pokoju drugim (na drugim piętrze) również dwuosobowym, i w pokoju trzecim (na trzecim piętrze, bez windy) trzyosobowym. Na ile różnych sposobów możemy to zrobić? Załóżmy, że przydzielamy miejsca kolejno, według kolejności zgłoszeń, od dołu do góry, tzn. dwie pierwsze osoby otrzymują miejsca na pierwszym piętrze, dwie następne na drugim, a trzy ostatnie na trzecim piętrze. Siedem osób może przybyć na 7! różnych sposobów. Rozpatrzmy przykładowe rozmieszczenie.

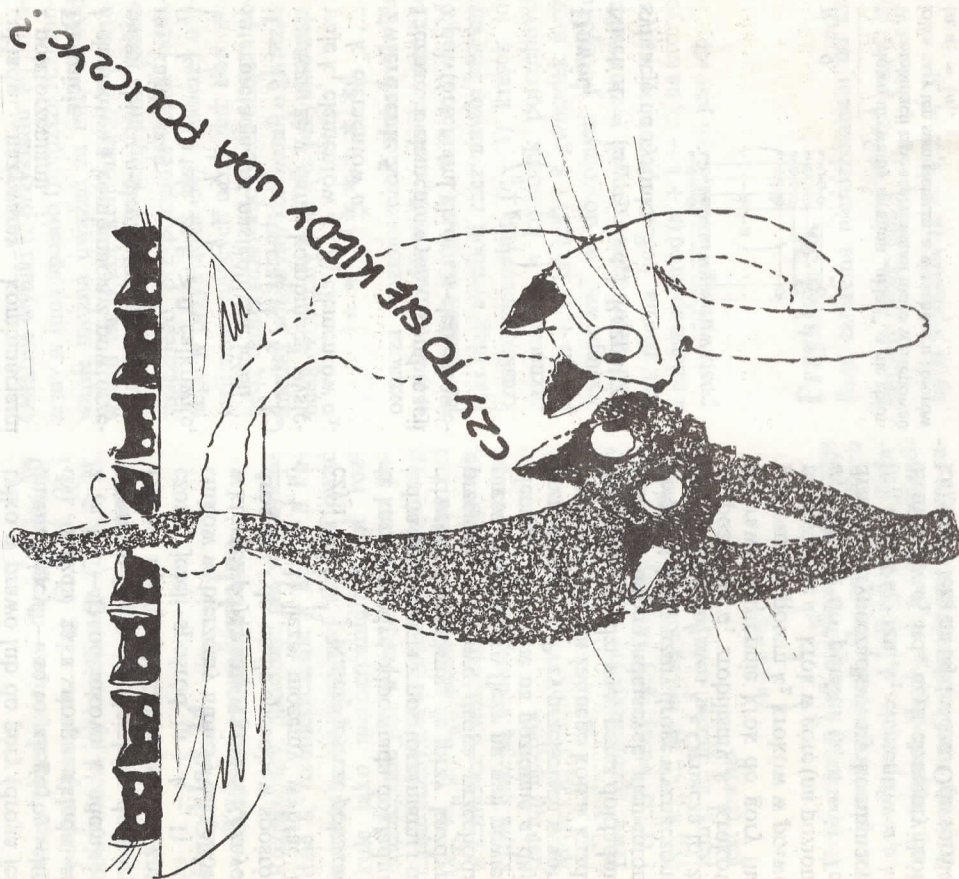
BC pokój I  
AE pokój II  
DFG pokój III

W tym przypadku osoby przybyły w kolejności  $B, C, A, E, D, F, G$  i dlatego  $B$  i  $C$  są w pierwszym pokoju,  $A$  i  $E$  w drugim, a  $D, F$  i  $G$  w trzecim. Łatwo

możemy zauważyć, że gdyby osoby  $B$  i  $C$  umieszczone w pierwszym pokoju przybyły w kolejności odwrotnej tzn. analogiczna. Siedem osób może przy- być na 7! różnych sposobów i stąd otrzymujemy

$$\frac{7i}{2i \cdot 2i \cdot 3i} = \frac{210}{210}$$

drugim i trzecim. W pierwszym pokój u dwóch osób, mogą one przybyć na 2! = 2 sposoby, do drugiego analogicznie na 2! = 2 sposoby, do trzeciego na 3! = 6 sposobów (trzy osoby). Stąd wniosek, że dane rozmieszczenie można było otrzymać na  $2! \cdot 2! \cdot 3!$  sposobów. Dla innych rozmieszczeń sytuacja jest





