

Spis treści

0	Układy równań	3
1	Wektory na płaszczyźnie	7
1.1	Pojęcie wektora	7
1.2	Równanie prostej	22
1.3	Iloczyn skalarny	28
1.4	Wyznacznik	41
2	Przekształcenia płaszczyzny	51
2.1	Przekształcenia liniowe i afiniczne	51
2.2	Macierze	66
2.3	Składanie przekształceń	77
2.4	Izometrie płaszczyzny	86
2.5	Przekształcenia różnowartościowe i „na”	93
2.6	Przekształcenie odwrotne	103
3	Diagonalizacja macierzy 2×2	109
3.1	Wartości własne i wektory własne	109
3.2	Diagonalizacja macierzy	116
4	Zamiana układu współrzędnych na płaszczyźnie	123
4.1	Nowy układ współrzędnych	123
4.2	Krzywe drugiego stopnia	131
5	Liczby zespolone	139
5.1	Działania na liczbach zespolonych	139
5.2	Wielomiany zespolone	149
6	Wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	159
6.1	Wektory, proste i płaszczyzny	159
6.2	Iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy	171
6.3	Wyznacznik i macierz odwrotna	179
7	Przekształcenia przestrzeni $\mathbb{R}^3$	189
7.1	Przekształcenia liniowe i afiniczne	189
7.2	Macierz przekształcenia	197
8	Diagonalizacja macierzy 3×3	205
8.1	Wektory własne i wartości własne	205
8.2	Diagonalizacja macierzy	211
9	Zamiana układu współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	215
9.1	Nowy układ współrzędnych	215

Zadania	221
Odpowiedzi	271

Rozdział 0

Układy równań

Jedną z kluczowych metod algebry jest opis problemu matematycznego w terminach niewiadomych i równań (zapisywanych w formie układu równań). Rozwiązywanie problemu sprowadza się wówczas do znalezienia wszystkich rozwiązań układu równań, którą to czynność można dość mocno zalgorytmizować.

Podstawową metodą rozwiązywania wszelkich układów równań jest *metoda podstawiania*. W szkole jest ona stosowana do rozwiązywania układów dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi, ale jej zakres stosowania jest znacznie szerszy – obejmuje dowolną liczbę równań i niewiadomych oraz nie ogranicza się do równań liniowych (niemniej w ramach algebry liniowej będziemy mieć do czynienia niemal wyłącznie z równaniami liniowymi).

Algorytm 0.1: Metoda podstawiania

Rozwiązując układ n równań (niekoniecznie liniowych) z n niewiadomymi postępujemy następująco:

Krok 1 Wyznaczamy dowolnie wybraną niewiadomą z dowolnie wybranego równania i podstawiamy do **wszystkich** pozostałych równań. W ten sposób otrzymujemy układ $n - 1$ równań z $n - 1$ niewiadomymi.

Krok 1 powtarzamy $n - 1$ razy, za każdym razem zmniejszając o 1 liczbę równań i równocześnie zmniejszając o 1 liczbę niewiadomych.

Krok 2 Iteracje Kroku 1 prowadzą do 1 równania z 1 niewiadomą. Rozwiązujemy to równanie, wyznaczając w ten sposób jedną (spośród n początkowych) niewiadomych.

Krok 3 Wykorzystujemy podstawienia z kolejnych iteracji Kroku 1 (zaczynając od ostatniego, a kończąc na pierwszym) dla wyznaczenia pozostałych $n - 1$ niewiadomych.

Stosując powyższy algorytm pamiętamy, że co prawda w każdej iteracji Kroku 1 można wybrać dowolne (z pozostałych) równań i dowolną (z pozostałych) niewiadomych, niemniej najlepiej dokonywać takich wyborów, które zminimalizują stopień komplikacji obliczeń.

Przykład 1

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 3y + 2z + 7t = 2 \\ -2x - y - 3z + 2t = -2 \\ x + 4y + 4z + 3t = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania i podstawiamy do trzech pozostałych równań (Krok 1):

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 3y + 2z + 7t = 2 \\ -2x - y - 3z + 2t = -2 \\ x + 4y + 4z + 3t = -3 \end{cases} \xrightarrow{x=1-y-z-t} \begin{cases} (1 - y - z - t) + 3y + 2z + 7t = 2 \\ -2(1 - y - z - t) - y - 3z + 2t = -2 \\ (1 - y - z - t) + 4y + 4z + 3t = -3 \end{cases}$$

Po uproszczeniu równań, wyznaczamy niewiadomą y z drugiego z trzech równań i podstawiamy do obu pozostałych (Krok 1):

$$\begin{cases} 2y + z + 6t = 1 \\ y - z + 4t = 0 \\ 3y + 3z + 2t = -4 \end{cases} \xrightarrow{y=z-4t} \begin{cases} 2(z - 4t) + z + 6t = 1 \\ 3(z - 4t) + 3z + 2t = -4 \end{cases}$$

Po uproszczeniu równań, wyznaczamy niewiadomą t z pierwszego z dwóch równań i podstawiamy do jednego pozostałego (Krok 1):

$$\begin{cases} 3z - 2t = 1 \\ 6z - 10t = -4 \end{cases} \xrightarrow{t=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}} 6z - 10(\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}) = -4$$

Upraszczamy i rozwiązujemy otrzymane jedno równanie z jedną niewiadomą (Krok 2):

$$-9z + 5 = -4 \quad \rightarrow \quad z = 1$$

Wykorzystujemy zastosowane podstawienia (w kolejności od ostatniego do pierwszego) do wyliczenia pozostałych niewiadomych (Krok 3):

$$\begin{cases} z = 1 \\ t = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} = 1 \\ y = z - 4t = -3 \\ x = 1 - y - z - t = 2 \end{cases}$$

Metoda podstawiania nadaje się również do rozwiązywania układów równań nieliniowych:

Przykład 2

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ x + y - z = 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy niewiadomą z z trzeciego równania i podstawiamy do obu pozostałych równań:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ x + y - z = 5 \end{cases} \xrightarrow{z=x+y-5} \begin{cases} 2x + y - 3(x + y - 5) = 12 \\ x^2 + y^2 + (x + y - 5)^2 = 21 \end{cases}$$

Po uproszczeniu pierwszego równania wyznaczamy z niego niewiadomą y i podstawiamy do

jedynego pozostałego równania:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 + (x + y - 5)^2 = 21 \end{cases} \xrightarrow{x=3-2y} (3-2y)^2 + y^2 + (-y-2)^2 = 21$$

Rozwiązujemy otrzymane jedno równanie z jedną niewiadomą:

$$6y^2 - 8y - 8 = 0 \rightarrow y = 2 \text{ lub } y = -\frac{2}{3}$$

Wykorzystujemy zastosowane podstawienia (w kolejności od ostatniego do pierwszego) do wyliczenia pozostałych niewiadomych:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 - 2y = -1 \\ z = x + y - 5 = -4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 3 - 2y = \frac{13}{3} \\ z = x + y - 5 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Rachunki wykonywane przy realizacji Algorytmu 0.1 czasami istotnie upraszczają się, jeśli wcześniej odpowiednio „przygotujemy” rozwiązywany układ równań. Jest to szczególnie istotne, gdy nie jest to układ równań liniowych. Pomaga w tym następujący fakt:

Fakt 0.2

Jeśli do wybranego równania układu równań dodamy lub od niego odejmiemy inne równanie tego układu, to otrzymamy równoważny układ równań (tzn. układ mający takie same rozwiązanie co oryginalny).

Przykład 3

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Odejmując drugie równanie od pierwszego i trzeciego otrzymujemy równoważny układ złożony z dwóch równań liniowych i jednego kwadratowego (zamiast trzech równań kwadratowych):

$$\begin{cases} (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 - 2z + 1) = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 6z + 9) = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 6y - 2z = -16 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ -4x - 2y + 6z = -22 \end{cases}$$

Otrzymany układ równań (po uproszczeniu) rozwiązujemy metodą podstawiania:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ -2x - y + 3z = -11 \end{cases} \xrightarrow{x=8-3y-z} \begin{cases} (8-3y-z)^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ -2(8-3y-z) - y + 3z = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (8-3y-z)^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ 5y + 5z = 5 \end{cases} \xrightarrow{y=1-z} \begin{cases} (5+2z)^2 + (1-z)^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$

$$6z^2 + 18z + 12 = 0 \rightarrow z = -1 \text{ lub } z = -2$$

Skąd dostajemy dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = 1 - z = 2 \\ x = 8 - 3y - z = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} z = -2 \\ y = 1 - z = 3 \\ x = 8 - 3y - z = 1 \end{cases}$$

Fakt 0.2 można uogólnić dopuszczając dodawanie lub odejmowanie również niezerowej *krotności* innego równania:

Fakt 0.3

Jeśli do wybranego równania układu równań dodamy lub od niego odejmiemy niezerową *krotność* innego równania tego układu (tzn. inne równanie układu przemnożone stronami przez niezerową liczbę), to otrzymamy równoważny układ równań (tzn. układ mający takie same rozwiązania co oryginalny).

Rozdział 1

Wektory na płaszczyźnie

1.1 Pojęcie wektora

Definicja 1.1

(Uporządkowaną) parę punktów A i B na płaszczyźnie nazywamy *wektorem (na płaszczyźnie)* o początku A i końcu B i oznaczamy $\overrightarrow{AB}$. Długością wektora $\overrightarrow{AB}$ (oznaczaną $|\overrightarrow{AB}|$) nazywamy długość odcinka AB , jego *kierunkiem* – prostą AB (przy czym przyjmujemy, że proste równoległe wyznaczają ten sam kierunek). Wektor o ustalonej długości i kierunku może mieć dwa różne *zwroty* (jak na rysunku).



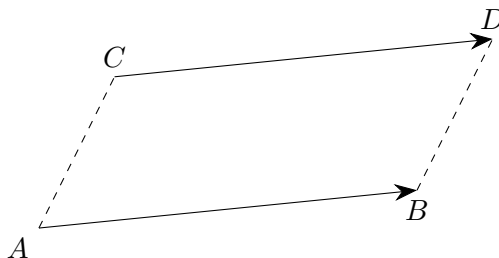
Dwa wektory są równe, jeśli mają jednakowe długości, kierunki i zwroty¹.

Szczególnym przypadkiem wektora jest *wektor zerowy* (oznaczany $\vec{0}$), tzn. wektor, którego koniec i początek są równe (np. wektor $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$). Wektor taki nie ma określonego kierunku ani zwrotu, a jego długość wynosi 0. Jest tylko jeden wektor zerowy (tzn. tylko jeden wektor o długości 0).

Fakt 1.2

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem (tzn. jeden z wektorów powstaje przez równoległe przesunięcie drugiego).

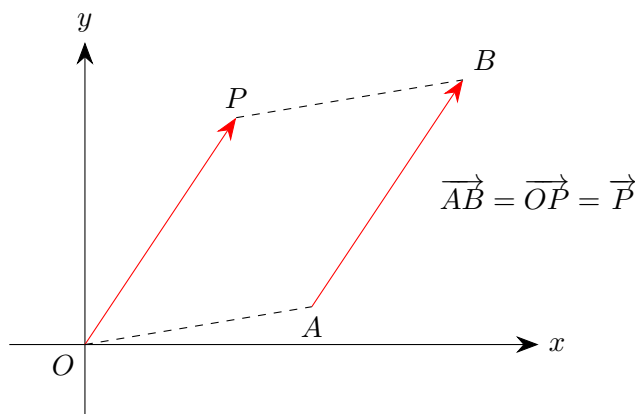
Dowód. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe długości (tzn. $|AB| = |CD|$), jednakowe kierunki (tzn. $AB \parallel CD$) oraz zgodne zwroty, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem.



¹Pod koniec semestru, po przygotowaniu w ramach Wstępu do matematyki, będzie można lepiej sformalizować definicję wektora oraz jego kierunku przy pomocy pojęcia *klasy abstrakcji*.

□

Wektory w układzie współrzędnym zazwyczaj będziemy umieszczać tak, by miały początek w początku układu współrzędnych, tzn. w punkcie $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 1.2 jest to możliwe dla każdego wektora (wystarczy zastosować odpowiednie przesunięcie równoległe). Wektor $\overrightarrow{OP}$ będziemy w skrócie oznaczać $\vec{P}$ (tzn. początek układu współrzędnych O traktujemy jako „domyślny” początek wektora).

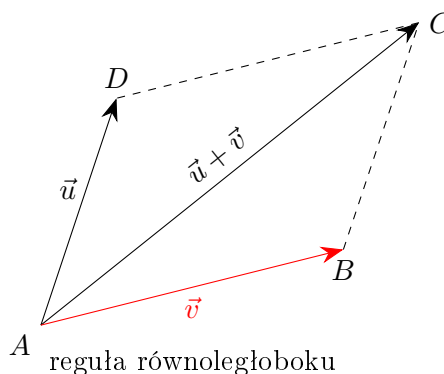
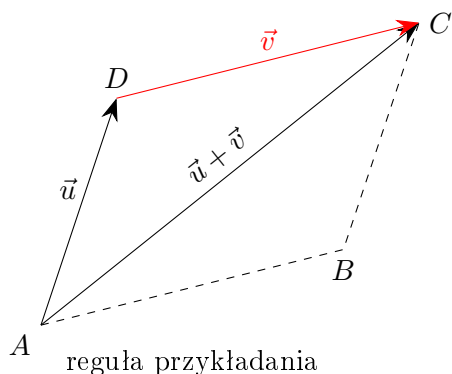


Ponieważ wektor nie ma jednoznacznie wyznaczonego początku ani końca (dlatego wektory, którymi będziemy się posługiwać, nazywane są czasami *wektorami swobodnymi*), więc zamiast oznaczać wektor przy pomocy dwóch wielkich liter (przykładowe początek i koniec wektora), będziemy stosować oznaczenie pojedynczą (zazwyczaj małą) literą ze strzałką: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ itd.

Definicja 1.3

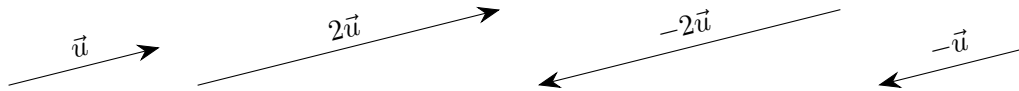
Sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{AC}$ (*reguła przykładania*). Sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ nazywamy przekątną $\overrightarrow{AC}$ równoległoboku $ABCD$ (*reguła równoległoboku*). Aby wyznaczyć sumę wektorów w pozostałych przypadkach należy te wektory przesunąć równoległe tak, by móc zastosować jedną z powyższych reguł dodawania.

Wynik dodawania dwóch wektorów nie zależy od zastosowanej reguły dodawania, co pokazane zostało na poniższym rysunku ($ABCD$ jest równoległobokiem, więc zgodnie z Faktem 1.2 mamy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{v}$).



Definicja 1.4

Niech t będzie liczbą rzeczywistą (którą będziemy też nazywać *skalarem*), zaś $\vec{u}$ wektorem na płaszczyźnie. Wówczas $t \cdot \vec{u}$ jest wektorem o długości $|t| \cdot |\vec{u}|$, o kierunku wyznaczonym przez wektor $\vec{u}$ i o zwrocie zgodnym z $\vec{u}$, gdy $t > 0$ lub przeciwnym do $\vec{u}$, gdy $t < 0$. Jako że jedynym wektorem długości 0 jest wektor zerowy, więc $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$. Wektor $(-1) \cdot \vec{u}$ nazywamy *wektorem przeciwnym* do $\vec{u}$ i oznaczamy $-\vec{u}$.

**Fakt 1.5**

Wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$ jest wektor $\overrightarrow{BA}$.

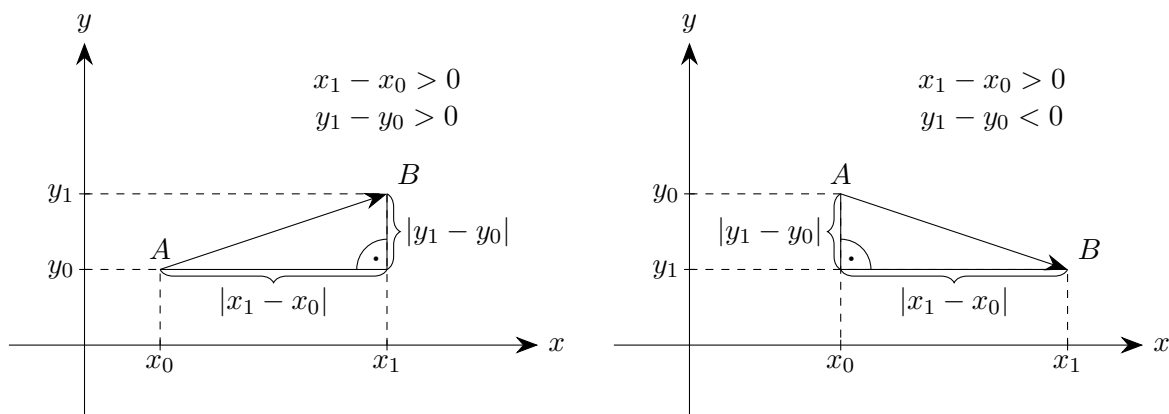
Dowód. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ mają tę samą długość i ten sam kierunek, natomiast przeciwnie zwroty. $\square$

Definicja 1.6

Jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ są punktami płaszczyzny, to *współzrędnymi wektora* $\overrightarrow{AB}$ nazywamy parę liczb:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ interpretujemy jako przesunięcie w poziomie (pierwsza współrzędna) i przesunięcie w pionie (druga współrzędna) potrzebne dla przemieszczenia z punktu A do punktu B . Wartość bezwzględna współrzędnej podaje długość przesunięcia, natomiast znak współrzędnej rozróżnia pomiędzy przesunięciem w kierunku dodatnim i ujemnym (kierunek dodatni wyznaczają strzałki na osiach współrzędnych).



Wektor zerowy ma współrzędne $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

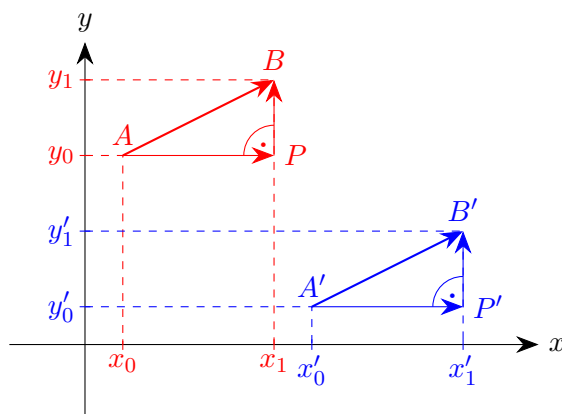
Ponieważ wektor nie ma ustalonego początku ani końca (zgodnie z Definicją 1.1 dwa wektory są równe, jeśli jeden z nich jest przesunięciem równoległym drugiego), więc aby powyższa definicja współrzędnych wektora miała sens, równe wektory powinny mieć jednakowe współrzędne. Stąd potrzeba udowodnienia następującego faktu:

Fakt 1.7

Dwa wektory na płaszczyźnie są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne.

