

Trzy podstawowe typy testów Studenta:

- 1 test dla jednej próby
- 2 test dla dwóch niezależnych prób
- 3 test dla dwóch prób zależnych (dla par)

Mają podobną strukturę, ale nieco różne hipotezy i statystyki testowe. Każdy z tych testów może być :

- kierunkowy (alternatywa jednostronna)
- niekierunkowy (alternatywa dwustronna)

Test Studenta dla pojedynczej próby

Przykład 1a (test niekierunkowy)

Czy średnia prędkość aut na ul. Podwale jest różna od 50 km/h?

Przykład 1b (test kierunkowy)

Czy średnia prędkość aut na ul. Podwale jest większa od 50 km/h?

Przykład 1c (test kierunkowy)

Czy średnia prędkość aut na ul. Podwale jest mniejsza od 50 km/h?

Decyzja o rodzaju hipotezy alternatywnej (kierunkowa lub niekierunkowa) powinna być podjęta zanim spojrzymy na dane liczbowe zebrane dla jej weryfikacji. Decyzja ta może być podjęta np. na podstawie danych historycznych, profilu zainteresowań, ogólnych oczekiwań.

Test Studenta dla pojedynczej próby

Zmierzono prędkości 32 aut przejeżdżających ulicą Podwale otrzymując następujące dane:

$$\bar{y} = 66 \text{ km/h} \quad s = 5.5 \text{ km/h}$$

Wyznaczamy statystykę testową:

$$t_s = \frac{\bar{y} - \mu_0}{SE_{\bar{y}}} = \frac{16}{5.5/\sqrt{32}} = 16.5$$

Stujemy rozkład Studenta z $n - 1 = 31$ stopniami swobody.

Test Studenta dla pojedynczej próby

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$:

- (1a) Hipoteza $H_0: \mu = 50$. Hipoteza $H_A: \mu \neq 50$. Obszar krytyczny to $(-\infty, t_{-0.025}) \cup (t_{0.025}, \infty) = (-\infty, -2.042) \cup (2.042, \infty)$
- (1b) Hipoteza $H_0: \mu = 50$. Hipoteza $H_A: \mu > 50$. Obszar krytyczny to $(t_{0.05}, \infty) = (1.697, \infty)$
- (1c) Hipoteza $H_0: \mu = 50$. Hipoteza $H_A: \mu < 50$. Obszar krytyczny to $(-\infty, t_{-0.05}) = (-\infty, -1.697)$

Test Studenta dla dwóch niezależnych prób

Przykład 2 (niekierunkowy)

Wybrano losowo 14 pacjentów chorych na artretyzm i utworzono grupę kontrolną z 17 zdrowych dorosłych osób. U każdej z badanych osób zmierzono poziom G6PD we krwi. Otrzymano następujące wyniki (w jednostkach/gram Hgb (hemoglobiny)):

poziom G6PD	chorzy	zdrowi
średnia	17.8	12.3
odchylenie standardowe	3.2	2.84

Zakładając, że poziom G6PD w badanych populacjach ma w przybliżeniu rozkład normalny, porównaj średnie poziomy G6PD u osób chorych na artretyzm i u osób zdrowych (użyj testu Studenta i $df = n_1 + n_2 - 2$). Czy obecność enzymu G6PD jest związana z rozwojem artretyzmu?

Test Studenta dla dwóch niezależnych prób

Oznaczmy: μ_1 – średni poziom G6PD u osób chorych i

μ_2 – średni poziom G6PD u osób zdrowych

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$

Wyznaczamy statystykę testową:

$$t_s = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{(N)SE} = \frac{17.8 - 12.3}{\sqrt{(3.2/\sqrt{14})^2 + (2.84/\sqrt{17})^2}} = 5.80$$

Stujemy rozkład Studenta z $n_1 + n_2 - 2 = 29$ stopniami swobody.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ obszar krytyczny to

$(-\infty, t_{-0.025}) \cup (t_{0.025}, \infty) = (-\infty, -2.045) \cup (2.045, \infty)$

Test Studenta dla dwóch niezależnych prób

Przykład 3 (kierunkowy)

Lekarstwo uśmierzające ból zostało przetestowane na grupie 50 kobiet cierpiących na bóle poporodowe. 25 losowo wybranych kobiet dostało lekarstwo, a pozostałe 25 kobiet – placebo. Dla każdej kobiety otrzymano wskaźnik uśmierzenia bólu w oparciu o wyniki codziennych wywiadów. Zakres wskaźnika: od 0 (ból bez zmian) do 56 (całkowite uśmierzenie bólu na 8 godzin). Zweryfikuj przydatność leku przeciwbólowego.

wskaźnik uśmierzania bólu	placebo	lekarstwo
średnia	25.32	31.96
odchylenie standardowe	12.05	13.78

Czy lekasstwo redukuje ból (bardziej efektywnie niż placebo)?