# VI. Kombinacje z powtórzeniami

W przykładzie 8 omawialiśmy losowanie kul z urny ze zwracaniem, uwzględniając porządek losowania. Co się stanie jeżeli nie będzie nas interesował porządek losowania, a tylko „układ”<sup>\*)</sup> wylosowanych elementów? (elementy oczywiście mogą się powtarzać). Takie „układy” nazywamy kombinacjami z powtórzeniami.

## Definicja.

$k$ -elementową kombinacją z powtórzeniami zbioru  $n$ -elementowego nazywamy każdy ciąg  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  taki, że  $k_j \geq 0$ , całkowite,  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ .

Interpretacją jest następująca: jeżeli  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , to ciąg  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  oznacza, że w danej kombinacji występuje  $k_1$  elementów  $a_1$ ,  $k_2$  elementów  $a_2$ , ...,  $k_n$  elementów  $a_n$ .

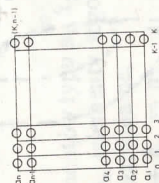
## Twierdzenie 5.

Liczba  $k$ -elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru  $n$ -elementowego jest równa

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

## Dowód.

Niech  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Rozpatrzmy sytuację na rysunku 9.



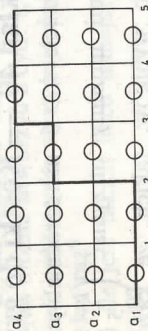
Rys. 9.

<sup>\*)</sup> Celowo używamy terminu „układ”, a nie zbiór. W kombinacji z powtórzeniami może występować kilka razy ten sam element, a w rachunku zbiorów  $\{a, a\} = \{a\}$ .

każdej kombinacji  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  przyporządkujemy drogę opisaną przez ten sam ciąg  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne.

## Przykład 33.

$n = 4, k = 5$ .



Rys. 10.

Droga przedstawiona na rysunku 10 opisana jest przez ciąg  $(2, 0, 1, 2)$  i odpowiada jej kombinacja  $(2, 0, 1, 2)$ , czyli  $a_1, a_1, a_3, a_4, a_4$  — elementy, które na tej drodze leżą.

## Przykład 34.

### — Kule nierozróżnialne.

Rozpatrzmy, podobnie jak w przykładzie 8, rozmieszczenie  $k$  kul w  $n$  komórkach, ale umówmy się traktować kule jako nierozróżnialne, tzn. rozmieszczenie jest wyznaczone przez podanie liczby kul w komórkach, czyli ciąg  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , gdzie  $k_i$  — liczba kul w komórce o numerze  $i$  (nie jest istotne, które kule są w danej komórce, ważna jest ich liczba).

Mamy  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k, k_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$ .

Dwa rozmieszczenia są różne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie ciągi  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  nie są identyczne. Pokażemy, że liczba różnych rozmieszczeń jest równa

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Rozpatrzmy  $k$ -elementowe kombinacje z powtórzeniami elementów zbioru  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Kombinacji zadanej ciągiem  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  przyporządkujemy rozmieszczenie zadane tym sa-

mym ciągiem tzn.  $k_1$  kul w pierwszej komórce,  $k_2$  w drugiej itd. Innymi słowami, jeżeli w kombinacji z powtórzeniami występuje  $k_j$  elementów  $a_j$  tzn., że w komórce o numerze  $j$  jest  $k_j$  kul. Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne, stąd liczba różnych rozmieszczeń jest równa liczbie kombinacji z powtórzeniami, czyli