Dowód. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ (zaznaczone na rysunku) są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są wektory $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{A'P'}$ oraz wektory $\overrightarrow{PB}$ i $\overrightarrow{P'B'}$. Innymi słowy $x_1 - x_0 = x'_1 - x'_0$ (przesunięcia poziome są równe) oraz $y_1 - y_0 = y'_1 - y'_0$ (przesunięcia poziome są równe), czyli:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 - x'_0 \\ y'_1 - y'_0 \end{pmatrix}$$



□

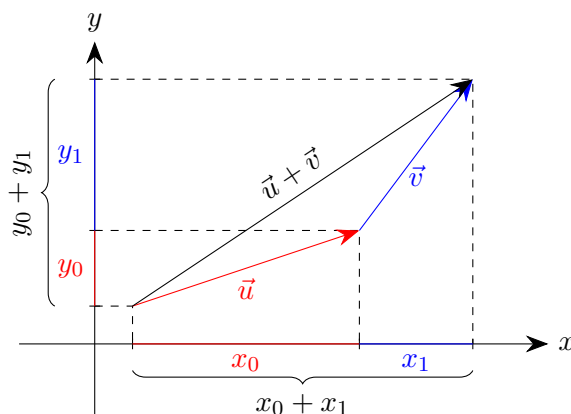
Ponieważ, zgodnie z Faktem 1.7, współrzędne jednoznacznie określają wektor, od tej pory będziemy utożsamiać wektor z parą liczb (jego współrzędnych) i pisać: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Fakt 1.8

Sumą wektorów o współrzędnych $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ jest wektor o współrzędnych:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ y_0 + y_1 \end{pmatrix}$$

Dowód. Niech $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ i wszystkie współrzędne $\vec{u}$ i $\vec{v}$ niech będą dodatnie.



Jak widać na rysunku:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ y_0 + y_1 \end{pmatrix}$$

Rozpatrzenie przypadku, gdy jedna lub więcej współrzędnych jest ujemna pozostawiamy czytelnikowi. $\square$

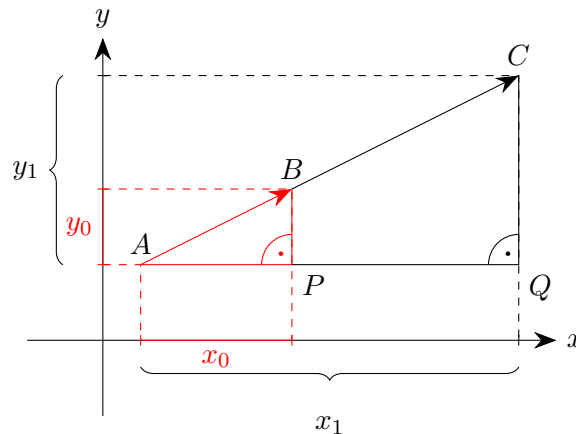
Fakt 1.9

Iloczynem wektora o współrzędnych $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ przez skalar t jest wektor o współrzędnych:

$$t \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_0 \\ t \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

W szczególności, wektorem przeciwnym do $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ jest wektor $(-1) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$.

Dowód. Rozpatrzmy najpierw przypadek $t > 0$. Niech $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ oraz $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB}$. Wówczas wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ mają jednakowe kierunki i zwroty oraz $|\overrightarrow{AC}| = t \cdot |\overrightarrow{AB}|$. Poniższy rysunek przedstawia tę sytuację, gdy $x_0 > 0$ oraz $y_0 > 0$.



Trójkąty prostokątne $\triangle ABP$ i $\triangle ACQ$ są podobne w skali t , skąd otrzymujemy

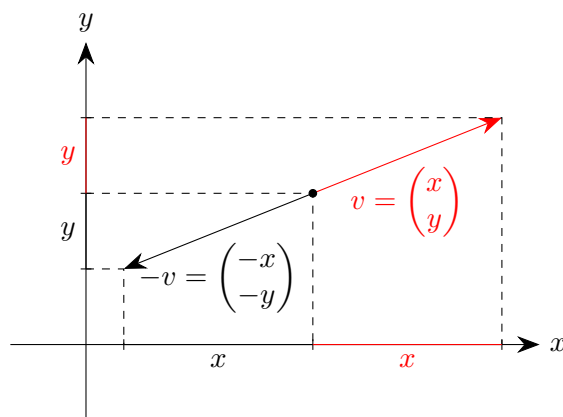
$$t \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_0 \\ t \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

Przypadek, gdy jedna lub obie współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ są ujemne (lub równe 0) jest analogiczna i jego rozpatrzenie pozostawiamy czytelnikowi.

Jeśli $t < 0$, tzn. $t = -t'$, gdzie $t' > 0$, to:

$$-t' \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} t' \cdot x_0 \\ t' \cdot y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t' \cdot x_0 \\ -t' \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

gdzie pierwsza równość wynika z udowodnionej już części faktu (gdyż $t' > 0$), natomiast druga równość wynika z tego, że wektory przeciwne mają przeciwne współrzędne, co widać na poniższym rysunku.



Jeśli $t = 0$, to oczywiście $0 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_0 \\ 0 \cdot y_0 \end{pmatrix}$. □

Definicja 1.10

Różnicę wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy sumą wektora $\vec{u}$ i wektora przeciwnego do $\vec{v}$, tzn. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, co we współrzędnych ma postać:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}$$

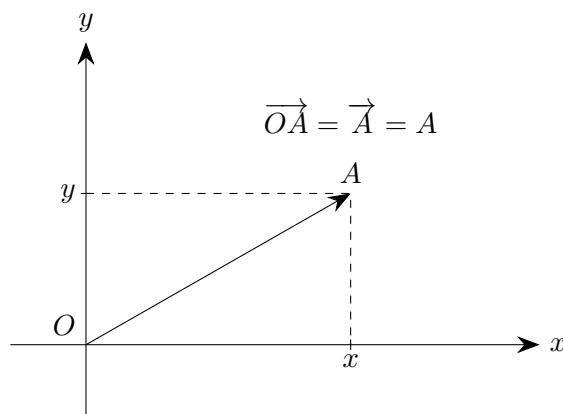
Przykład 1

Dane są wektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz współrzędne wektora $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

Rozwiązanie.

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że wektor $\vec{A}$ (z domyślnym początkiem w punkcie $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) ma takie same współrzędne co punkt A . W związku z tym w dalszym tekście nie będziemy odróżniać punktów od wektorów, oba oznaczając A .



Podobnie, przy oznaczeniach wektora jedną małą literą ($\vec{u}$, $\vec{v}$ itd.) będziemy pomijać strzałkę i pisać u , v itd.

Fakt 1.11

Dla dowolnego wektora $\overrightarrow{AB}$ zachodzi:

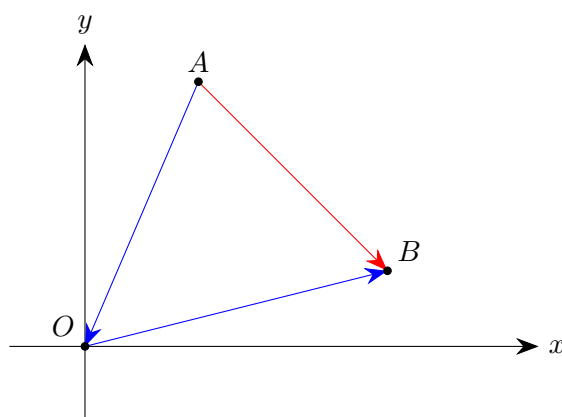
$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Powyższą równość można też zapisać w postaci:

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

i interpretować: „jeśli z punktu A wykonamy przesunięcie o $\overrightarrow{AB}$, to znajdziemy się w B ”.

Dowód. Zgodnie z regułą dodawania wektorów zachodzi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$



Pamiętając, że $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest domyślnym początkiem każdego wektora otrzymujemy:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -A + B = B - A$$

□

Przykład 2

Wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ oraz $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wyznaczyć współrzędne punktu B .

Rozwiązanie. Skoro $\overrightarrow{AB} = B - A$, to $B = A + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

W powyższych rachunkach domyślnie przyjęliśmy, że dodawanie wektorów rządzi się tymi samymi prawami co dodawanie liczb rzeczywistych. Poniższy fakt ujmuje to bardziej formalnie:

Fakt 1.12

Dla dowolnych wektorów u, v, w na płaszczyźnie oraz dowolnych skalarów s, t zachodzą następujące własności:

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $u + v = v + u$ | (przemienność +) |
| 2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ | (łączność +) |
| 3) $0 + u = u + 0 = u$ | (element neutralny +) |
| 4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ | (element przeciwny) |
| 5) $(s + t) \cdot u = s \cdot u + t \cdot u$ | (rozdzielność · względem +) |
| 6) $t \cdot (u + v) = t \cdot u + t \cdot v$ | (rozdzielność · względem +) |
| 7) $s \cdot (t \cdot v) = (s \cdot t) \cdot v$ | (łączność mnożenia skalarów) |
| 8) $1 \cdot u = u$ | |

Dowód. Oznaczmy $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Aby udowodnić własność (2) (łączność dodawania wektorów) pokażemy, że lewa i prawa strona wzoru są równe:

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

Dowód pozostałych własności jest podobny i jego przeprowadzenie zostawiamy czytelnikowi. $\square$

Definicja 1.13

Wektory u i v nazywamy *współliniowymi* (*równoległymi*) jeśli mają ten sam kierunek (przyjmujemy przy tym, że wektor 0 jest współliniowy z każdym wektorem).

Przykład 3

Wśród wektorów $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wskaż wszystkie pary wektorów współliniowych.

Rozwiązanie. Wektory $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ są współliniowe, gdyż $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest współliniowy z każdym z wektorów, gdyż $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dla dowolnych x i y .

Fakt 1.14

Wektory u i v są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki skalar t , że

$$u = tv \quad \text{lub} \quad v = tu$$

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że oba wektory u i v są niezerowe. Wektory te są współliniowe (Definicja 1.13) wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się jedynie długością i zwrotem, co oznacza, że:

$$u = t \cdot v \quad \text{oraz} \quad v = \frac{1}{t} \cdot u$$

dla pewnej liczby t (ujemnej, gdy zwroty u i v są przeciwne).

Jeśli natomiast przynajmniej jeden z wektorów u i v jest wektorem zerowym, to zgodnie z Definicją 1.13 są one współliniowe i równocześnie spełniają warunek $u = 0 \cdot v$ (jeśli $u = 0$) lub $v = 0 \cdot u$ (jeśli $v = 0$). $\square$

Zauważmy, że (jak wynika z dowodu) spójnik *lub* w powyższym fakcie jest konieczny ze względu na specyficzną sytuację wektora zerowego. W sytuacji, gdy oba wektory są niezerowe, spójnik *lub* można zastąpić spójnikiem *oraz*.

Definicja 1.15

Kombinacją liniową wektorów u i v nazywamy każdy wektor postaci $su + tv$ gdzie s i t są dowolnymi skalarami. Skalary s i t nazywamy *współczynnikami* tej kombinacji liniowej.

Przykład 4

Przedstaw wektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Szukamy takich liczb s i t , że

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - 2t \\ 2s + t \end{pmatrix}$$

Musimy zatem rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} s - 2t = -1 \\ 2s + t = 8 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest $s = 3$, $t = 2$, skąd dostajemy: $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

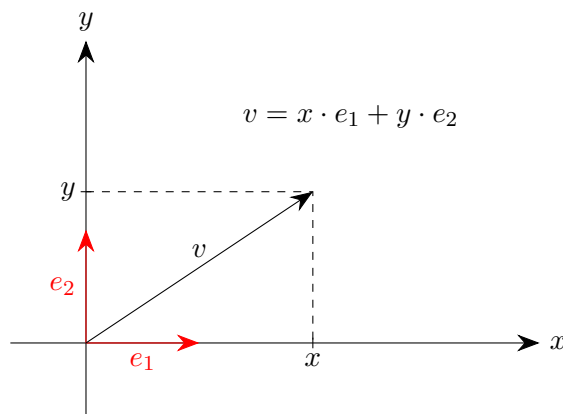
Definicja 1.16

Wersorami na płaszczyźnie nazywamy wektory $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fakt 1.17

Każdy wektor na płaszczyźnie można przedstawić jako kombinację liniową wersorów, przy czym współczynnikami tej kombinacji liniowej są współrzędne wektora:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

**Przykład 5**

Wyznaczyć współrzędne środka odcinka AB , jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

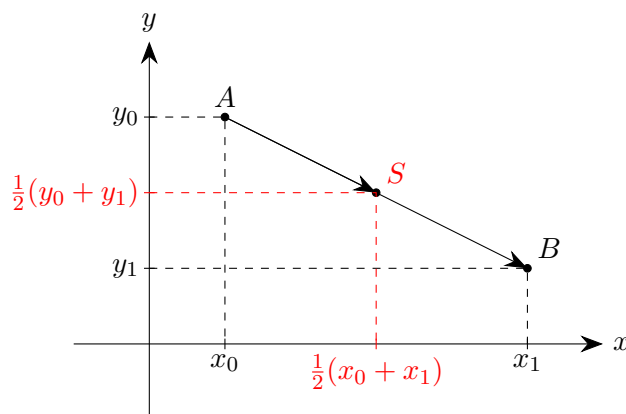
Rozwiązanie (sposób I). Oznaczmy $S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$ i zauważmy, że $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Zatem:

$$\begin{pmatrix} x_S - x_0 \\ y_S - y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 - x_0) \\ \frac{1}{2}(y_1 - y_0) \end{pmatrix}$$

skąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_S - x_0 = \frac{1}{2}(x_1 - x_0) \\ y_S - y_0 = \frac{1}{2}(y_1 - y_0) \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x_S = \frac{1}{2}(x_1 - x_0) + x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_0) \\ y_S = \frac{1}{2}(y_1 - y_0) + y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_0) \end{cases}$$

Stąd dostajemy odpowiedź: $S = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2} \right)$.



Rozwiązanie (sposób II). Warunek $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ można przekształcić bez odwoływania się do współrzędnych:

$$S - A = \frac{1}{2}(B - A)$$

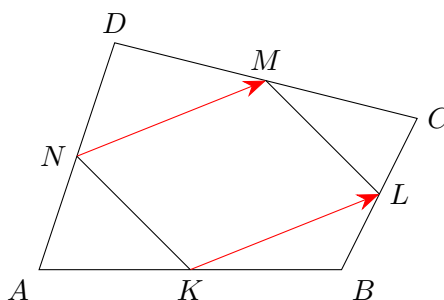
Stąd dostajemy:

$$S = A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A + B) = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2} \right) \quad (1.1)$$

Przykład 6

Udowodnić, że środki boków dowolnego czworokąta $ABCD$ są wierzchołkami równoległoboku.

Rozwiązanie. Oznaczmy środki boków czworokąta przez K, L, M, N (jak na rysunku).



Aby pokazać, że $KLMN$ jest równoległobokiem, wystarczy sprawdzić, że $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$. Korzystając ze wzoru (1.1) dostajemy:

$$\overrightarrow{KL} = L - K = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A$$

$$\overrightarrow{NM} = M - N = \frac{1}{2}(C + D) - \frac{1}{2}(A + D) = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A$$

czyli $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

Przykład 7

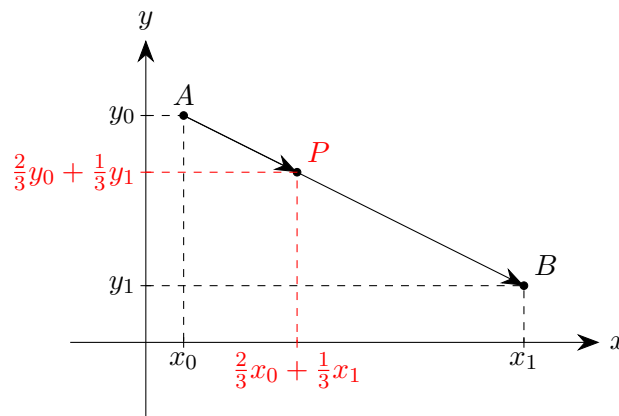
Wyznaczyć współrzędne takiego punktu P , który dzieli odcinek AB w stosunku $2 : 1$ (tzn. $|AP| : |PB| = 2 : 1$), jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Postępujemy podobnie jak w Przykładzie 5. Zauważmy, że $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, co możemy zapisać w postaci:

$$P - A = \frac{1}{3}(B - A)$$

skąd otrzymujemy

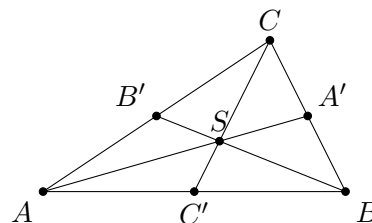
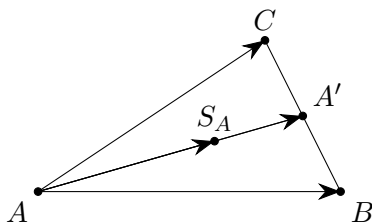
$$P = A + \frac{1}{3}(B - A) = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{2}{3}y_0 + \frac{1}{3}y_1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

**Przykład 8**

Udowodnić, że trzy środkowe trójkąta (tzn. odcinki łączące wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku) przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą środkową w stosunku $2 : 1$. Wyznaczyć współrzędne tego punktu (nazywanego *środkiem ciężkości trójkąta*), jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Niech S_A będzie punktem dzielącym środkową AA' w stosunku $2 : 1$. Wówczas

$$S_A = A + \overrightarrow{AS_A} = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = A + \frac{2}{3}(A' - A) = A + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - A) = \frac{1}{3}(A + B + C)$$



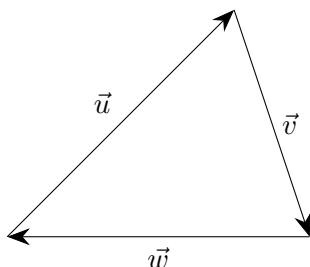
Podobnie dowodzimy, że dla punktów S_B i S_C dzielących odpowiednio środkowe BB' i CC' w stosunku $2 : 1$ zachodzi $S_B = S_C = \frac{1}{3}(A + B + C)$. Wobec tego $S_A = S_B = S_C = S$, czyli środkowe przecinają się w jednym punkcie, który każdą z nich dzieli w stosunku $2 : 1$. Współrzędne tego punktu, zgodnie z powyższym rachunkiem to:

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{3}y_0 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Przykład 9

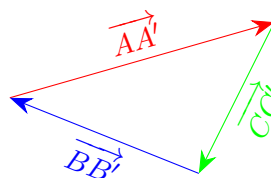
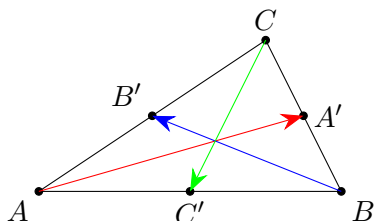
Czy przesuwając równolegle środkowe dowolnego trójkąta można ułożyć z nich trójkąt?