Test Studenta dla dwóch niezależnych prób

Oznaczmy:

μ_1 – wskaźnik uśmierzania bólu u przyjmujących placebo i

μ_2 – wskaźnik uśmierzania bólu u przyjmujących lekarstwo

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_A: \mu_1 < \mu_2$

Wyznaczamy statystykę testową:

$$t_s = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{(N)SE} = \frac{25.32 - 31.96}{\sqrt{(12.05/\sqrt{25})^2 + (13.78/\sqrt{25})^2}} = -1.81$$

Stujemy rozkład Studenta z $n_1 + n_2 - 2 = 48$ stopniami swobody.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ obszar krytyczny to

$(-\infty, t_{-0.05}) = (-\infty, -1.676)$

Test Studenta dla dwóch zależnych prób

Przykład 4 (niekierunkowy)

Do produkcji podeszew butów używamy dwóch różnych materiałów: A i B. Chcemy sprawdzić, czy szybkość zużycia butów jest jednakowa dla obu materiałów. Wykonujemy eksperyment w oparciu o zużycie podeszew w butach noszonych przez 10 chłopców. Każdy chłopiec ma w jednym bucie podeszwę z materiału A, a w drugim – z materiału B. Randomizujemy (połowa ma A w lewym bucie, a połowa – w prawym). Otrzymujemy wyniki:

chłopiec	A	B	A-B
1	13.2	14.0	-0.8
2	8.2	8.8	-0.6
...	...	...	...
10	13.3	13.6	-0.3
średnia	10.63	11.04	-0.41
odchylenie standardowe			0.38

Test Studenta dla dwóch zależnych prób

Wprowadzamy nową zmienną $d = Y_1 - Y_2$ i wyznaczamy $srednia(d)$, $SD(d)$, $SE(d)$.

$H_0: \mu_d = 0$, $H_A: \mu_d \neq 0$

Wyznaczamy statystykę testową:

$$t_s = \frac{-0.41}{0.38/\sqrt{10}} = -3.41$$

Stujemy rozkład Studenta z $n - 1 = 9$ stopniami swobody.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ obszar krytyczny to

$$(-\infty, t_{-0.025}) \cup (t_{0.025}, \infty) = (-\infty, -2.262) \cup (2.262, \infty)$$

Test Studenta dla dwóch zależnych prób

Co się stanie, jeżeli wykonamy test Studenta dla prób niezależnych?

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

Wyznaczamy statystykę testową:

$$t_s = \frac{10.63 - 11.04}{1.11} = -0.369$$

Bardzo różne SE: 0.12 dla par (zależnych prób) oraz 1.11 dla dwóch niezależnych prób.

Przed przystąpieniem do testowania należy wybrać poziom istotności α . Odrzucamy H_0 , gdy statystyka testowa jest istotna, tzn. znajduje się w obszarze odrzuceń.

Przykład

Stosujemy dwustronny test Studenta z 18 stopniami swobody na poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Wartość krytyczna to 2.101. Statystyka testowa wyliczona w oparciu o dane wynosi $t = 2.3$.

Dla $\alpha = 0.01$ wartość krytyczna wynosiłaby 2.878. Zatem hipoteza będzie odrzucona na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, ale nie będzie odrzucona na poziomie istotności $\alpha = 0.01$.

P-wartość

P-wartość to prawdopodobieństwo, że przy prawdziwej hipotezie zerowej wartość statystyki przyjmie wartość bardziej ekstremalną niż zaobserwowana w danej próbie.

W naszym przykładzie P-wartość wynosi 0.034.

- Jeśli $P\text{-wartość} \leq \alpha$ to odrzucamy hipotezę H_0 .
- Jeśli $P\text{-wartość} > \alpha$ to nie odrzucamy hipotezy H_0 .

„Badanie na poziomie istotności 0.05 potwierdza (P-wartość = 0.034), że ...”