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

## Przykład 35 (c.d. 34).

### — Kule nierozróżnialne.

Ostatnie wyniki (z przykładu 34) pokazujemy w inny sposób (poniższe rozumowanie można uważać za inny dowód wzoru na liczbę kombinacji z powtórzeniami, na mocy wzajemnie jednoznaczności przyporządkowania podanego w przykładzie 34). Będziemy używali następujących oznaczeń: komórki będą reprezentowane przez miejsca pomiędzy kolejnymi kreskami, a gwiazdki będą oznaczały kule. Na przykład zapis

$$|\star\star|||\star\star\star\star|\star|$$

oznacza rozmieszczenie  $k = 7$  kul w  $n = 5$  komórkach; rozmieszczenie to jest zadane ciągiem  $(2, 0, 0, 4, 1)$ . Każdy taki ciąg symboli zaczyna się i kończy kreską, pozostaje  $(n-1)$  kreskę (do zaznaczenia  $n$  komórek potrzebnych jest  $(n+1)$  kreskę) i  $k$  gwiazdek może występować w dowolnym porządku. Tak więc liczba różnych rozmieszczeń jest równa liczbie sposobów wyboru  $k$  miejsc spośród  $(n+k-1)$ , na których postawimy gwiazdki, czyli jest ich

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

## Przykład 36.

Rzut czterema nierozróżnialnymi monetami może dać  $\binom{4+2-1}{4} = 5$  różnych wyników ( $k = 4, n = 2$ ).



**Przykład 37.**

Rzut  $k$  nierozróżnialnymi kostkami do gry może dać  $\binom{6+k-1}{k} = \binom{5+k}{k}$  różnych wyników ( $k = k, n = 6$ ).

**Przykład 38 (c.d. 35).****— Kule nierozróżnialne.**

Pokażemy, że liczba rozróżnialnych rozmieszczeń, w których żadna komórka nie jest pusta, jest równa  $\binom{k-1}{n-1}$  (dla  $k \geq n$ ). Warunek: żadna komórka nie jest pusta, wyraża się przez żądanie, aby żadne dwie kreski nie sąsiadowały ze sobą (pomiędzy każdymi dwoma kreskami musi być co najmniej jedna gwiazdka). Mamy  $k$  gwiazdek i  $(k-1)$  miejsc między nimi, spośród których  $(n-1)$  jest zajętych przez kreski. Musimy więc spośród  $(k-1)$  miejsc wybrać  $(n-1)$ , na których postawimy kreski, mamy więc  $\binom{k-1}{n-1}$  sposobów wyboru.

Warunek: żadna komórka nie jest pusta, w języku kombinacji z powtórzeniami brzmi: w kombinacji występują wszystkie elementy. Stąd, liczba kombinacji z powtórzeniami  $k$ -elementowych ze zbioru  $n$ -elementowego, w których występują wszystkie elementy jest równa

$$\binom{k-1}{n-1}.$$

**Przykład 39. — Pączki.**

10 pączków możemy podzielić wśród trzech osób na  $\binom{9}{2} = 36$  sposobów, tak aby każdy otrzymał co najmniej jednego pączka.

**Przykład 40. — Kostki do gry.**

Przy rzucie  $k \geq 6$  nierozróżnialnymi kostkami możemy otrzymać  $\binom{k-1}{5}$  różnych wyników, takich, że każda liczba oczek występuje co najmniej raz.

**Zadania**

42. Ile różnych liczb siedmiocyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 2, 2, 3, 4?

43. Na ile różnych sposobów można ustawić w szereg  $b$  białych,  $c$  czarnych i  $n$  niebieskich kul?

44. Zakładając, że wszystkie rozkłady w brydżu są jednakowo prawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ : każdy gracz otrzyma dokładnie jednego asa.

45. Ile różnych rozwiązań ma równanie  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$

a) gdy  $x_1, x_2, x_3, x_4$  są liczbami całkowitymi nieujemnymi,

b) gdy  $x_1, x_2, x_3, x_4$  są liczbami naturalnymi?

46. Ustawiamy w szereg 12 kul białych i 4 czarne. Zakładając, że wszystkie ustawienia są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ : żadne dwie czarne kule nie stoją obok siebie.

**VII. Zadania różne**

47. a) Ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr: 1, 2, 3, 4, jeżeli każda cyfra występuje dokładnie jeden raz?  
b) Ile jest takich liczb mniejszych od 3000?

48. 9 książek, w tym 3 w okładkach zielonych, 2 w czerwonych i 4 w niebieskich ustawiamy na pojedynczej półce.

a) Na ile różnych sposobów możemy umieścić te książki na półce?

b) Na ile różnych sposobów możemy umieścić te książki na półce, jeżeli książki tego samego koloru mają stać obok siebie?

c) Na ile różnych sposobów możemy umieścić te książki na półce, jeżeli oprócz ograniczenia b) chcemy, aby książki czerwone były po lewej stronie książek niebieskich i sąsiadowały z nimi?