Rozwiązanie. Zauważmy, że z wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ da się ułożyć trójkąt, wtedy i tylko wtedy gdy spełniają warunek $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ (reguła przykładania):



W trójkącie o środkowych AA' , BB' , CC' wyliczamy (zgodnie ze wzorem (1.1)):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= (A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = \\ &= \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - A\right) + \left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A - B\right) + \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - C\right) = 0\end{aligned}$$



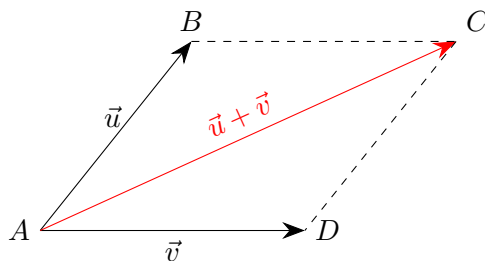
czyli przesuwając równolegle środkowe AA' , BB' , CC' można z nich ułożyć trójkąt.

Przykład 10

Znane są współrzędne trzech wierzchołków równoległoboku $ABCD$: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka.

Rozwiązanie. Zgodnie z regułą dodawania wektorów (reguła równoległoboku):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



czyli

$$(B - A) + (D - A) = C - A$$

Stąd dostajemy

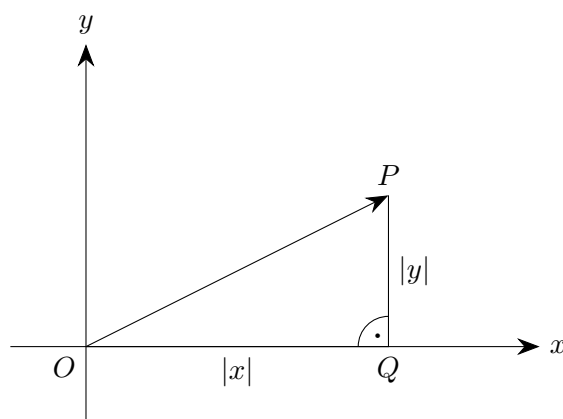
$$C = B - A + D = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Fakt 1.18

Długość wektora $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wynosi $\sqrt{x^2 + y^2}$. Odległość punktów $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ jest równa długości wektora $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ i wynosi $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Dowód. Na mocy Twierdzenia Pitagorasa długość wektora $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (zaczepionego w $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) wynosi:

$$|\vec{P}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|OQ|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



W takim razie:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \left| \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

□

Wniosek 1.19

Okrąg o środku w punkcie $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i promieniu r to zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających następujące równanie (zwane *równaniem okręgu*):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Dowód. Okrąg o środku $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i promieniu r to zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ odległych o r od punktu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, czyli spełniających warunek:

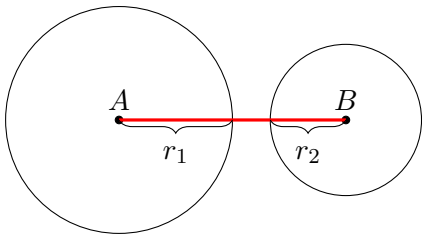
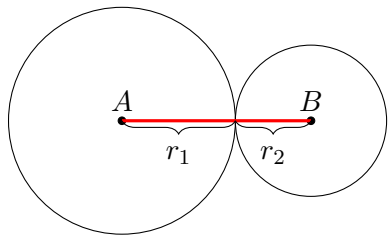
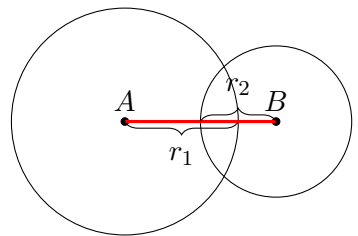
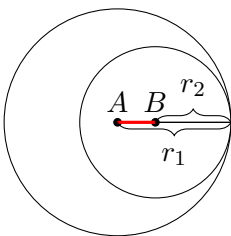
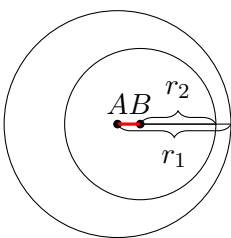
$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Ponieważ obie strony równania są dodatnie, więc podnosząc równanie stronami do kwadratu otrzymujemy równoważną postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

□

Wzór na odległość punktów pozwala łatwo ustalić wzajemne położenie dwóch okręgów:

	$ AB > r_1 + r_2$	rozłączne zewnętrznie
	$ AB = r_1 + r_2$	styczne zewnętrznie
	$ r_1 - r_2 < AB < r_1 + r_2$	przecinające się
	$ AB = r_1 - r_2 $	styczne wewnętrznie
	$ AB < r_1 - r_2 $	rozłączne wewnętrznie

Przykład 11

Ustal wzajemne położenie okręgu o środku w punkcie $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i promieniu $r_1 = 3$ oraz okręgu o środku w punkcie $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ i promieniu $r_2 = 2$.

Rozwiązanie. Odległość środków okręgów to $|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$. Wobec tego zachodzi warunek $|AB| = r_1 + r_2$, czyli okręgi są styczne zewnętrznie.

Fakt 1.20: Nierówność trójkąta

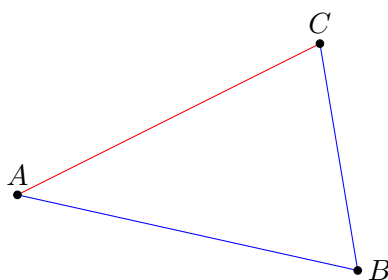
Dla dowolnych punktów A, B, C na płaszczyźnie zachodzi warunek

$$|AC| \leq |AB| + |BC|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt B należy do odcinka AC .

Dowód. Jeśli punkty A, B i C tworzą trójkąt (czyli nie leżą na jednej prostej), to zachodzi:

$$|AC| < |AB| + |BC|$$



Jeśli natomiast punkty A, B, C leżą na jednej prostej, to $|AC| = |AB| + |BC|$, gdy B należy do odcinka AC (włączając w to możliwości $B = A$ lub $B = C$) lub $|AC| < |AB| + |BC|$ w przeciwnym razie.



$$|AC| = 8 = 3 + 5 = |AB| + |BC|$$



$$|AC| = 8 < 3 + 11 = |AB| + |BC|$$

□

Powyższy fakt można zapisać również w wersji wektorowej (której będziemy częściej używać):

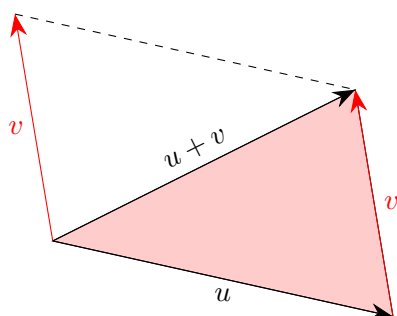
Fakt 1.21: Nierówność trójkąta

Dla dowolnych wektorów u, v na płaszczyźnie spełniony jest następujący warunek:

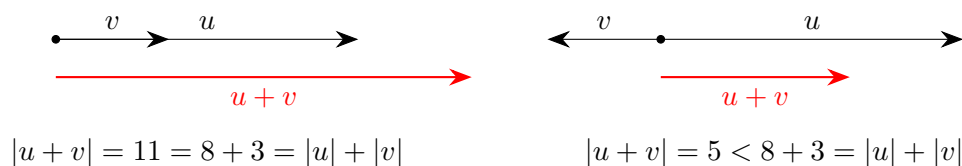
$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są współliniowe i mają zgodne zwroty.

Dowód. Jeśli wektory u i v nie są współliniowe, to z wektorów $u, v, u + v$ (po odpowiednim przesunięciu równoległym) można złożyć trójkąt. Wówczas zachodzi warunek $|u + v| < |u| + |v|$.



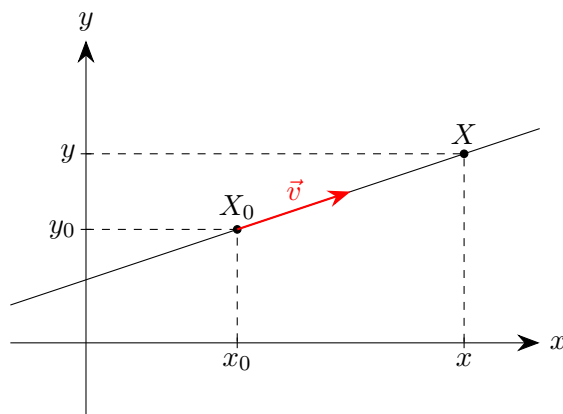
Jeśli wektory u i v są współliniowe, to $|u + v| = |u| + |v|$ w przypadku, gdy ich zwroty są zgodne lub $|u + v| < |u| + |v|$, gdy ich zwroty są przeciwne.



□

1.2 Równanie prostej

Jeśli chcemy opisać prostą na płaszczyźnie wystarczy podać (jakikolwiek) punkt X_0 należący do tej prostej oraz (niezerowy) wektor v , który wyznacza kierunek tej prostej. Informacje te jednoznacznie opisują prostą, tzn. istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt X_0 i mająca kierunek wyznaczony przez wektor v .



Weźmy teraz dowolny punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ należący do prostej przechodzącej przez dany punkt $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i mającej kierunek danego (niezerowego) wektora $v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Wektory $\overrightarrow{X_0X}$ i v są współliniowe oraz v jest niezerowy, więc

$$\overrightarrow{X_0X} = t \cdot v, \quad \text{czyli} \quad X - X_0 = t \cdot v$$

dla pewnej liczby rzeczywistej t . Stąd otrzymujemy równanie prostej:

$$X = X_0 + t \cdot v \tag{1.4}$$

To samo równanie można zapisać w postaci:

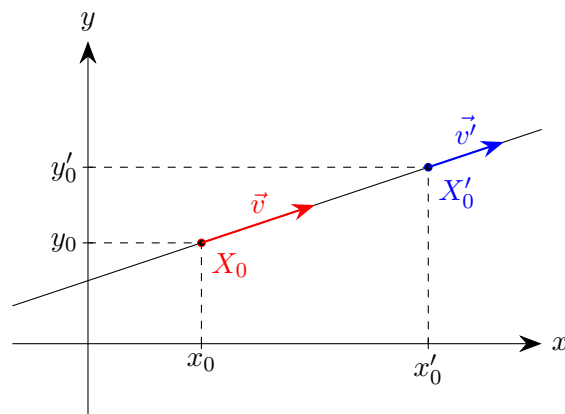
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Równanie (1.5) (lub, w wersji bardziej zwężłej, równanie (1.4)) nazywamy *równaniem parametrycznym prostej*. Wektor v nazywamy *wektorem kierunkowym* tej prostej. Zauważmy, że jedna prosta jest opisywana przez wiele różnych równań parametrycznych, gdyż ani punkt X_0 (dowolny punkt na prostej), ani wektor v (dowolny niezerowy wektor równoległy do prostej) nie jest wyznaczony jednoznacznie.

Fakt 1.22

Równania parametryczne $X = t \cdot v + X_0$ oraz $X = t \cdot v' + X'_0$ przedstawiają tę samą prostą wtedy i tylko wtedy, gdy wektory v i v' są równoległe oraz punkt X'_0 leży na prostej $X = t \cdot v + X_0$ (równoważnie: punkt X_0 leży na prostej $X = t \cdot v' + X'_0$).

Dowód. Proste są pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam kierunek (tzn. wektory v i v' są równoległe) oraz mają przynajmniej jeden punkt wspólny.



□

Przykład 1

Sprawdź, czy punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ leży na prostej zadanej równaniem $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Należy ustalić, czy istnieje liczba t spełniająca równanie wektorowe:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

czyli spełniająca układ dwóch równań skalarnych:

$$\begin{cases} 1 = t \cdot 3 + 1 \\ 2 = t \cdot (-1) + 1 \end{cases}$$

Powyższy układ równań jest sprzeczny, więc punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nie leży na rozważanej prostej.

Przykład 2

Dana jest prosta ℓ o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Znajdź inne równanie opisujące tę samą prostą.

Rozwiązanie. Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest punktem należącym do prostej ℓ (bo $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Wektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ jest równoległy do wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, więc też jest wektorem kierunkowym prostej ℓ .

Zatem (zgodnie z Faktem 1.22) innym równaniem parametrycznym prostej ℓ jest np.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Równanie parametryczne prostej interpretujemy następująco: punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ należy do prostej o równaniu (1.5) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista t spełniająca układ równań:

$$\begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \end{cases}$$

Jeśli $p \neq 0$, to układ ten można przekształcić (stosując metodę podstawiania) do postaci:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{p}x - \frac{1}{p}x_0 \\ y = \frac{q}{p}x - \frac{1}{p}x_0 + y_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Zatem punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ leży na prostej o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia drugie z równań układu (1.6) (wówczas istnieje t spełniające pierwsze równanie), czyli (po przekształceniu), gdy spełnia równanie:

$$-qx + py + (x_0 - py_0) = 0 \quad (1.7)$$

Równanie (1.7) możemy przepisać w postaci:

$$Ax + By + C = 0 \quad (1.8)$$

gdzie A, B, C są pewnymi liczbami rzeczywistymi oraz A i B nie są równocześnie równe 0. Przypadek $p \neq 0$ prowadzi do takiej samej konkluzji, a jego rozpatrzenie zostawiamy czytelnikowi. Równanie (1.8) nazywamy *równaniem ogólnym prostej*. Zauważmy, że podobnie jak w równaniu parametrycznym, współczynniki A, B i C w równaniu ogólnym prostej nie są wyznaczone jednoznacznie.

Fakt 1.23

Wektorem kierunkowym prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest wektor $\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$.

Dowód. Zgodnie ze wzorem (1.7) jeśli wektor kierunkowy prostej to $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, to jej równanie ogólne ma postać $-qx + py + C = 0$. Podstawiając $p = B$ i $q = -A$ otrzymujemy tezę. $\square$

Wniosek 1.24

Równania $Ax + By + C = 0$ i $A'x + B'y + C' = 0$ opisują:

1. proste równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka (niezerowa) liczba t , że $A' = tA$ i $B' = tB$;
2. tę samą prostą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka (niezerowa) liczba t , że $A' = tA$, $B' = tB$, $C' = tC$ (tzn. jedno z równań powstaje przez przemnożenie drugiego stronami przez niezerową liczbę rzeczywistą t).

Dowód. Proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory kierunkowe są równoległe, tzn. (zgodnie z Faktem 1.23) dla pewnej liczby t zachodzi $\begin{pmatrix} B' \\ -A' \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$, czyli $B' = tB$ i $A' = tA$.

Równania opisujące tę samą prostą, w szczególności opisują proste równoległe (każda prosta jest równoległa do siebie). Dodatkowo $C' = tC$, gdyż w przeciwnym razie układ równań

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y' + C' = 0 \end{cases}$$

byłby sprzeczny. □

Przykład 3

Dana jest prosta ℓ o równaniu ogólnym $2x - y + 3 = 0$. Znajdź inne równania opisujące tę samą prostą.

Rozwiązanie. Jeśli pomnożymy to równanie stronami przez pewną niezerową liczbę rzeczywistą, to otrzymamy równanie równoważne, które ma dokładnie ten sam zbiór rozwiązań. Zatem każde z równań:

$$4x - 2y + 6 = 0, \quad 6x - 3y + 9 = 0, \quad -2x + y - 3 = 0$$

jest równaniem ogólnym prostej ℓ .

Przykład 4

Sprawdź, czy punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ leży na prostej zadanej równaniem ogólnym $2x - 5y + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Wstawiając $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ do równania prostej otrzymujemy prawdziwe równanie:

$$2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 1 = 0$$

co oznacza, że punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ należy do rozważanej prostej.

Przykład 5

Zamień równanie parametryczne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ na równanie ogólne prostej.

Rozwiązanie. Równanie parametryczne możemy przedstawić w postaci układu równań:

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$$

z którego (jak we wzorze (1.6)) musimy wyeliminować zmienną t . Wyliczając z drugiego równania $t = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ i wstawiając do pierwszego równania otrzymujemy:

$$x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2} = 0, \quad \text{czyli} \quad 2x - 3y + 5 = 0$$

Szczególną wersją równania ogólnego jest (znane ze szkoły) równanie kierunkowe prostej:

$$y = ax + b \tag{1.9}$$

Równanie kierunkowe można łatwo przekształcić do postaci ogólnej:

$$ax - y + b = 0$$

Z drugiej strony równanie $Ax + By + C = 0$ można zamienić na postać kierunkową, o ile tylko $B \neq 0$:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

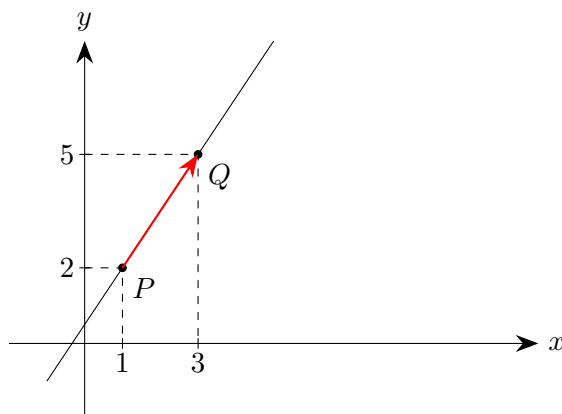
Zaletą równania ogólnego jest to, że pozwala on opisać **każdą** prostą na płaszczyźnie, również prostą równoległą do osi Oy , czyli prostą o równaniu $x = c$ (to jest przypadek $B = 0$), której nie można opisać przy pomocy równania kierunkowego.

