

Moc testu

Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia H_0 , gdy prawdziwa jest H_A (=czułość testu).

Błąd I i II rodzaju

	H_0 prawdziwa	H_A prawdziwa
odrzucaamy H_0	błąd I rodzaju	prawidłowa decyzja
nie odrzucaamy H_0	prawidłowa decyzja	błąd II rodzaju

- błąd I rodzaju = poziom istotności (α)
- błąd II rodzaju = $1 - \text{moc testu}$ (β)

Przykład 1

Badamy, czy sześciomiesięczny program ćwiczeń powoduje zwiększenie zmineralizowania kości u młodych kobiet. Bazując na wcześniejszych badaniach przyjmujemy $\sigma = 2$ dla procentowej zmiany zmineralizowania kości w ciągu sześciu miesięcy.

Przyjmujemy, że zmiana o 1% jest już istotna, tzn. chcemy mieć rozsądną szansę na wykrycie zmiany takiej lub większej.

Przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Czy 25 osób to wystarczająca grupa dla takiego eksperymentu?

$$H_0 : \mu = 0$$

$$H_A : \mu > 0$$

$$\text{Statystyka testowa: } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 0}{2 / \sqrt{25}}$$

Odrzucamy H_0 na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, gdy $z \geq 1.65$, czyli $\bar{x} \geq 0.66$.

Moc testu do wykrycia alternatywy $\mu = 1$ to prawdopodobieństwo, że H_0 będzie odrzucona, gdy faktycznie $\mu = 1$, czyli

$$P(\bar{x} \geq 0.66 | \mu = 1) = P(Z \geq -0.85) = 0.8023$$

Przykład 2

Chcemy ustalić, czy średni czas spędzany przed telewizorem przez studentów różni się od średniej dla wszystkich mieszkańców USA w przedziale wiekowym 18 do 24 lat (która wynosi 18.5 godziny). Przeprowadzono ankietę wśród 8 losowo wybranych studentów uzyskując wyniki $\bar{x} = 14.5$, $s = 14.854$. Przyjęto poziom istotności $\alpha = 0.05$.

$$H_0 : \mu = 18.5$$

$$H_A : \mu \neq 18.5$$

$$\text{Statystyka testowa } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{14.5 - 18.5}{14.854/\sqrt{8}} \approx -0.762$$

P -wartość wynosi 0.4711, czyli nie możemy odrzucić hipotezy zerowej.

Przykład 3

Ponawiamy badanie, ale na grupie 50 studentów. Czy taki test ma odpowiednią moc, jeśli średnia dla populacji studentów jest o 4 godziny mniejsza od średniej dla wszystkich mieszkańców w przedziale 18 do 24 lat?

$$H_0 : \mu = 18.5$$

$$H_A : \mu < 18.5$$

Odrzucimy H_0 na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, jeśli statystyka testowa $t = \frac{\bar{x} - 18.5}{s/\sqrt{50}}$ jest mniejsza niż -1.676 . Przyjmując $\sigma = s = 17.5$ otrzymujemy:

$$\frac{\bar{x} - 18.5}{17.5/\sqrt{50}} \leq -1.676 \text{ czyli } \bar{x} \leq 14.35$$

Moc testu wynosi:

$$P(\bar{x} \leq 14.35 | \mu = 14.5) = P(Z \leq -0.061) = 0.4761$$

Moc testu zależy od:

- poziomu istotności α ,
- wielkości efektu, jaki chcemy wykryć,
- rozmiaru próby,
- odchylenia standardowego

Powtórzymy wyliczenia mocy testu dla grupy 200 studentów:
Odrzucimy H_0 na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, jeśli statystyka testowa $t = \frac{\bar{x} - 18.5}{s/\sqrt{200}}$ jest mniejsza niż -1.660 . Przyjmując $\sigma = s = 17.5$ otrzymujemy:

$$\frac{\bar{x} - 18.5}{17.5/\sqrt{200}} \leq -1.660 \text{ czyli } \bar{x} \leq 16.45$$

Moc testu wynosi:

$$P(\bar{x} \leq 16.45 | \mu = 14.5) = P(Z \leq 1.58) = 0.9429$$

Powtórzymy wyliczenia mocy testu dla poziomu istotności $\alpha = 0.1$:
Odrzucimy H_0 na poziomie istotności $\alpha = 0.1$, jeśli statystyka testowa $t = \frac{\bar{x} - 18.5}{s/\sqrt{50}}$ jest mniejsza niż -1.299 . Przyjmując $\sigma = s = 17.5$ otrzymujemy:

$$\frac{\bar{x} - 18.5}{17.5/\sqrt{50}} \leq -1.299 \text{ czyli } \bar{x} \leq 15.29$$

Moc testu wynosi:

$$P(\bar{x} \leq 15.29 | \mu = 14.5) = P(Z \leq 0.320) = 0.6255$$

Przykład

Obliczmy moc testu dla sytuacji, gdy średnia dla populacji studentów jest o 6 godzin mniejsza od średniej dla wszystkich mieszkańców w przedziale 18 do 24 lat.

Odrzucimy H_0 na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, jeśli statystyka testowa $t = \frac{\bar{x} - 18.5}{s/\sqrt{50}}$ jest mniejsza niż -1.676 . Przyjmując $\sigma = s = 17.5$ otrzymujemy:

$$\frac{\bar{x} - 18.5}{17.5/\sqrt{50}} \leq -1.676 \text{ czyli } \bar{x} \leq 14.35$$

Moc testu wynosi:

$$P(\bar{x} \leq 14.35 | \mu = 12.5) = P(Z \leq 0.748) = 0.7734$$