49. Ile różnych sygnałów możemy przekazać przy pomocy pięciu spośród siedmiu różnych flag umieszczonych pionowo jedna nad drugą?

50. Młoda dama ma 3 kolory lakieru do paznokci. Na ile różnych sposobów może pomalować paznokcie u rąk (jeżeli paznokcie maluje tylko jednym kolorem), jeżeli na jednej ręce nie mogą być więcej niż dwa kolory?

51. Załóżmy, że pewien kurs jest prowadzony w trzech różnych porach. Jeżeli na kurs zapisało się 15 uczestników, to:

a) Na ile różnych sposobów mogli wybrać godziny zajęć?

b) Na ile różnych sposobów mogą wybrać godziny zajęć tak, aby w każdej grupie było 5 uczestników?

52. Pewien wykładowca przewiduje, że będzie prowadził zajęcia z danego przedmiotu przez 35 lat. Wykładowca, ku uciesze audytorium, opowiada 3 dowcipy (w każdym roku) w ten sposób, że żadnego dowcipu nie powtarza w ciągu dwóch lat.

a) Jaką najmniejszą liczbę dowcipów musi znać wykładowca?

b) Jaką najmniejszą liczbę dowcipów musi znać wykładowca, aby się nigdy nie powtórzył?

53. a) Ile jest różnych sposobów odpowiadzi tak — nie, na dziesięciopytaniowy test, jeżeli połowa odpowiedzi jest trafna?

b) Ile jest sposobów, jeżeli nie ma dwóch kolejnych odpowiedzi identycznych?

54. Wykaż, że prawdziwy jest wzór

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{n-1} + \\ &+ \binom{n}{2} \cdot \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{0} = \\ &= \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2. \end{aligned}$$

55. Pewien student musi wybrać dwa wykłady z sześciu, na które będzie uczęszczał.

a) Ile ma możliwości wyboru?

b) Ile ma możliwości wyboru, jeżeli dwa wykłady odbywają się w tym samym czasie?

56. Trzech instalatorów  $A, B, C$  ma założyć telefony w sześciu mieszkaniach. Ile jest sposobów przydziału mieszkań, jeżeli:

a)  $A$  ma założyć trzy telefony,  $B$  — dwa telefony, a  $C$  — jeden?



b) Jeden z instalatorów ma założyć trzy telefony, drugi dwa, a trzeci jeden?

57. Spośród grupy 9 osób należy wybrać dwa komitety (komitet działający i komitet kontroli). Zasady są następujące:

1) żadna osoba nie może należeć do dwóch komitetów,

2) każdy z komitetów składa się z czterech osób. Na ile różnych sposobów można dokonać tego wyboru?

58. Spośród grupy 20 osób należy wybrać przewodniczącego i dwóch zastępców. Na ile różnych sposobów można dokonać tego wyboru?

59. W grupie jest 20 studentów ocenianych stopniami A, B, C, D i E odpowiednio.

a) Na ile różnych sposobów można ocenić wszystkich studentów w tej grupie?

b) Na ile różnych sposobów można ocenić wszystkich studentów tej grupy, tak aby dwóch otrzymało ocenę A, trzech B, dziesięciu C, czterech D i jeden E?

60. Udowodnij równość

$$\binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$$

dla  $h \geq r \geq k$ .

a) Metodą rachunkową, przez rozpisanie na silnie.

b) Rozpatrując następujące zagadnienie: z grupy  $n$  osób należy wybrać  $r$ -osobową komisję, a następnie spośród członków komisji wyłonić  $k$ -osobowe prezydium; wybory możemy przeprowadzić tak, jak zostało to przedstawione wyżej lub najpierw wybrać  $k$ -osobowe prezydium, a następnie wybrać pozostałych  $(r-k)$  członków komisji.

61. Wykaż, że liczba

$$N = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}, \text{ gdzie}$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$  są różnymi liczbami pierwszymi,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  są liczbami całkowitymi nieujemnymi, ma

$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_n + 1)$  różnych dzielników dodatnich.