Przykład 6

Opisz prostą przechodzącą przez punkty $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ przy pomocy:

- (a) równania ogólnego,
- (b) równania parametrycznego.

Rozwiązanie.



Równanie ogólne prostej ma postać $Ax + By + C = 0$. Aby prosta przechodziła przez punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, współczynniki A , B i C muszą spełniać układ równań:

$$\begin{cases} A + 2B + C = 0 \\ 3A + 5B + C = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy:

$$\begin{cases} A = 3C \\ B = -2C \end{cases}$$

czyli równanie prostej to np. $3x - 2y + 1 = 0$ (za C możemy przyjąć dowolną niezerową wartość, np. $C = 1$).

Do napisania równania parametrycznego potrzebujemy wektor kierunkowy, np. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz dowolny punkt na prostej, np. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dostajemy równanie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Przykład 7

Znajdź punkt przecięcia prostych:

(a) $-3x + y - 5 = 0$ i $4x + 3y - 2 = 0$,

(b) $2x + y + 3 = 0$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. W każdym przypadku zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań. Zatem w (a):

$$\begin{cases} -3x + y - 5 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

co daje punkt przecięcia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. W (b) dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x = t - 2 \\ y = 2t - 3 \end{cases}$$

co daje punkt przecięcia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. W przypadku (c) należy zwrócić uwagę, że szukany punkt ma spełniać oba równania parametryczne, ale niekoniecznie dla tej samej wartości parametru t , co oznacza, że parametr dla każdej prostej powinniśmy oznaczyć inną niewiadomą. W ten sposób dostajemy układ równań wektorowych:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = t + 4 \\ y = 2t - 1 \\ x = 3s + 1 \\ y = -s \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ dostajemy punkt przecięcia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Przykład 8

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i równoległej do prostej o równaniu:

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $5x - 4y + 1 = 0$.

Rozwiązanie. (a) Proste równoległe mają jednakowe wektory kierunkowe, więc szukana prosta ma wektor kierunkowy $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (tak jak prosta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$). Dodatkowo wiemy, że szukana prosta przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, skąd dostajemy jej równanie (parametryczne):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Każda prosta równoległa do $5x - 4y + 1 = 0$ ma równanie $5x - 4y + C = 0$, dla pewnej wartości C (Wniosek 1.24). Szukana prosta przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, więc:

$$5 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + C = 0$$

skąd otrzymujemy $C = -9$. Równanie szukanej prostej to zatem $5x - 4y - 9 = 0$.

Przykład 9

Zamień równanie ogólne $5x - 2y + 3 = 0$ na równanie parametryczne.

Rozwiązanie. Potrzebujemy wyrazić zmienne x i y przy pomocy parametru t , co najprościej zrobić, jeśli jedną ze zmiennych przyjmujemy za parametr (np. $x = t$). Wówczas drugą zmienną możemy wyrazić przy pomocy parametru t :

$$y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}t + \frac{3}{2}$$

co daje równanie parametryczne prostej:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2}t + \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1.3 Iloczyn skalarny

Definicja 1.25

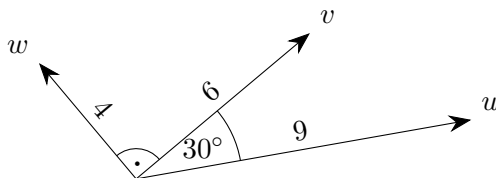
Iloczynem skalarnym wektorów u i v nazywamy liczbę:

$$u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v)$$

gdzie $\angle(u, v)$ oznacza miarę mniejszego z kątów utworzonych przez wektory u i v .

Przykład 1

Obliczyć iloczyn skalarny każdej pary wektorów z poniższego rysunku.



Rozwiązanie.

$$v \circ u = u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v) = 9 \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 9 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$$

$$w \circ v = v \circ w = |v| \cdot |w| \cdot \cos \angle(v, w) = 6 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ = 6 \cdot 4 \cdot 0 = 0$$

$$u \circ w = w \circ u = |w| \cdot |u| \cdot \cos \angle(w, u) = 4 \cdot 9 \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$$

Fakt 1.26

Jeśli u i v są niezerowymi wektorami, to:

- $u \circ v > 0$, gdy $\angle(u, v)$ jest ostry (lub zerowy),
- $u \circ v = 0$, gdy $\angle(u, v)$ jest prosty,
- $u \circ v < 0$, gdy $\angle(u, v)$ jest rozwarty (lub półpełny).

Dowód. Długości niezerowych wektorów są liczbami dodatnimi, więc znak $u \circ v$ jest taki sam jak znak $\cos \angle(u, v)$. Natomiast dla kąta $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ (są to wszystkie możliwości, gdyż $\angle(u, v)$ definiowaliśmy jako miarę mniejszego z dwóch kątów utworzonych przez wektory u i v) zachodzi:

- $\cos \theta > 0$, gdy $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$,
- $\cos \theta = 0$, gdy $\theta = 90^\circ$,
- $\cos \theta < 0$, gdy $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$.

□

Fakt 1.27: Nierówność Schwarza

Dla dowolnych wektorów u i v na płaszczyźnie zachodzi nierówność:

$$|u \circ v| \leq |u| \cdot |v|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są współliniowe.

Dowód. Ponieważ $\cos \theta \in [-1, 1]$ dla dowolnego kąta θ , więc jeśli żaden z wektorów u i v nie jest wektorem zerowym, to :

$$|u \circ v| = |u| \cdot |v| \cdot |\cos \angle(u, v)| \leq |u| \cdot |v| \cdot 1 = |u| \cdot |v|$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\cos \angle(u, v)| = 1$ (czyli kąt między wektorami to 0° lub 180° , tzn. wektory są współliniowe).

Jeśli jeden z wektorów u i v jest wektorem zerowym, to $|u \circ v| = |u| \cdot |v| = 0$ (czyli też zachodzi równość). Ponieważ jednak w Definicji 1.13 przyjęliśmy, że wektor zerowy jest współliniowy z każdym wektorem, więc ten przypadek również oznacza współliniowość wektorów u i v . □

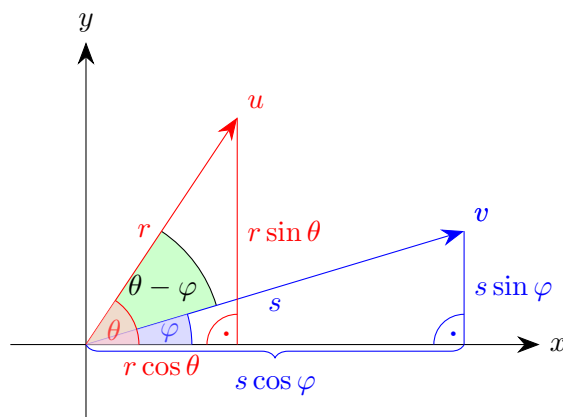
Poniższy fakt pozwala wyliczyć iloczyn skalarny wektorów przy pomocy ich współrzędnych.

Fakt 1.28

Iloczynem skalarnym wektorów $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ jest liczba:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Dowód. Oznaczmy długości wektorów u i v przez r i s , zaś kąty jakie tworzą z dodatnią półosią Ox przez θ i φ .



Z definicji funkcji $\sin$ i $\cos$ możemy wyliczyć współrzędne wektorów u i v :

$$u = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Powyższy zapis nazywamy *postacią biegunową* wektorów u i v . Kąt między tymi wektorami to $\theta - \varphi$, więc:

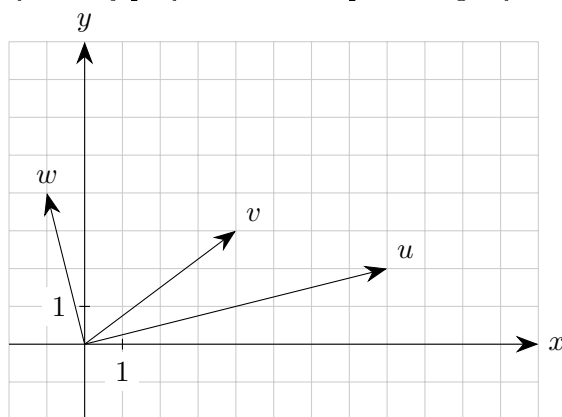
$$\begin{aligned} u \circ v &= |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v) = r \cdot s \cdot \cos(\theta - \varphi) = rs \cdot (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \\ &= (r \cos \theta)(s \cos \varphi) + (r \sin \theta)(s \sin \varphi) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{aligned}$$

□

Wektor długości 1 nazywamy *wektorem jednostkowym*. Wektor jednostkowy ma współrzędne $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ (co wynika z poprzedniego rysunku dla $r = 1$).

Przykład 2

Obliczyć iloczyn skalarny każdej pary wektorów z poniższego rysunku.



Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} v \circ u &= u \circ v = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 8 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 38 \\ w \circ v &= v \circ w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 8 \\ u \circ w &= w \circ u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

Przy pomocy Faktu 1.28 możemy wyznaczyć miarę kąta między dwoma wektorami, których współrzędne są znane:

Fakt 1.29

Jeśli φ jest kątem między wektorami u i v na płaszczyźnie, to:

$$\cos \varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$$

Dowód. Wystarczy przekształcić wzór $u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v)$. □

Przykład 3

Wyznacz kąt między wektorami u i v z Przykładu 2 i ustal czy jest to kąt ostry, prosty czy rozwarty.

Rozwiązanie.

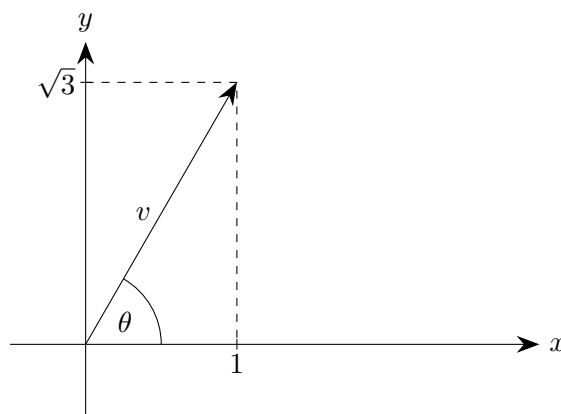
$$\cos \angle(u, v) = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} = \frac{38}{\sqrt{8^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{38}{\sqrt{68} \cdot 5} = \frac{38}{10\sqrt{17}} = \frac{38\sqrt{17}}{170}$$

Ponieważ wiemy, że szukany kąt θ należy do przedziału $[0^\circ, 180^\circ]$, więc podanie wartości $\cos \theta$ jednoznacznie wyznacza kąt. Odpowiedzią jest zatem: θ , to taki kąt, że $\cos \theta = \frac{38\sqrt{17}}{170}$ (co inaczej można zapisać: $\theta = \arccos \frac{38\sqrt{17}}{170}$). Jest to kąt ostry, bo $\cos \theta > 0$.

Przykład 4

Zapisz wektor $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ w postaci biegunowej, tzn. w postaci $\begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Zaznaczamy wektor v w układzie współrzędnych.



Jego długość to $r = |v| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Kąt θ między v a dodatnią półosią Ox spełnia warunek:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

w związku z czym $\theta = 60^\circ$. Stąd dostajemy $v = \begin{pmatrix} 2 \cos 60^\circ \\ 2 \sin 60^\circ \end{pmatrix}$.

Przykład 5

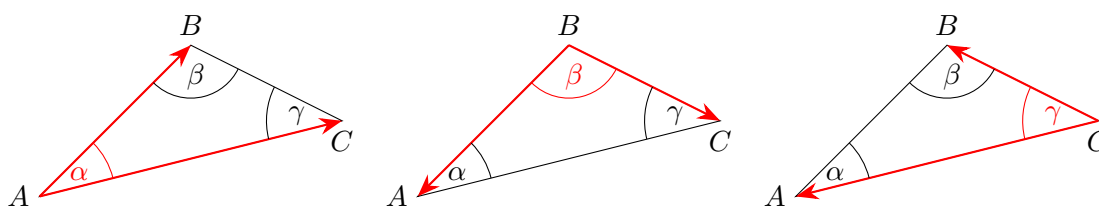
Sprawdź czy trójkąt o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.

Rozwiązanie. Wystarczy ustalić znaki odpowiednich iloczynów skalarnych:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 32 + 8 = 40 > 0, \quad \text{czyli } \alpha < 90^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -16 + 8 = -8 < 0, \quad \text{czyli } \beta > 90^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 32 - 4 = 28 > 0, \quad \text{czyli } \gamma < 90^\circ$$



Zatem trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Poniższy fakt przedstawia najważniejsze własności iloczynu skalarnego.

Fakt 1.30

Dla dowolnych wektorów u, v, w na płaszczyźnie i dowolnego skalaru t zachodzi:

- 1) $u \circ v = v \circ u$ (przemienność $\circ$)
- 2) $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$ (rozdzielność $\circ$ względem $+$)
 $(v + w) \circ u = v \circ u + w \circ u$
- 3) $(tu) \circ w = t(u \circ w)$ (łączność)
- 4) $u \circ u = |u|^2$
- 5) $u \circ v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są prostopadłe ($u \perp v$). Uwaga. Przyjmujemy, że wektor zerowy jest prostopadły do każdego innego wektora.

Dowód. Bezpośrednio z Definicji 1.25 wynika (1) (przemienność iloczynu skalarnego). Dla dowodu (4) zauważamy, że kąt o pokrywających się ramionach ma miarę 0, skąd:

$$u \circ u = |u| \cdot |u| \cdot \cos 0 = |u|^2$$

Dla dowodu (5) zauważamy, że $|u| \cdot |v| \cdot \cos(u, v) = 0$, wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\cos(u, v) = 0 \text{ (tzn. } u \perp v \text{) lub } u = 0 \text{ lub } v = 0$$

Ponieważ przyjmujemy, że wektor 0 jest prostopadły do każdego wektora, więc dwie ostatnie możliwości ($u = 0$ lub $v = 0$) zawierają się w pierwszej: $u \perp v$.

Dla dowodu własności (2) skorzystamy z algebraicznej charakteryzacji iloczynu skalarnego (Fakt 1.28). Ponieważ iloczyn skalarny jest przemienny (własność (1)), wystarczy sprawdzić

tylko jedną z równości z punktu (2). Przyjmując $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ dostajemy:

$$\begin{aligned} u \circ (v + w) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot (x_2 + x_3) + y_1 \cdot (y_2 + y_3) \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + y_1 y_2 + y_1 y_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = u \circ v + u \circ w \end{aligned}$$

Dowód własności (3) jest podobny do dowodu własności (2) i pozostawiamy go czytelnikowi. $\square$

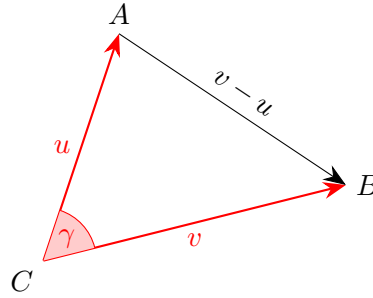
Wyprowadzone powyżej własności umożliwią nam udowodnienie Twierdzenia cosinusów:

Twierdzenie 1.31: Twierdzenie cosinusów

W trójkącie o bokach długości a , b , c i kącie γ naprzeciw boku c zachodzi wzór:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Dowód. Oznaczmy wierzchołki trójkąta A , B , C oraz wektory: $u = \overrightarrow{CA}$, $v = \overrightarrow{CB}$.



Wówczas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -u + v = v - u$. Wykorzystując Fakt 1.30 otrzymujemy:

$$c^2 = |v - u|^2 = (v - u) \circ (v - u) \quad (\text{własność (4)})$$

$$= v \circ (v - u) - u \circ (v - u) = (v \circ v - v \circ u) - (u \circ v - u \circ u) \quad (\text{własność (2)})$$

$$= u \circ u + v \circ v - 2 \cdot u \circ v \quad (\text{własność (1)})$$

$$= |u|^2 + |v|^2 - 2(u \circ v) = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (\text{własność (4)})$$

$\square$

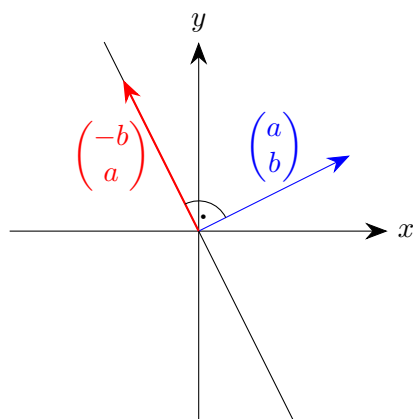
Przykład 6

Dany jest (niezerowy) wektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Znajdź:

- (a) jakikolwiek wektor prostopadły do v ,
- (b) wszystkie wektory prostopadłe do v ,
- (c) wektor jednostkowy (tzn. wektor długości 1) prostopadły do v .

Rozwiązanie. Przykładem takiego wektora jest wektor $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, gdyż:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$$



Pozostałe wektory prostopadłe do $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ są współliniowe z wektorem $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, czyli są postaci $t \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix}$ dla pewnego t . Aby znaleźć wśród nich wektor długości 1, należy wyznaczyć takie t , aby:

$$\left| \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix} \right| = 1, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{(-bt)^2 + (at)^2} = 1$$

Stąd dostajemy:

$$t^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}, \quad \text{czyli} \quad t = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

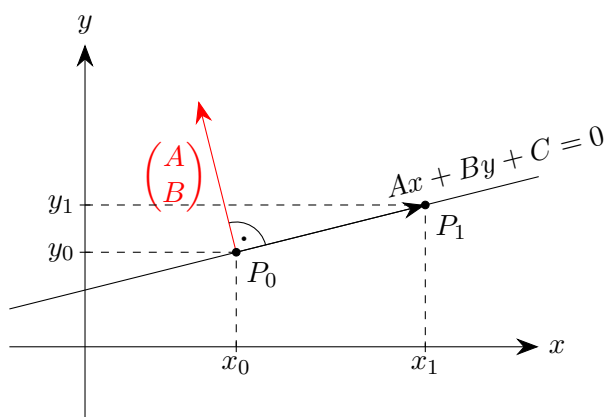
Są więc dwa jednostkowe wektory prostopadłe do wektora $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

Fakt 1.32

Wektor $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ jest prostopadły do prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ (wektor ten nazywamy *wektorem normalnym* tej prostej).

Dowód. Niech $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ leżą na prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$.