62. Na ile różnych sposobów można ustawić na szachownicy osiem wież, tak aby żadne dwie nie „biły” się?

63.  $(n+1)$  ponumerowanych kul rozmieszczono losowo w  $n$  ponumerowanych komórkach. Zakładając, że wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A: wszystkie komórki będą zajęte.

64. Ze zbioru cyfr  $\{1, 2, \dots, 9\}$  losujemy kolejno cztery bez zwracania i tworzymy liczbę czterocyfrową tzn. pierwsza jest liczbą tysięcy, druga setek, trzecia dziesiątek, czwarta jedności. Zakładając, że wszystkie wyniki losowania są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A: otrzymana liczba będzie parzysta, b) B: otrzymana liczba będzie podzielna przez 25,

c) C: otrzymana liczba będzie mniejsza od 3456.

65. Zakładając, że wszystkie wyniki losowania w toto-lotku (6 z 49) są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A: nie zostaną wylosowane dwie kolejne liczby.

66. Zakładając, że wszystkie możliwe uporządkowania talii złożonej z 52 kart są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A: żadne dwa asy nie występują obok siebie.

67. Gracz w brydża otrzymuje 13 kart z talii 52 kart. Zakładając, że wszystkie układy są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: gracz otrzyma:

a) A: co najmniej jednego asa,

b) B: układ 5-4-3-1,

c) C: układ 4-4-3-2,

d) D: karty różnych wartości.

68. Do windy dwunastopiętrowego domu wsiada na parterze 6 osób. Zakładając, że wszystkie możliwe sposoby

wysiadania pasażerów na pietrach są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

a) A: wszyscy wysiądą na tym samym piętrze,

b) B: wszyscy wysiądą na dokładnie dwóch pietrach,

c) C: wszyscy wysiądą na różnych pietrach.

69. W turnieju uczestniczy 16 zawodników, których podzielono losowo na dwie grupy po 8 osób. Zakładając, że wszystkie sposoby podziału są jedna-

kowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A: dwóch najlepszych zawodników znajdzie się w tej samej grupie.

70. Zbiór liczb  $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$  został uporządkowany w sposób losowy. Zakładając, że wszystkie uporządkowania są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A: liczby o numerach parzystych występują na miejscach o numerach parzystych.



### Zadanie 180

Wykaż, że jeżeli dwa okręgi są styczne zewnętrznie, to dowolna styczna do



# Odpowiedzi do zadań

2.  $4 \cdot 3 = 12$ .

3.  $30 \cdot 30 = 900$ .

4.  $3 \cdot 4 = 12$ .

5.  $32 \cdot 32 = 1024$ .

6.  $64 \cdot 14 = 896$ .

7.  $5 \cdot 4 = 20$ .

8.  $6 \cdot 8 \cdot 12 = 576$ .

9. Porównaj przykład 9; odp.  $3^6 = 729$ .

10. Porównaj przykład 9; odp.  $2^5 = 32$ .

11. Porównaj przykład 9; odp.  $3^{10} = 59049$ .

12. Porównaj przykład 5;

odp.  $6 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ .

13.  $5^9 = 1953125$ .

14. a)  $P(A) = \frac{1}{10}$ , b)  $P(B) = \frac{1}{10000}$ .

c)  $P(C) = \frac{1}{10}$ .

d) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

Odnp.  $P(D) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 = 0,468559$ .

e)  $P(E) = \left(\frac{5}{10}\right)^6 = \frac{1}{64} = 0,015625$ .

15. a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

Odnp.  $P(A) = 1 - \frac{5}{6^4} = 0,9961\dots$ .

b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

$P(B) = 1 - \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{15}{16} = 0,9375$ .

16. a)  $P(A) = \frac{1}{2}$ , b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

Odnp.  $1 - \frac{9}{2^8} = 0,9648\dots$

17.  $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,16(6)$ .

18. a)  $P(A) = \frac{4^{10}}{5^{10}} = \frac{1}{5^9}$ .

b)  $P(B) = \frac{4^{10}}{5^{10}} = 0,1073741\dots$ .

c) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

Odnp.  $P(C) = 1 - \frac{4^{10}}{5^{10}} = 0,8926258\dots$ .

19.  $5! = 120$ .

20. a)  $5! = 120$ , b)  $10 \cdot 3! = 60$ ,

c)  $2^5 = 32$ .

21. a)  $3 \cdot 3 = 9$ , b)  $3 \cdot 2 = 6$ .

22.  $3 \cdot 2^9 = 1536$ .

23. a)  $\frac{7!}{7 \cdot 2} = 360$ , b) 1, c) 3.

24.  $4 \cdot 3 - 1 = 1048575$ .

25. a)  $13^4 = 28561$ ,

b)  $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$ .

26.  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ .

27. a)  $6^3 = 216$ , b)  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ ,

c)  $3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 91 = 6^3 - 5^3$ ,

d)  $3 \cdot 6^2 = 108$ .

28. a) Porównaj z przykładem 19, najpierw ustal kolejność.

Odnp.  $P(A) = \frac{10!}{2 \cdot 9!} = \frac{1}{5}$ ,

b) Najpierw ustal kolejność.

Odnp.  $P(B) = \frac{10!}{8 \cdot 3! \cdot 7!} = \frac{1}{15} = 0,06(6)$ ,

c)  $P(C) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{9} = 0,1(1)$ .

29. Zauważ, że ustawienie musi być postaci nnpnp.

Odnp.  $P(A) = \frac{2! \cdot 3! \cdot 1}{5!} = \frac{1}{10}$ .

30. a) Porównaj z przykładem 19 i zadaniem 28 a, b.

Odnp.  $P(A) = \frac{m! \cdot (n-m+1)!}{n!}$ ,

b) Porównaj z przykładem 19 i zadaniem 28 c.

Odnp.  $P(B) = \frac{2 \cdot (n-k-1) \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2(n-k-1)}{n \cdot (n-1)}$ .

31. a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

Odnp.  $P(D) = 1 - \left(\frac{13}{52}\right)^3 = 0,2559\dots$ .

d) Zdarzenie D jest sumą czterech zdarzeń parami rozłącznych: gracz otrzyma 8 pików lub 8 kierów, lub 8 kar, lub 8 trefli.

Odnp.  $P(D) = \frac{4 \cdot \binom{13}{8} \cdot \binom{39}{5}}{\binom{52}{13}} = 0,00025\dots$ .

32. a)  $P(A) = \frac{n(n-1)^{k-1}}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ .

Porównaj z przykładem 14.

Odnp.  $P(B) = \frac{n!}{(n-k)! n^k}$ .

33. a)  $\binom{10}{2} = 45$ , b)  $\binom{10}{3} = 120$ .

34.  $\binom{4}{3} = 4$ .

35.  $\binom{n}{2}$ .

36. Porównaj z przykładem 24.

a)  $P(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} = 0,21135\dots$ ,

b)  $P(B) = \frac{\binom{12}{5} \cdot \binom{40}{8}}{\binom{52}{13}} = 0,0959\dots$ ,

c)  $P(C) = \frac{\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{10}}{\binom{52}{13}} = 0,2559\dots$ .

d) Zdarzenie D jest sumą czterech zdarzeń parami rozłącznych: gracz otrzyma 8 pików lub 8 kierów, lub 8 kar, lub 8 trefli.

Odnp.  $P(D) = \frac{4 \cdot \binom{13}{8} \cdot \binom{39}{5}}{\binom{52}{13}} = 0,00025\dots$ .

37. Porównaj z przykładem 24.

a)  $P(A) = \frac{\binom{16}{6}}{\binom{20}{6}} = 0,2066\dots$ ,

b)  $P(B) = \frac{\binom{15}{6}}{\binom{20}{6}} = 0,1291\dots$ ,

c)  $P(C) = \frac{\binom{11}{6}}{\binom{20}{6}} = 0,01192\dots$ ,

d) Zdarzenie D jest sumą dwóch zdarzeń rozłącznych.

$D = \{x_2 = 2\} \cup \{x_2 = 3\}$ .

Odnp.  $P(D) = \frac{\binom{18}{4} + 2 \cdot \binom{17}{4}}{\binom{20}{6}} = 0,2018\dots$ .

38. a)  $P(\text{„piątki”}) = \frac{1}{\binom{35}{6}} = \frac{1}{324632}$ ,

b)  $P(\text{„czwórki”}) = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{30}{1}}{\binom{35}{5}} = 0,00046\dots$ ,

c)  $P(\text{„trójki”}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{35}{5}} = 0,01339\dots$ .