Wówczas:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ Ax_1 + By_1 + C = 0 \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami otrzymujemy

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0$$

czyli

$$0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{P_0 P_1}$$

co zgodnie z Faktem 1.30(5) oznacza, że wektor $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{P_0 P_1}$, który jest wektorem kierunkowym prostej. $\square$

Zauważmy, że w świetle powyższego faktu, znacznie bardziej zrozumiały jest Fakt 1.23. Wektor normalny prostej jest prostopadły do wektora kierunkowego prostej. Skoro więc wektor $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ jest wektorem normalnym prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$, to wektor $\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$ (jako prostopadły do $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$) musi być jej wektorem kierunkowym.

Dla lepszego zrozumienia zależności między wektorem normalnym prostej a jej wektorem kierunkowym, przyjrzyjmy się jeszcze raz operacjom zamiany równania parametrycznego na ogólne i na odwrót.

Przykład 7

Zamień postać parametryczną równania prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ na postać ogólną.

Rozwiązanie. Z postaci parametrycznej odczytujemy wektor kierunkowy: $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Wektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ jest do niego prostopadły, więc jest wektorem normalnym. Stąd ogólne równanie ma postać:

$$5x - y + C = 0$$

Wiedząc (z postaci parametrycznej), że punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ leży na tej prostej, znajdujemy $C = -13$.

Przykład 8

Zamień postać ogólną równania prostej $2x - 3y + 7 = 0$ na postać parametryczną.

Rozwiązanie. Z postaci ogólnej odczytujemy wektor normalny: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Wektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, jako prostopadły do wektora normalnego, jest zatem wektorem kierunkowym. Znajdując jakikolwiek punkt na prostej, np. $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, dostajemy postać parametryczną:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

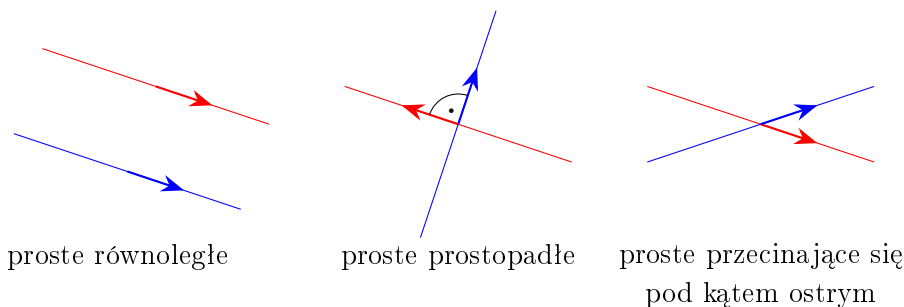
Badanie wzajemnego położenia wektorów kierunkowych lub wektorów normalnych prostych, pozwala na ustalenie wzajemnego położenia samych prostych, co pokazują kolejne dwa fakty.

Fakt 1.33

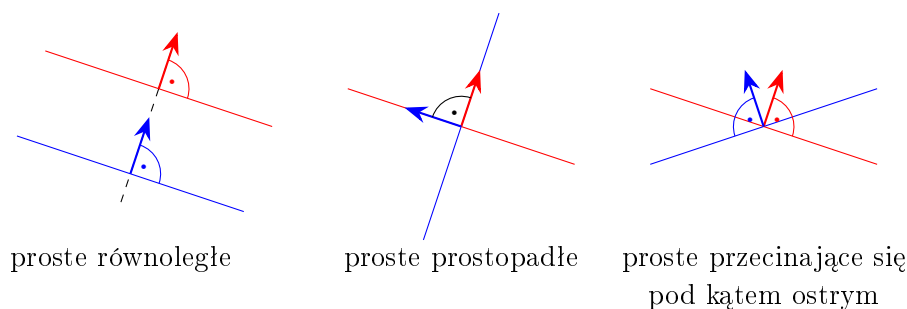
Proste ℓ_0 i ℓ_1 na płaszczyźnie są:

- (a) równoległe $\Leftrightarrow$ ich wektory kierunkowe są równoległe $\Leftrightarrow$ ich wektory normalne są równoległe;
- (b) prostopadłe $\Leftrightarrow$ ich wektory kierunkowe są prostopadłe $\Leftrightarrow$ ich wektory normalne są prostopadłe.

Dowód. Na pierwszym rysunku przedstawiono wektory kierunkowe prostych:



a na drugim – wektory normalne tych samych prostych:



□

Przykład 9

Napisz równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz

- (a) prostopadłej do wektora $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- (b) równoległej do wektora $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Równanie prostej prostopadłej do wektora $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma postać $3x + y + C = 0$.

Skoro prosta ta przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, to $C = -5$.

(b) Jeśli wektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest równoległy do prostej, to (prostopadły do niego) wektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ jest do tej prostej prostopadły. Zatem równanie ogólne szukanej prostej to $-x + 3y + C = 0$, a skoro prosta przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, to $C = -5$.

Przykład 10

Napisz równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz

- (a) prostopadłej do prostej o równaniu $2x - 3y + 4 = 0$,
- (b) równoległej do prostej o równaniu $2x - 3y + 4 = 0$.

Rozwiązanie. (a) Proste są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne są prostopadłe, stąd prosta prostopadła do prostej o równaniu $2x - 3y + 4 = 0$ ma równanie $3x + 2y + C = 0$ (bo $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$). Podobnie jak w poprzednim przykładzie wyliczamy $C = -7$.

(b) Proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne są równoległe, stąd prosta równoległa do prostej o równaniu $2x - 3y + 4 = 0$ ma równanie $2x - 3y + C = 0$. Podobnie jak poprzednio wyliczamy $C = 4$.

Przykład 11

Napisz równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz

- (a) prostopadłej do prostej o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- (b) równoległej do prostej o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Szukamy prostej, której wektor kierunkowy jest prostopadły do $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (więc wektorem tym może być np. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$) i która przechodzi przez $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Taka prosta to $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Prosta równoległa do wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ i przechodząca przez $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma równanie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fakt 1.33 można uogólnić tak, aby wyznaczyć kąt między dowolną parą prostych badając ich wektory kierunkowe lub normalne:

Fakt 1.34

Jeśli dwie proste się przecinają, to tworzą dwie pary równych kątów, o miarach α i $\pi - \alpha$. Wówczas:

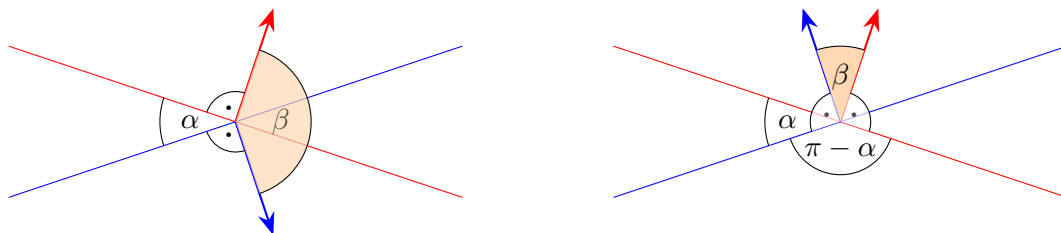
- (a) kąt między wektorami kierunkowymi tych prostych to α lub $\pi - \alpha$,
- (b) kąt między wektorami normalnymi tych prostych to α lub $\pi - \alpha$.

Dowód. (a) Wektor kierunkowy prostej jest równoległy do tej prostej, więc kąt między wektorami kierunkowymi jest równy kątowi między prostymi.

(b) Jeśli kąt ostry między prostymi ma miarę α , to kąt β między wektorami normalnymi, w

zależności od ich wzajemnego położenia (patrz rysunek), ma miarę

$$\beta = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha \text{ lub } \beta = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \alpha$$



□

Przykład 12

Wyznacz miarę kąta ostrego między prostymi:

(a) zadanymi równaniami ogólnymi $x + 3y - 1 = 0$ i $7x + y - 4 = 0$;

(b) zadanymi równaniami parametrycznymi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Obliczamy cosinus kąta między wektorami normalnymi prostych:

$$\cos \theta = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Wiemy, że proste, które nie są prostopadłe ani równoległe tworzą dwa jednakowe kąty ostre i dwa jednakowe kąty rozwarte. Ponieważ $\cos \theta > 0$, więc $\theta = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ jest kątem ostrym, zaś $\pi - \theta = \arccos \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right)$ jest kątem rozwartym między prostymi.

(b) Obliczamy cosinus kąta między wektorami kierunkowymi prostych:

$$\cos \theta = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-1}{5 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

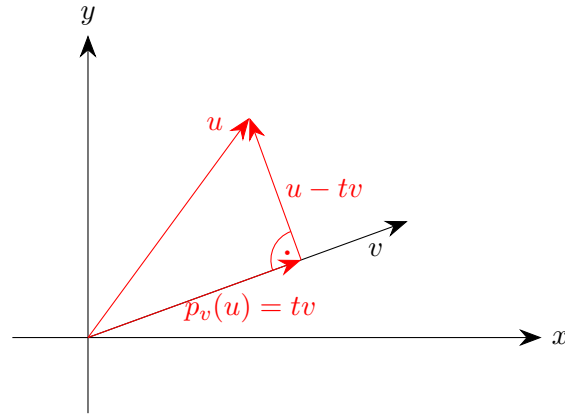
Ponieważ $\cos \theta < 0$, więc $\theta = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{10} \right)$ jest kątem rozwartym, zaś $\pi - \theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$ jest kątem ostrym między prostymi.

Fakt 1.35

Rzut prostopadły wektora u na wektor v jest wektorem

$$p_v(u) = \frac{u \circ v}{v \circ v} \cdot v = \frac{u \circ v}{|v|^2} \cdot v$$

Dowód. Rzut na wektor v jest wektorem postaci $p_v(u) = t \cdot v$, dla pewnego skalaru t .



Ponieważ $u - tv \perp v$, więc:

$$0 = (u - tv) \circ v = u \circ v - tv \circ v = (u \circ v) - t(v \circ v)$$

skąd

$$t = \frac{u \circ v}{v \circ v}$$

□

Przykład 13

Wyznacz rzut wektora $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ na wektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Zgodnie ze Faktem 1.35 rzut u na v jest wektorem:

$$p_v(u) = \frac{u \circ v}{v \circ v} \cdot v = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2+6}{1+4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że otrzymany wektor (zgodnie z definicją rzutu) jest współliniowy z wektorem v (na który rzutowaliśmy).

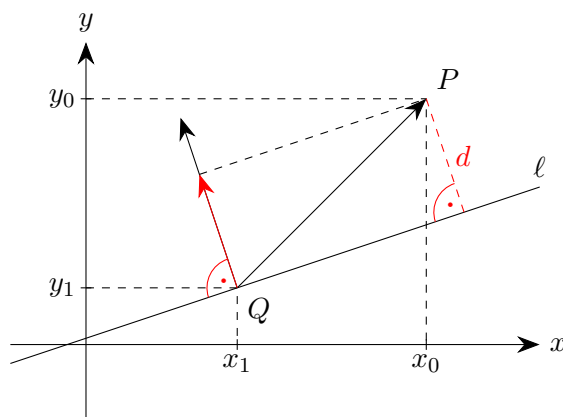
Fakt 1.36

Odległość punktu $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ od prostej ℓ o równaniu $Ax + By + C = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dowód. Wybierzmy dowolny punkt $Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ na prostej ℓ . Odległość punktu P od prostej ℓ jest równa długości rzutu wektora $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}$ na wektor normalny prostej ℓ , skąd:

$$d = \left| p_{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}(\overrightarrow{QP}) \right| = \left| \frac{\overrightarrow{QP} \circ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{A^2 + B^2} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right|$$



czyli

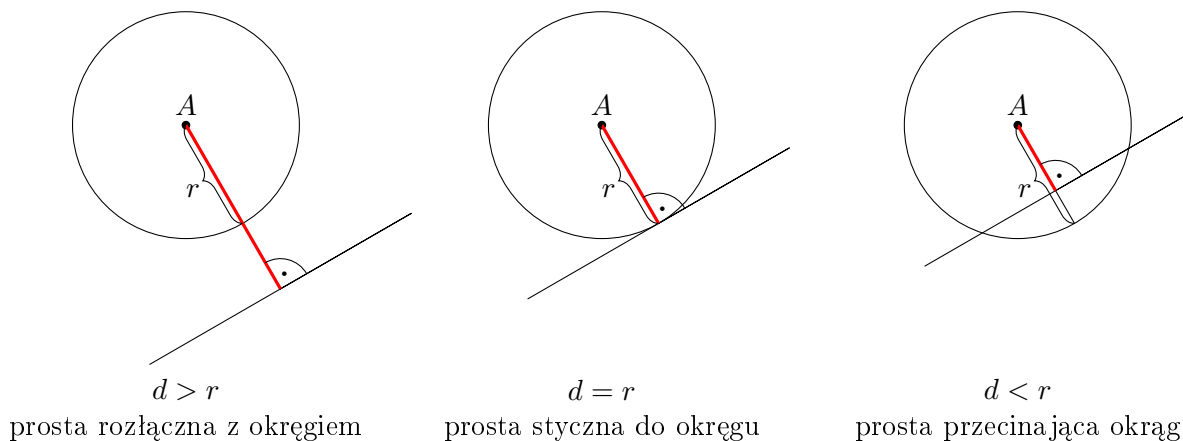
$$d = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Punkt $Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ leży na prostej ℓ , więc $Ax_1 + By_1 + C = 0$, czyli $Ax_1 + By_1 = -C$, zatem

$$d = \frac{|(Ax_0 + By_0) - (Ax_1 + By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1.11)$$

□

Wzór (6.5) pozwala łatwo ustalić wzajemne położenie okręgu i prostej:



Przykład 14

Ustal wzajemne położenie okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$ oraz prostej o równaniu $2x - 3y + 3 = 0$.

Rozwiązanie. Środkiem okręgu jest punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, a jego odległość od prostej to

$$d = \frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 3|}{2^2 + (-3)^2} = \frac{19}{13} < 2$$

czyli mniej niż promień okręgu (który ma długość 2). Prosta zatem przecina okrąg.

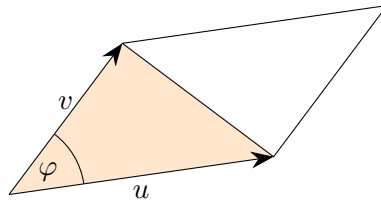
1.4 Wyznacznik

Fakt 1.37

Pole trójkąta rozpiętego przez wektory $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ wynosi $\frac{1}{2}|\det(u, v)|$, zaś pole równoległoboku rozpiętego przez te wektory wynosi $|\det(u, v)|$, gdzie:

$$\det(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Dowód. Jak widać na rysunku, pole równoległoboku rozpiętego przez wektory u i v jest 2 razy większe od pola trójkąta rozpiętego przez te wektory.



Pole trójkąta można obliczyć ze wzoru:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \sin \varphi \cdot |u| \cdot |v|$$

gdzie φ to kąt między wektorami u i v . Zatem:

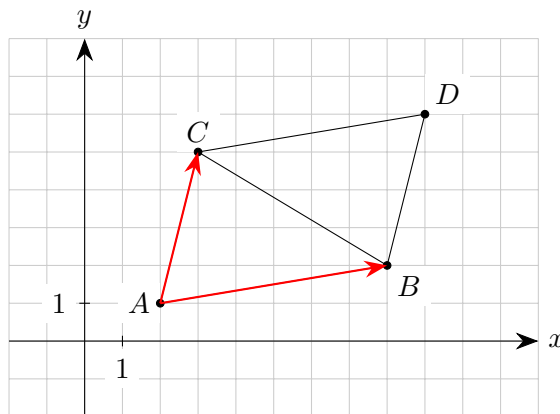
$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \frac{1}{2} |u| \cdot |v| \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{|u|^2 |v|^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{|u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \varphi)} = \frac{1}{2} \sqrt{|u|^2 |v|^2 - |u|^2 |v|^2 \cos^2 \varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|u|^2 |v|^2 - (u \circ v)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} = \frac{1}{2} |u_1 v_2 - u_2 v_1| = \frac{1}{2} |\det(u, v)| \end{aligned}$$

Pole równoległoboku jest 2 razy większe, więc wynosi $|\det(u, v)|$. □

W dalszej części skryptu nie będziemy już mówili o wyznaczniku pary wektorów, tylko o wyznaczniku macierzy 2×2 , tzn. zamiast $\det \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right)$ będziemy pisali $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Przykład 1

Wyznacz pole trójkąta ABC oraz równoległoboku $ABDC$ z poniższego rysunku.



Rozwiązanie. Zarówno trójkąt ABC jak i równoległobok $ABDC$ rozpięte są przez wektory

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 1.37 pole równoległoboku wynosi:

$$|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \left| \det \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right| = |24 - 1| = 23$$

zaś pole trójkąta jest dwukrotnie mniejsze i wynosi $\frac{1}{2} \cdot 23 = 11\frac{1}{2}$.

Fakt 1.38

Zamiana kolejności wektorów (kolumn) w wyznaczniku zmienia znak wyznacznika, tzn.

$$\det(u, v) = -\det(v, u)$$

Dowód. Oznaczając $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ otrzymujemy:

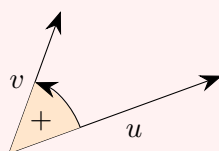
$$\det \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = -(v_1 u_2 - v_2 u_1) = -\det \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right)$$

□

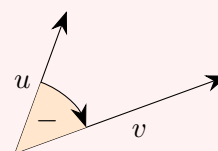
Zauważmy, że łącząc Fakty 1.37 i 1.38 widzimy, że $\det(u, v)$ to liczba, której wartość bezwzględna oznacza pole równoległoboku rozpiętego przez wektory u i v , natomiast jej znak jest zależny od kolejności wektorów (w jednym przypadku dodatni, w drugim ujemny). Obserwacja ta jest motywacją następującej definicji:

Definicja 1.39

Parę niewspółliniowych wektorów (u, v) na płaszczyźnie nazywamy *dodatnio zorientowaną*, jeśli kąt wypukły (tzn. mniejszy od 180°) skierowany od u do v jest dodatni, zaś *ujemnie zorientowaną*, gdy kąt ten jest ujemny.