39. a)  $P(\text{„trójki”}) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0,0176\dots$ .



$$b) P(\text{"czwórki"}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0,00096...$$

40. a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

$$\text{Odp. } P(A) = 1 - \frac{\binom{35}{8}}{\binom{40}{8}} = 0,5884...$$

$$b) P(B) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{35}{6}}{\binom{40}{8}} = 0,2111...$$

$$41. a) P(A) = \frac{(n-1)^k}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k,$$

$$b) P(B) = \frac{\binom{k}{m} \cdot (n-1)^{k-m}}{n^k},$$

$$c) P(C) = \frac{\binom{k}{k_1} \cdot \binom{k-k_1}{k_2} \cdot (n-2)^{(k-k_1-k_2)}}{n^k}.$$

$$42. \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = 420.$$

$$43. \frac{b! \cdot c! \cdot n!}{(b+c+n)!}.$$

$$44. P(A) = \frac{4! \cdot 48! \cdot (13!)^4}{(12!)^4 \cdot 52!} = 0,105...$$

45. Porównaj ten problem z zagadnieniem rozmieszczenia 20 kul nierozróżnialnych w 4 komórkach.  
Odpowiedź:

$$a) \binom{20+4-1}{20} = 1771,$$

$$b) \binom{20-1}{4-1} = 969.$$

46. Porównaj z przykładem 38.

$$\text{Odp. } P(A) = \frac{\binom{13}{4}}{\binom{16}{4}} = 0,3928...$$

$$47. a) 4! = 24, b) 2 \cdot 3! = 12.$$

$$48. a) \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260,$$

$$b) 3! = 6, c) 2.$$

$$49. \frac{7!}{(7-5)!} = 2520.$$

$$50. \left[ \binom{3}{2} \cdot (2^5 - 1) \right]^2 = 8649.$$

$$51. a) 3^{15} = 14348907,$$

$$b) \frac{15!}{(5!)^3} = 756756.$$

$$52. a) 6, b) 105.$$

$$53. a) \binom{10}{5} = 252, b) 2.$$

54. Rozważ doświadczenie polegające na losowaniu  $n$  kul spośród  $n$  kul białych i  $n$  kul czarnych.

$$55. a) \binom{6}{2} = 15, b) \binom{4}{2} + 2 \cdot 4 = 14.$$

$$56. a) \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60,$$

$$b) 3! \cdot 60 = 360.$$

$$57. \frac{\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{4}}{\binom{4}{4} \cdot 4! \cdot 1!} = \frac{9!}{4! \cdot 4! \cdot 1!}.$$

$$58. 20 \cdot \binom{19}{2} = 3420.$$

$$59. a) 5^{20}, b) \frac{20!}{2! \cdot 3! \cdot 10! \cdot 4! \cdot 1!}.$$

60. Wskazówka: Skorzystaj z definicji współczynnika dwumianowego.

61. Zobacz przykład 5.

$$62. 8! = 40320.$$

$$63. \frac{\binom{n}{2} \cdot n!}{n^k}.$$

$$64. a) P(A) = \frac{4}{9} = 0,4(4),$$

$$b) P(B) = \frac{2}{9 \cdot 8} = 0,027(7),$$

$$c) P(C) = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 0,2546...$$

$$65. P(A) = \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} = 0,5048...$$

$$66. P(A) = \frac{\binom{49}{4}}{\binom{52}{4}} = 0,7826...$$

$$67. a) P(A) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} = 0,6961...,$$

$$b) P(B) = \frac{4! \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{52}{13}},$$

$$c) P(C) = \frac{4 \cdot 3 \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{2}}{\binom{52}{13}},$$

$$d) P(D) = \frac{4^{13}}{\binom{52}{13}} = 0,0001...$$

$$68. a) P(A) = \frac{12}{12^6} = 0,000004...$$

$$b) P(B) = \frac{\binom{12}{2} \cdot [2^6 - 2]}{12^6} = 0,00137...$$

$$c) P(C) = \frac{12!}{6! \cdot 12^6} = 0,2228...$$

$$69. P(A) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{14}{6} + \binom{2}{0} \cdot \binom{14}{9}}{\binom{16}{8}} = 0,46(6).$$

$$70. P(A) = \frac{n! \cdot (n+1)!}{(2n+1)!}.$$



# ELEMENTY KOMBINATORYKI

Edward Ślachowski