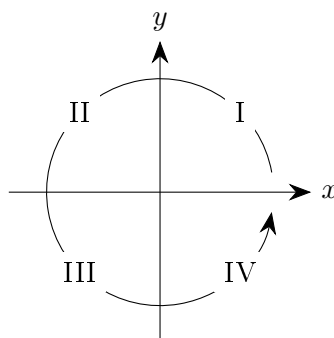


(u, v) dodatnio zorientowana



(u, v) ujemnie zorientowana

Zwróćmy uwagę, że standardowo za „dodatni” kierunek kąta przyjmuje się kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara, a za „ujemny” – kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara. Zauważmy też, że konwencja numerowania ćwiartek układu współrzędnych jest zgodna z konwencją określającą dodatni kierunek kąta.



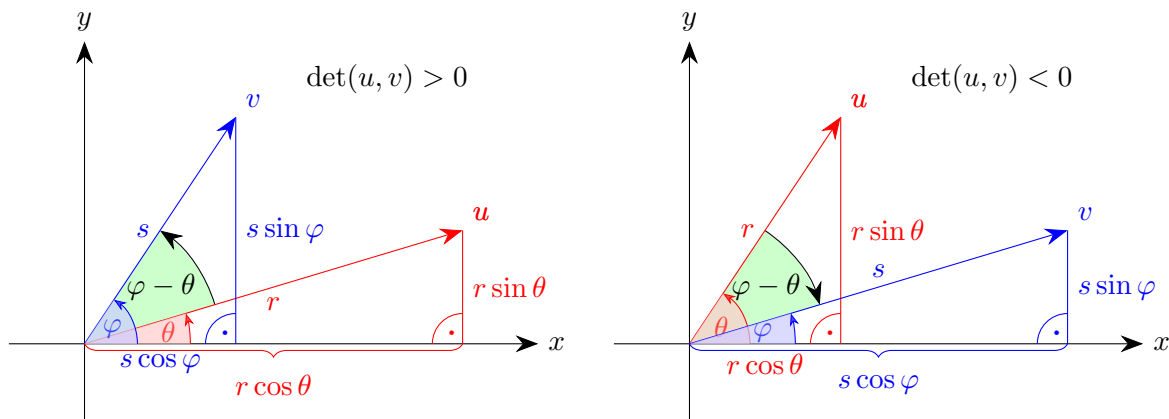
Związek orientacji pary wektorów z wyznacznikiem podaje następujący fakt:

Fakt 1.40

Para wektorów (u, v) na płaszczyźnie jest:

- dodatnio zorientowana, gdy $\det(u, v) > 0$,
- ujemnie zorientowana, gdy $\det(u, v) < 0$,
- parą wektorów współliniowych, gdy $\det(u, v) = 0$.

Dowód. Zapiszmy oba wektory w postaci biegunowej: $u = \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} s \sin \varphi \\ s \cos \varphi \end{pmatrix}$.



Wówczas:

$$\begin{aligned} \det(u, v) &= \det \left(\begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \end{pmatrix} \right) = (r \cos \theta)(s \sin \varphi) - (r \sin \theta)(s \cos \varphi) \\ &= rs(\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi) = rs \sin(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \det(u, v) > 0 &\iff \sin(\varphi - \theta) > 0 \iff \varphi - \theta \in (0, 180^\circ) \\ \det(u, v) < 0 &\iff \sin(\varphi - \theta) < 0 \iff \varphi - \theta \in (-180^\circ, 0) \end{aligned}$$

Z Faktu 1.37 wynika, że $\det(u, v) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pole równoległoboku rozpiętego przez wektory u i v wynosi 0, czyli gdy równoległobok degeneruje się do odcinka (wektory u i v są współliniowe). $\square$

Korzystając z pojęcia orientacji pary wektorów, Fakt 1.38 można przeformułować w następujący sposób:

Wniosek 1.41

Zamiana kolejności pary wektorów zmienia orientację tej pary (na przeciwną).

Przykład 2

Dane są wektory $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$. Ustal która z par (u, v) i (v, u) jest dodatnio, a która ujemnie zorientowana.

Rozwiązanie. Ponieważ $\det(u, v) = \det \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right) = 7 - 6 = 1 > 0$, więc para (u, v) jest dodatnio zorientowana, a zatem (patrz Wniosek 1.41) para (v, u) jest ujemnie zorientowana.

Definicja 1.42

Znakowanym polem trójkąta (równoległoboku) rozpiętego przez parę wektorów (u, v) na płaszczyźnie, nazywamy pole tego trójkąta (równoległoboku) ze znakiem $+$ lub $-$, w zależności od tego, czy para (u, v) jest dodatnio czy ujemnie zorientowana.

Używając powyższej definicji, możemy połączyć Fakt 1.37 oraz Fakt 1.40 w następujący sposób:

Wniosek 1.43

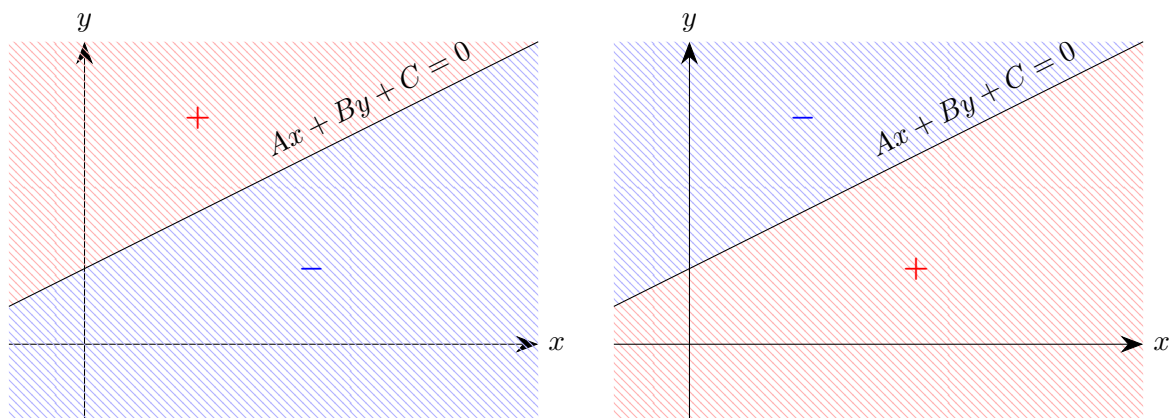
Znakowane pole równoległoboku rozpiętego przez parę wektorów (u, v) na płaszczyźnie jest równe $\det(u, v)$, a znakowane pole trójkąta rozpiętego przez (u, v) wynosi $\frac{1}{2} \det(u, v)$.

W analogii do *znakowanego pola trójkąta*, możemy też wprowadzić *znakowaną odległość od prostej*:

Definicja 1.44

Znakowaną odległością punktu P na płaszczyźnie od prostej ℓ będziemy nazywać odległość punktu P od prostej ℓ ze znakiem $+$ lub $-$ w zależności od tego, po której stronie prostej ℓ znajduje się punkt P .

Zauważmy, że definicja ta jest trochę niejednoznaczna – nie precyzuje, którą stronę prostej uznajemy za „dodatnią”, a którą za „ujemną”. W praktycznych zastosowaniach nie będzie to miało znaczenia, tzn. nie będzie istotny wybór „dodatniej” strony, a jedynie fakt, że odległości punktów po przeciwnej stronie są liczbami przeciwnymi.



Ustalanie wzoru na znakowaną odległość punktu od prostej zaczniemy od następującego faktu:

Fakt 1.45

Prosta o równaniu $Ax + By + C = 0$ dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Jedna z tych półpłaszczyzn składa się z punktów spełniających warunek:

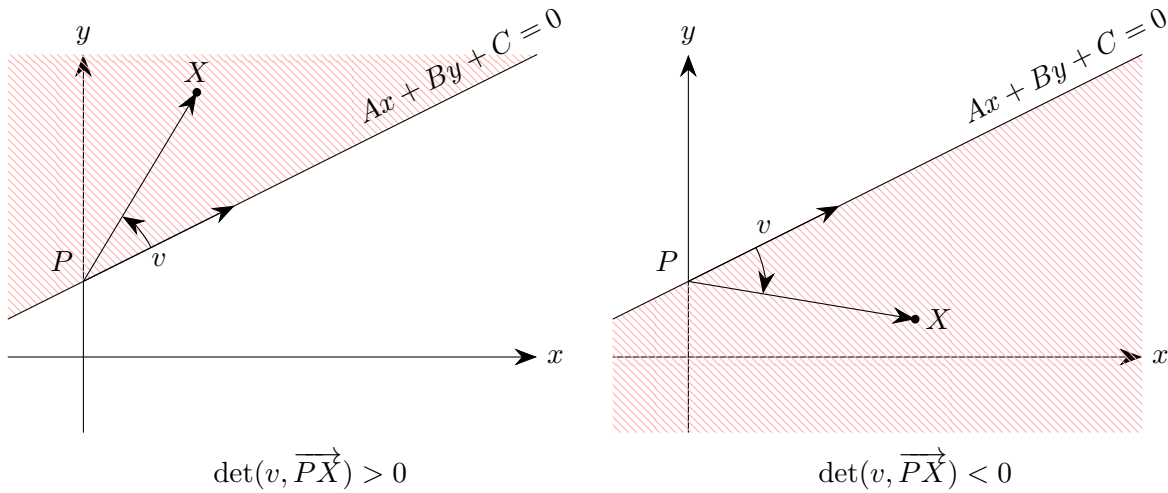
$$Ax + By + C \geq 0$$

a druga z półpłaszczyzn składa się z punktów spełniających warunek:

$$Ax + By + C \leq 0$$

Prostą graniczną zaliczamy do obu półpłaszczyzn.

Dowód. Rozważmy przypadek $B \neq 0$. Prosta $Ax + By + C = 0$ przecina oś Oy w punkcie $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{C}{B} \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 1.23 wektor $v = \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$ jest wektorem kierunkowym prostej.



Zauważmy, że jedna z półpłaszczyzn składa się z takich punktów $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dla których para wektorów $(v, \overrightarrow{PX})$ jest dodatnio zorientowana, a druga półpłaszczyzna składa się z tych punktów X , dla których para $(v, \overrightarrow{PX})$ jest ujemnie zorientowana. Na mocy Faktu 1.40 jedna z półpłaszczyzn jest opisana nierównością:

$$\det(v, \overrightarrow{PX}) > 0, \quad \text{czyli} \quad \det\left(\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y + \frac{C}{B} \end{pmatrix}\right) > 0$$

a zatem nierówność opisująca tę płaszczyznę to:

$$Ax + By + C > 0$$

W podobny sposób pokazujemy, że druga półpłaszczyzna jest opisywana przez nierówność:

$$Ax + By + C < 0$$

Ponieważ prostą graniczną (o równaniu $Ax + By + C = 0$) zaliczamy do obu półpłaszczyzn, więc ostre nierówności ($>$ i $<$) zamieniamy na słabe ($\geq$ i $\leq$).

Przypadek $B = 0$, jako znacznie prostszy, pozostawiamy do rozpatrzenia czytelnikowi. $\square$

Łącząc Fakt 1.36 oraz Fakt 1.45 otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 1.46

Znakowana odległość punktu $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ od prostej ℓ o równaniu $Ax + By + C = 0$ wynosi:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Zgodnie z uwagami dotyczącymi Definicji 1.44 powyższy wniosek jest trochę niejednoznaczny – zamiana równania prostej $Ax + By + C = 0$ na inne równanie tej samej prostej (np. na równanie $-Ax - By - C = 0$) może zamienić stronę dodatnią z ujemną (tzn. zmienić znak znakowanej odległości). W praktycznych zastosowaniach tego pojęcia, wspomniana niejednoznaczność nie będzie miała znaczenia.

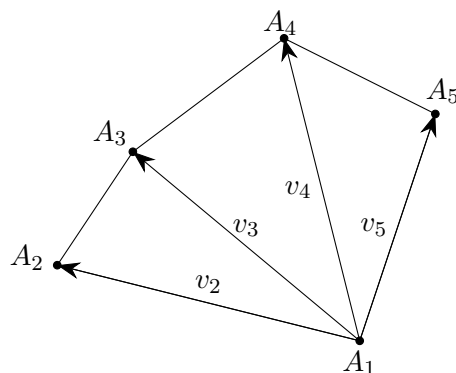
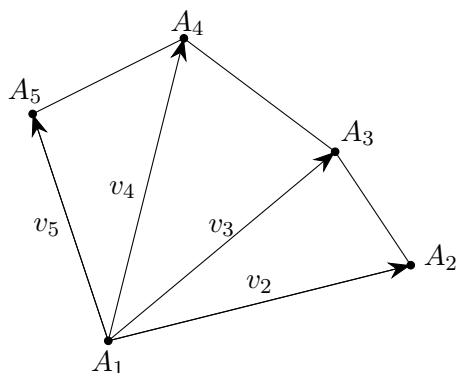
Fakt 1.47

Dany jest wielokąt wypukły $A_1A_2\dots A_n$. Jeśli oznaczymy wektory $v_i = \overrightarrow{A_1A_i}$, to pole tego wielokąta wynosi:

$$\frac{1}{2}|\det(v_2, v_3) + \det(v_3, v_4) + \dots + \det(v_{n-1}v_n)|$$

Dowód. Udowodnimy ten fakt w przypadku $n = 5$. Pozostałe przypadki dowodzi się analogicznie. Dany jest zatem pięciokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4A_5$. Jego pole P można przedstawić jako sumę pól trzech trójkątów:

$$P = P_{A_1A_2A_3} + P_{A_1A_3A_4} + P_{A_1A_4A_5}$$



Zgodnie z Faktem 1.37 mamy zatem:

$$P = \frac{1}{2}|\det(v_2, v_3)| + \frac{1}{2}|\det(v_3, v_4)| + \frac{1}{2}|\det(v_4, v_5)|$$

Ponieważ wielokąt jest wypukły, więc wszystkie pary (v_2, v_3) , (v_3, v_4) , (v_4, v_5) są jednakowo zorientowane (dodatnio, jak na pierwszym rysunku lub ujemnie, jak na drugim). Jeśli wszystkie pary są dodatnio zorientowane, to otrzymujemy:

$$P = \frac{1}{2}|\det(v_2, v_3)| + \frac{1}{2}|\det(v_3, v_4)| + \frac{1}{2}|\det(v_4, v_5)| = \frac{1}{2}(\det(v_2, v_3) + \det(v_3, v_4) + \det(v_4, v_5))$$

a jeśli wszystkie pary są ujemnie zorientowane, to:

$$P = \frac{1}{2}|\det(v_2, v_3)| + \frac{1}{2}|\det(v_3, v_4)| + \frac{1}{2}|\det(v_4, v_5)| = -\frac{1}{2}(\det(v_2, v_3) + \det(v_3, v_4) + \det(v_4, v_5))$$

Ponieważ pole jest zawsze liczbą dodatnią, więc w każdym przypadku otrzymujemy szukany wzór:

$$P = \frac{1}{2}|\det(v_2, v_3) + \det(v_3, v_4) + \det(v_4, v_5)|$$

□

Fakt 1.47 można uogólnić na wszystkie (również wklęsłe) wielokąty, choć dowód tego uogólnienia wykracza poza ramy niniejszego skryptu:

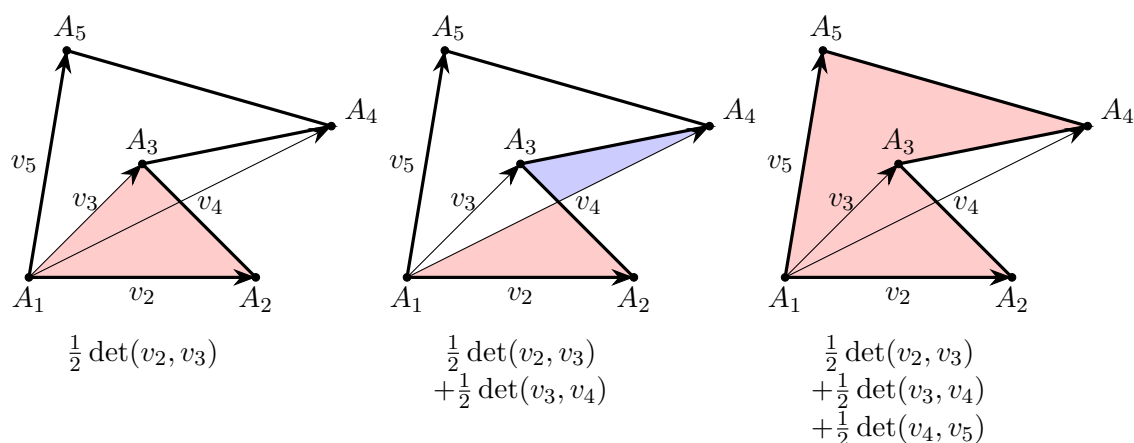
Fakt 1.48

Pole **dowolnego** wielokąta $A_1A_2\dots A_n$ wyraża się wzorem:

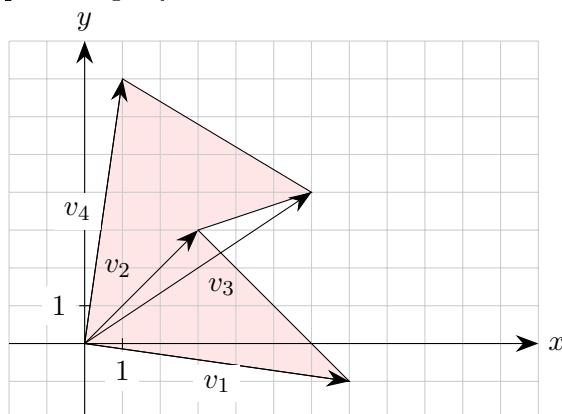
$$\frac{1}{2}|\det(v_2, v_3) + \det(v_3, v_4) + \dots + \det(v_{n-1}v_n)|$$

gdzie $v_i = \overrightarrow{A_1A_i}$.

Nie przedstawimy dowodu tego faktu, natomiast na rysunku możemy zobaczyć jak działa on w przypadku wielokątów wypukłych (zaznaczono znakowane pola będące sumą odpowiednich wyznaczników, gdzie kolor czerwony oznacza pole dodatnie, zaś niebieski – ujemne).

**Przykład 3**

Oblicz pole wielokąta z poniższego rysunku.



Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 1.48 pole to jest równe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\det(v_1, v_2) + \det(v_2, v_3) + \det(v_3, v_4)| &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} (24 - 6 + 46) = 32 \end{aligned}$$

Na koniec użyjemy wyznaczników do rozwiązywania układu dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi. Zaczniemy od rozważenia pojedynczego równania:

Fakt 1.49

Zbiór rozwiązań pojedynczego równania liniowego z niewiadomymi x i y :

$$ax + by = p$$

jest jednym z następujących zbiorów:

- prostą, gdy $a \neq 0$ lub $b \neq 0$,
- płaszczyzną, gdy $a = b = p = 0$,
- zbiorem pustym, gdy $a = b = 0$, ale $p \neq 0$.

Dowód. Jeśli przynajmniej jeden z parametrów a i b jest niezerowy, to zgodnie z (1.8) otrzymujemy równanie prostej. Jeśli $a = b = 0$, to równanie ma postać $0 = p$ i jest równaniem sprzecznym (gdy $p \neq 0$) lub tożsamościowym (gdy $p = 0$). $\square$

Fakt 1.50

Zbiór rozwiązań układu dwóch równań liniowych z niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.12a) \\ (1.12b) \end{matrix}$$

jest jednym z następujących zbiorów:

- punktem, gdy (1.12a) i (1.12b) są równaniami przecinających się prostych,
- prostą, gdy (1.12a) i (1.12b) są równaniami tej samej prostej lub jedno z nich jest równaniem prostej, a drugie równaniem tożsamościowym,
- zbiorem pustym, gdy (1.12a) i (1.12b) są równaniami (różnych) prostych równoległych lub jedno z nich jest równaniem sprzecznym,
- płaszczyzną, gdy (1.12a) i (1.12b) są tożsamościowe, tzn. $a = b = c = d = p = q = 0$.

Dowód. Zgodnie z Faktem 1.49 rozwiązaniem każdego z równań (1.12a) i (1.12b) jest prosta płaszczyzna lub zbiór pusty. Rozwiązaniem układu równań jest część wspólna rozwiązań (1.12a) i (1.12b), czyli część wspólna dwóch prostych (tzn. punkt, prosta lub zbiór pusty), płaszczyzna, część wspólna płaszczyzny i prostej (tzn. prosta) lub zbiór pusty. $\square$

Fakt 1.51: Wzory Cramera

Dany jest następujący układ równań z niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad (1.13)$$

w którym zakładamy, że przynajmniej jeden ze współczynników a, b, c, d jest niezerowy.

Wyznacznik $D = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazywamy *wyznacznikiem głównym* układu. Wówczas:

- Jeśli $D \neq 0$, to układ ma jednoznaczne rozwiązanie postaci:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases} \quad \text{gdzie } D_x = \det \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix}, \quad D_y = \det \begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}$$

- Jeśli $D = 0$ oraz $D_x \neq 0$ i $D_y \neq 0$, to układ jest spreczny.
- Jeśli $D = 0$ oraz $D_x = D_y = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Niemożliwe jest, by $D = 0$ oraz tylko jeden z wyznaczników D_x i D_y był niezerowy.

Dowód. Wykorzystując obydwa równania otrzymujemy:

$$d(ax + by) - b(cx + dy) = dp - bq$$

czyli po przekształceniu:

$$(ad - bc)x = pd - bq$$

Podobnie wykorzystując oba równania układu otrzymujemy:

$$a(cx + dy) - c(ax + by) = aq - cp$$

czyli po przekształceniu:

$$(ad - bc)y = aq - pc$$

Stąd jeśli $D = ad - bc \neq 0$ dostajemy:

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc} = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{aq - pc}{ad - bc} = \frac{D_y}{D}$$

Jeśli $D = 0$, to na mocy Faktu 1.40 wektory $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ są współliniowe. Jeśli układ (1.13) zapiszemy w postaci wektorowej:

$$x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

to otrzymamy równanie mówiące, że $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ jest kombinacją liniową $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Ponieważ jednak $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ są współliniowe, więc równanie ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ jest współliniowe z $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (i równocześnie z $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$), czyli $D_x = D_y = 0$. W przeciwnym razie $D_x \neq 0$ i $D_y \neq 0$ (przypadek gdy jedna z tych liczb jest zerem, a druga nie jest niemożliwy) i układ jest sprzeczny. $\square$

Przykład 4

Rozwiąż następujące układy równań:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie. (a) Obliczamy:

$$D = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = -7, \quad D_x = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 1, \quad D_y = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 5$$

czyli układ ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{7}$, $y = \frac{D_y}{D} = -\frac{5}{7}$.

(b) Obliczamy:

$$D = \det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad D_x = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3, \quad D_y = \det \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 9$$

czyli układ jest sprzeczny.

(c) Obliczamy:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = 0, \quad D_x = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = 0, \quad D_y = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Rozwiązaniem tego układu jest zbiór punktów leżących na prostej $x - 3y = 1$ (równanie $3x - 9y = 2$ to równanie tej samej prostej).

Fakt 1.52

Jeśli na płaszczyźnie dane są dwa niewspółliniowe wektory u i v , to każdy wektor w można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów u i v :

$$w = su + tv$$

gdzie s i t są liczbami rzeczywistymi (współczynnikami kombinacji liniowej).

Dowód. Oznaczmy $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ oraz $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Wówczas zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań z niewiadomymi s i t :

$$\begin{cases} su_1 + tv_1 = w_1 \\ su_2 + tv_2 = w_2 \end{cases}$$

Wiemy, że układ taki ma jednoznaczne rozwiązanie, jeśli $\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \neq 0$, co na mocy Faktu 1.40 jest prawdą, bo wektory u i v nie są współliniowe. $\square$

Rozdział 2

Przekształcenia płaszczyzny

2.1 Przekształcenia liniowe i afiniczne

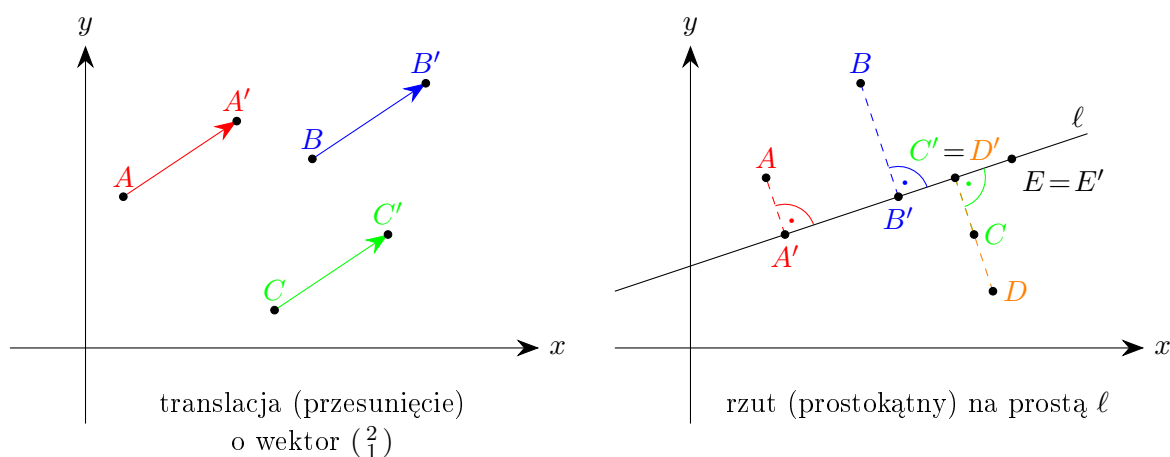
Definicja 2.1

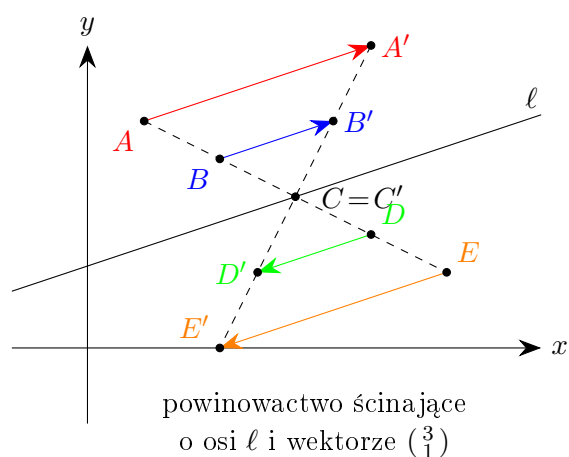
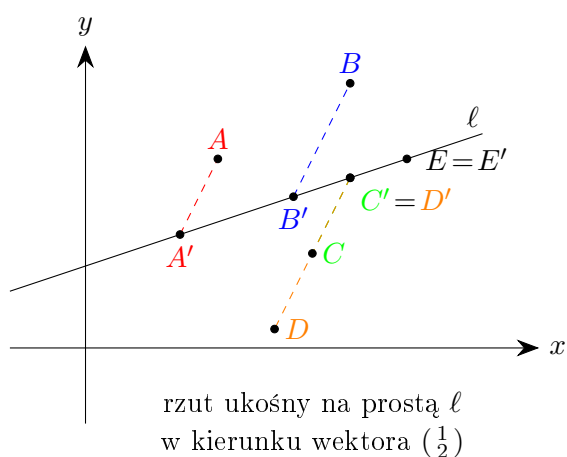
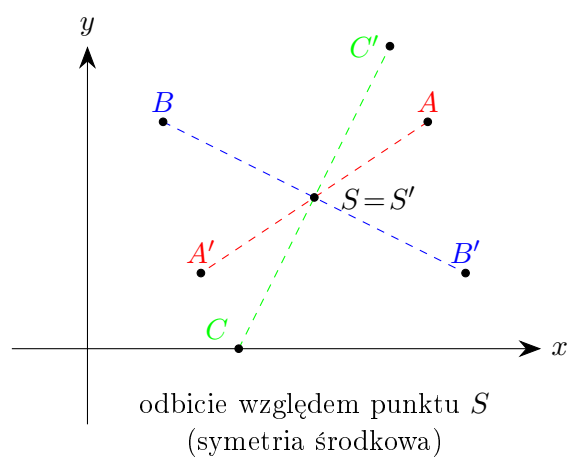
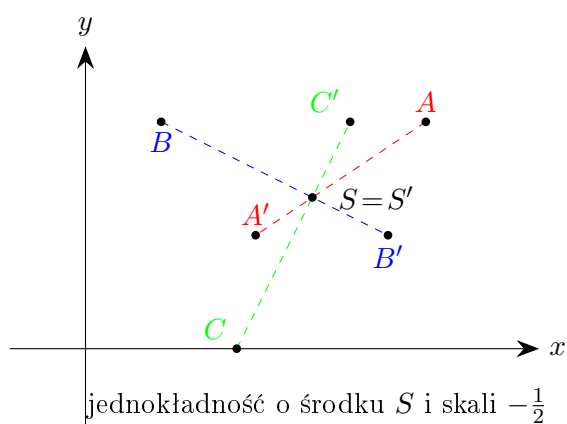
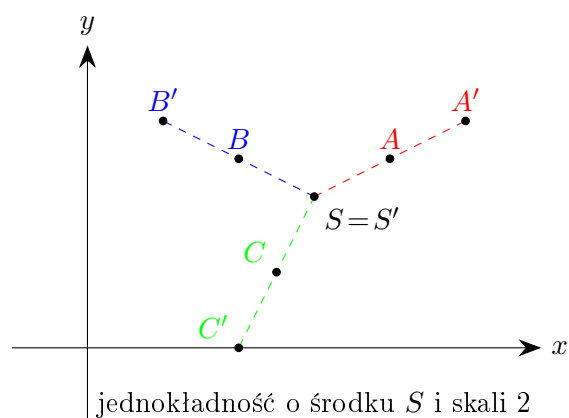
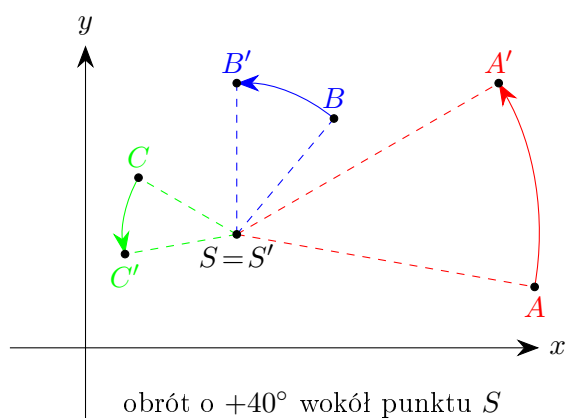
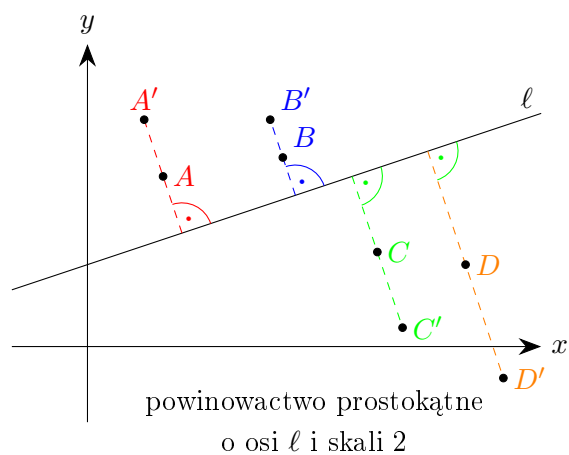
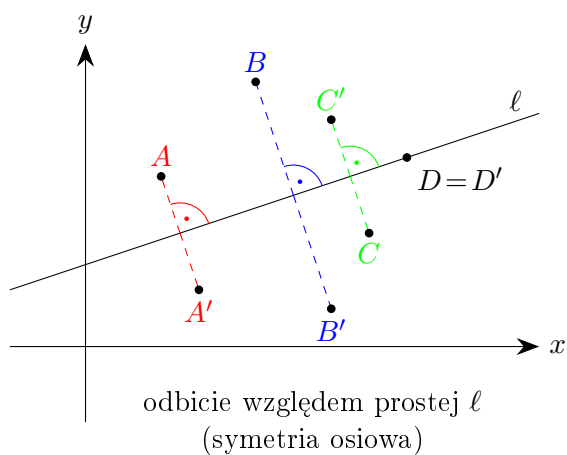
Przekształcenie płaszczyzny (w siebie) to **funkcja** $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tzn. przyporządkowanie każdemu punktowi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ punktu $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Zazwyczaj obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oznaczamy $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Jeśli punkty oznaczmy pojedynczymi literami (A, B, P, Q itd.), to ich obrazy będziemy oznaczać, odpowiednio, A', B', P', Q' itd.

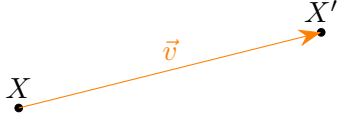
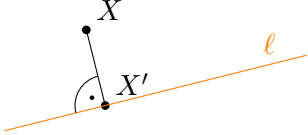
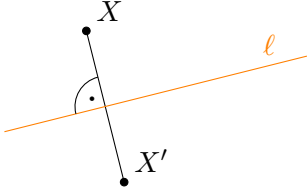
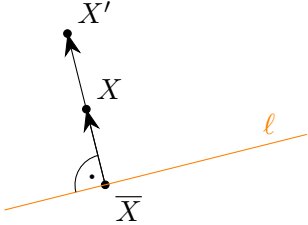
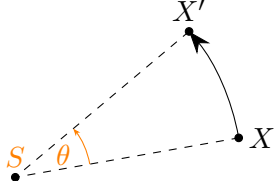
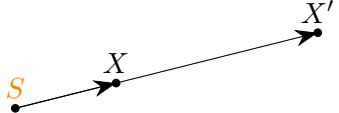
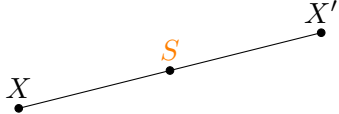
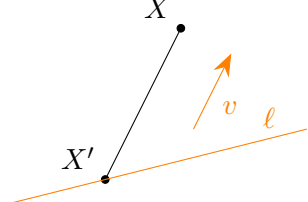
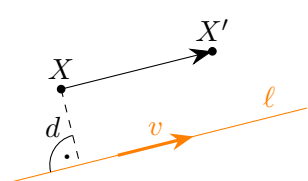
Litera F jest nazwą przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, natomiast $F(P)$ oznacza punkt płaszczyzny będący obrazem punktu P (oznaczenie $F(P)$ będziemy stosowali wymiennie z oznaczeniem P' , o ile nie będzie powodowało to niejasności).

Poniżej kilka przykładów przekształceń płaszczyzny.





Poniżej podane są formalne definicje każdego z przekształceń zaprezentowanych poglądowo na poprzednich dwóch stronach.

1	<i>Translacja (przesunięcie) o wektor v</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{XX'} = v$	
2	<i>Rzut (prostokątny) na prostą ℓ</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na prostej ℓ, że: $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$	
3	<i>Odbicie (symetria) względem prostej ℓ</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$ oraz X i X' znajdują się w równych odległościach od prostej ℓ i po przeciwnych jej stronach.	
4	<i>Powinowactwo prostokątne o osi ℓ i skali $k \neq 0$</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{XX'} = k \cdot \overrightarrow{\bar{X}X}$ gdzie $\bar{X}$ jest rzutem (prostokątnym) punktu X na prostą ℓ.	
5	<i>Obrót o kąt θ wokół punktu S</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $SX' = SX$ oraz skierowany kąt $\angle XSX'$ ma miarę θ.	
6	<i>Jednokładność o środku S i skali $k \neq 0$</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$	
7	<i>Odbicie względem punktu S (symetria środkowa o środku S)</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że punkt S jest środkiem odcinka XX'.	
8	<i>Rzut ukośny na prostą ℓ w kierunku wektora v</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na prostej ℓ, że: $\overrightarrow{XX'} \parallel v$	
9	<i>Powinowactwo ścinające o osi ℓ i wektorze v</i> (gdzie v jest wektorem kierunkowym prostej ℓ) to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{XX'} = d(X) \cdot v$ gdzie $d(X)$ to znakowana odległość punktu X od prostej ℓ.	

Przykładami przekształceń płaszczyzny są również:

- *przekształcenie identycznościowe*, czyli przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowane wzorem: $F(X) = X$ (każdy punkt przechodzi na siebie),
- *przekształcenie stałe*, czyli przekształcenie, przy którym każdy punkt ma taki sam obraz, np. $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowane wzorem: $G(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- *przekształcenie zerowe* (szczególny przypadek przekształcenia stałego), czyli przekształcenie $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowane wzorem $H(X) = 0$.

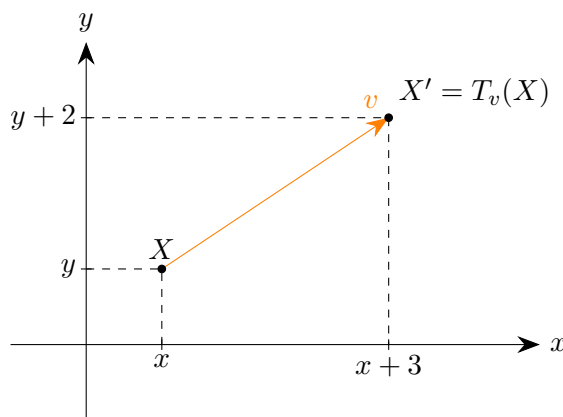
Wygodnym opisem przekształcenia płaszczyzny jest podanie jego wzoru, tzn. sposobu wyliczenia współrzędnych obrazu $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ przy pomocy współrzędnych argumentu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Zwróćmy uwagę, że przekształcenie płaszczyzny (tak jak każda funkcja) to jedynie **przyporządkowanie** każdemu punktowi płaszczyzny jakiegoś (innego lub tego samego) punktu. Przekształcenie „pamięta” zatem jedynie punkt P' (obraz punktu P), a nie „drogę” jaką pokonuje punkt P , aby znaleźć się w P' . Dlatego np. obrót o $+270^\circ$ wokół punktu S jest **tym samym** przekształceniem co obrót o -90° wokół S . Podobnie obrót o 180° wokół punktu S jest tym samym przekształceniem co symetria środkowa o środku S .

Przykład 1 (translacja)

Wyznacz wzór translacji (przesunięcia) T_v o wektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.



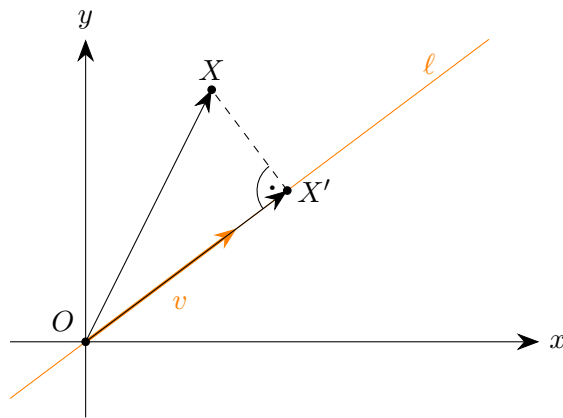
Jak widać na powyższym rysunku funkcja T_v przyporządkowuje punktowi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ punkt:

$$T_v \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix}$$

Przykład 2 (rzut prostokątny)

Wyznacz wzór rzutu (prostokątnego) P_ℓ na prostą ℓ o równaniu $3x - 4y = 0$.

Rozwiązanie.



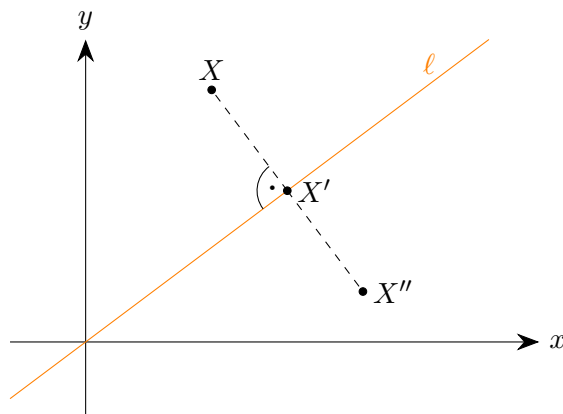
Przekształcenie P_ℓ przeprowadza wektor $X = \overrightarrow{OX}$ (pamiętamy o utożsamianiu wektorów i punktów) na jego rzut na wektor kierunkowy v prostej ℓ . Wektor normalny prostej ℓ to $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, więc jej wektor kierunkowy to $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Przekształcenie P_ℓ przyporządkowuje zatem punktowi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ punkt:

$$P_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = p_{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{4x + 3y}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y \\ \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y \end{pmatrix}$$

Przykład 3 (odbicie względem prostej)

Wyznacz wzór odbicia (symetrii) S_ℓ względem prostej ℓ o równaniu $3x - 4y = 0$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy wynik z Przykładu 2, dlatego (wyjątkowo) obraz punktu X przez przekształcenie oznaczmy X'' , zaś przez X' oznaczmy rzut punktu X na prostą ℓ , którego współrzędne wyliczyliśmy w Przykładzie 2.



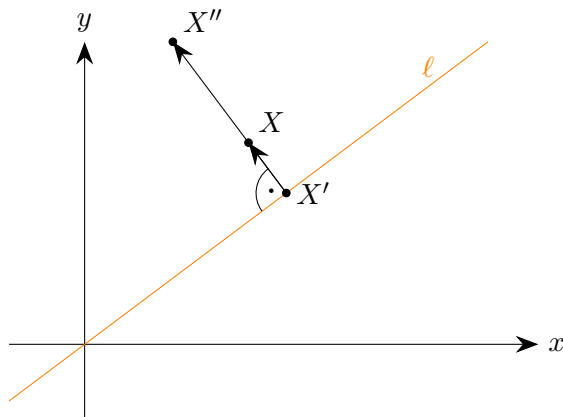
Zauważmy, że X' jest środkiem odcinka XX'' . Stąd ze wzoru (1.1) mamy $X' = \frac{1}{2}(X + X'')$, czyli:

$$S_\ell(X) = X'' = 2X' - X = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y \\ \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y \\ \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y \end{pmatrix}$$

Przykład 4 (powinowactwo prostokątne)

Wyznacz wzór powinowactwa prostokątnego o skali 3 względem prostej ℓ o równaniu $3x - 4y = 0$

Rozwiązanie. Podobnie jak w Przykładzie 3 oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ przez powinowactwo prostokątne jako X'' , zaś przez X' rzut punktu X na prostą ℓ .



Zgodnie z definicją powinowactwa prostokątnego zachodzi równość wektorów:

$$\overrightarrow{X'X''} = 3 \cdot \overrightarrow{X'X} \quad \text{czyli} \quad (X'' - X') = 3 \cdot (X - X')$$

skąd otrzymujemy

$$X'' = 3X - 2X'$$

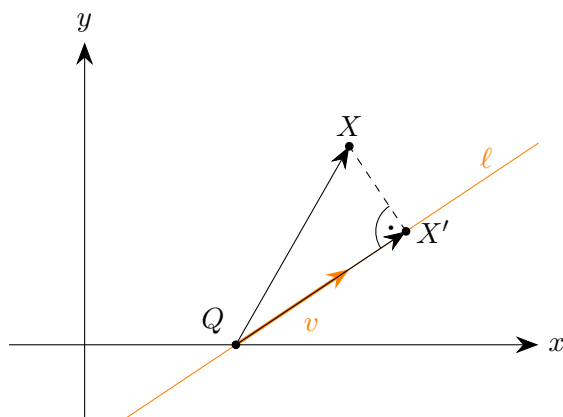
Podstawiając wyliczone w Przykładzie 2 współrzędne X' dostajemy:

$$X'' = 3X - 2X' = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y \\ \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{43}{25}x - \frac{24}{25}y \\ -\frac{24}{25}x + \frac{57}{25}y \end{pmatrix}$$

Przykład 5 (rzut prostokątny raz jeszcze)

Wyznacz wzór rzutu (prostokątnego) P_ℓ na prostą ℓ o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Oznaczmy $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oraz $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Utrudnienie względem Przykładu 2 polega na tym, że prosta ℓ nie przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, a zatem wektor $X' = \overrightarrow{OX'}$ nie jest rzutem wektora $X = \overrightarrow{OX}$ na wektor kierunkowy prostej ℓ .



Zauważmy natomiast, że jeśli Q jest (dowolnym) punktem prostej ℓ , to wektor $\overrightarrow{QX'}$ będzie rzutem wektora $\overrightarrow{QX}$ na wektor kierunkowy prostej ℓ i będziemy mogli powtórzyć rozumowanie z Przykładu 2 (gdzie rolę punktu Q pełnił punkt O). Przyjmijmy $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wektor normalny prostej ℓ to $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, więc jej wektor kierunkowy to $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Stąd:

$$\overrightarrow{QX'} = p_v(\overrightarrow{QX}) = \frac{\overrightarrow{QX} \circ v}{v \circ v} v = \frac{3(x-2) + 2y}{9+4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3x+2y-6}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{18}{13} \\ \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

Wobec tego

$$P_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = X' = Q + \overrightarrow{QX'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{18}{13} \\ \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y + \frac{8}{13} \\ \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

czyli

$$\begin{cases} x' = \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y + \frac{8}{13} \\ y' = \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13} \end{cases}$$

Rozwiązanie (sposób II). Punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ma spełniać dwa warunki:

- punkt X' leży na prostej ℓ ,
- wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest prostopadły do prostej ℓ .

Ponieważ wektorem kierunkowym prostej jest wektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, więc powyższy układ warunków można zapisać w postaci następującego układu równań (z niewiadomymi x' i y'):

$$\begin{cases} 2x' - 3y' - 4 = 0 \\ \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 2x' - 3y' - 4 = 0 \\ 3(x' - x) + 2(y' - y) = 0 \end{cases}$$

Przekształcając ten układ do postaci (1.13) otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x' - 3y' = 4 \\ 3x' + 2y' = 3x + 2y \end{cases}$$

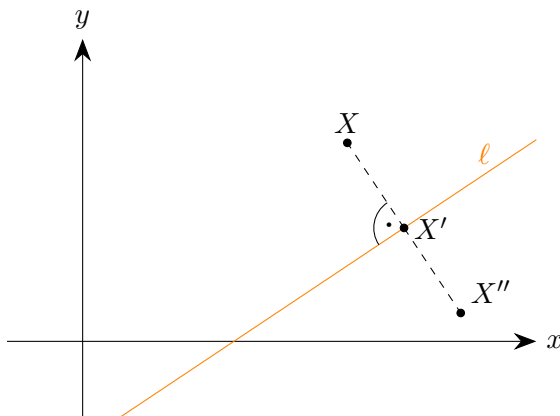
Zgodnie ze wzorami Cramera (Fakt 1.51) rozwiązanie powyższego układu to:

$$\begin{cases} x' = \det \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3x+2y & 2 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{8+9x+6y}{13} = \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y + \frac{8}{13} \\ y' = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3x+2y \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{6x+4y-12}{13} = \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13} \end{cases}$$

Przykład 6 (odbicie raz jeszcze)

Wyznacz wzór odbicia (symetrii) S_ℓ względem prostej ℓ o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Podobnie jak w Przykładzie 5 utrudnienie polega na tym, że prosta ℓ nie przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Oznaczmy obraz punktu X przez X'' , natomiast X' niech oznacza rzut punktu X na prostą ℓ (wyznaczony już w Przykładzie 5).



Ponieważ punkt X' jest środkiem odcinka XX'' , więc zgodnie ze wzorem (1.1):

$$X' = \frac{1}{2}(X'' + X), \quad \text{czyli} \quad X'' = 2X' - X$$

Podstawiając wyliczone w Przykładzie 5 współrzędne punktu X' otrzymujemy:

$$S_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = X'' = 2X' - X = 2 \cdot \left(\frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y + \frac{8}{13} \right) - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{16}{13} \\ \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{24}{13} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (sposób II). Punkt $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ musi spełniać dwa warunki:

- znakowane odległości X i X'' od prostej ℓ są liczbami przeciwnymi,
- wektor $\overrightarrow{XX''}$ jest prostopadły do prostej ℓ .

Warunki te, zgodnie z Wnioskiem 1.46 oraz Faktem 1.40 (prostopadłość do prostej ℓ oznacza współliniowość z jej wektorem normalnym) można zapisać w postaci układu równań z niewiadomymi x'' i y'' :

$$\begin{cases} \frac{2x'' - 3y'' - 4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = -\frac{2x - 3y - 4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \\ \det \left(\begin{pmatrix} x'' - x \\ y'' - y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x'' - 3y'' = -2x + 3y + 8 \\ -3(x'' - x) - 2(y'' - y) = 0 \end{cases}$$

Po przekształceniu do postaci (1.13) otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x'' - 3y'' = -2x + 3y + 8 \\ 3x'' + 2y'' = 3x + 2y \end{cases}$$

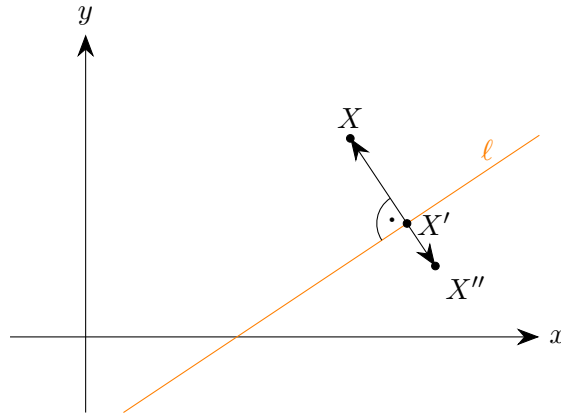
Zgodnie ze wzorami Cramera (Fakt 1.51) otrzymujemy:

$$\begin{cases} x'' = \begin{pmatrix} -2x + 3y + 8 & -3 \\ 3x + 2y & 2 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{5x + 12y + 16}{13} \\ y'' = \begin{pmatrix} 2 & -2x + 3y + 8 \\ 3 & 3x + 2y \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{12x - 5y - 24}{13} \end{cases}$$

Przykład 7 (powinowactwo prostokątne raz jeszcze)

Wyznacz wzór powinowactwa prostokątnego o skali $-\frac{1}{2}$ i osi ℓ o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Podobnie jak w Przykładach 5 i 6 prosta ℓ nie przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Oznaczmy obraz punktu X przez X'' , natomiast niech X' oznacza rzut punktu X na prostą ℓ (wyznaczony już w Przykładzie 5).



Zgodnie z definicją powinowactwa prostokątnego:

$$\overrightarrow{X'X''} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{X'X} \quad \text{czyli} \quad X'' - X' = -\frac{1}{2}(X - X')$$

Podstawiając wyliczone w Przykładzie 5 współrzędne punktu X' otrzymujemy:

$$X'' = -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}X' = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y + \frac{8}{13} \\ \frac{1}{13}x + \frac{1}{13}y - \frac{1}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{26}x + \frac{18}{26}y + \frac{24}{26} \\ \frac{18}{26}x - \frac{1}{26}y - \frac{2}{26} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (sposób II). Punkt $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ musi spełniać dwa warunki:

- znakowana odległość X'' od prostej ℓ to $(-\frac{1}{2})$ znakowanej odległości X od ℓ ,
- wektor $\overrightarrow{XX''}$ jest prostopadły do prostej ℓ .

Warunki te, zgodnie z Wnioskiem 1.46 i Faktem 1.40 (prostopadłość do prostej ℓ oznacza współliniowość z jej wektorem normalnym), można zapisać w postaci układu równań z niewiadomymi x'' i y'' :

$$\begin{cases} \frac{2x'' - 3y'' - 4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 3y - 4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \\ \det \left(\begin{pmatrix} x'' - x \\ y'' - y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2 \cdot (2x'' - 3y'' - 4) = -(2x - 3y - 4) \\ -3(x'' - x) - 2(y'' - y) = 0 \end{cases}$$

Po przekształceniu do postaci (1.13) otrzymujemy:

$$\begin{cases} 4x'' - 6y'' = -2x + 3y + 12 \\ 3x'' + 2y'' = 3x + 2y \end{cases}$$

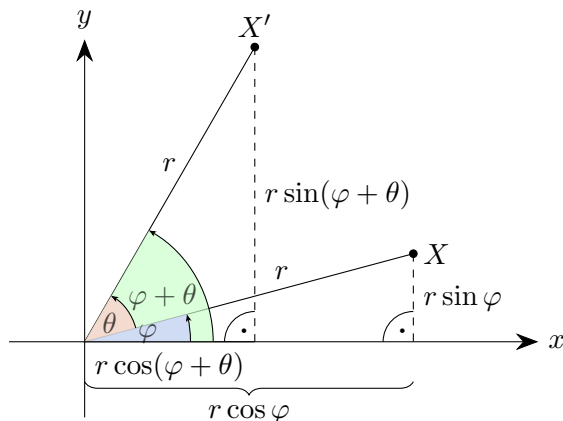
Zgodnie ze wzorami Cramera (Fakt 1.51) otrzymujemy:

$$\begin{cases} x'' = \begin{pmatrix} -2x + 3y + 12 & -6 \\ 3x + 2y & 2 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{14x + 18y + 24}{26} \\ y'' = \begin{pmatrix} 4 & -2x + 3y + 12 \\ 3 & 3x + 2y \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{18x - y - 36}{26} \end{cases}$$

Przykład 8 (obrót)

Wyznacz wzór obrotu R_θ wokół punktu $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o kąt θ .

Rozwiązanie.



Obrót przeprowadza punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ na punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Zgodnie ze wzorem (1.10) możemy zapisać oba te wektory w postaci biegunowej:

$$X = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi + \theta) \\ r \sin(\varphi + \theta) \end{pmatrix}$$

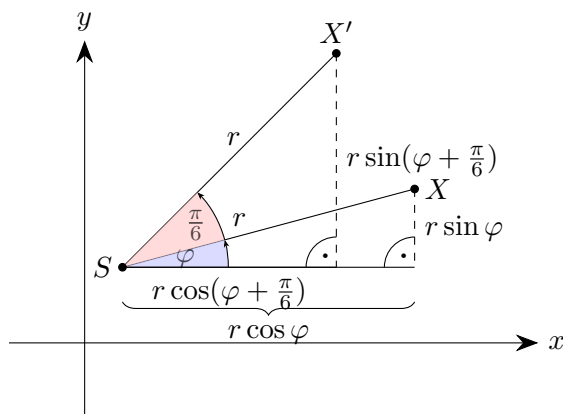
Korzystając ze wzorów trygonometrycznych dostajemy:

$$X' = \begin{pmatrix} r(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) \\ r(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r \cos \varphi) \cos \theta - (r \sin \varphi) \sin \theta \\ (r \cos \varphi) \sin \theta + (r \sin \varphi) \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

Przykład 9 (obrót raz jeszcze)

Wyznacz wzór obrotu R_θ^S wokół punktu $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ o kąt $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Rozwiązanie.



Obrót przeprowadza punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ na punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Zgodnie ze wzorem (1.10)

możemy zapisać wektory $\overrightarrow{SX}$ i $\overrightarrow{SX'}$ w postaci biegunowej:

$$\overrightarrow{SX} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}, \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{SX'} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi + \frac{\pi}{6}) \\ r \sin(\varphi + \frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 \end{pmatrix}$$

Korzystając ze wzorów trygonometrycznych dostajemy:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SX'} &= \begin{pmatrix} r(\cos \varphi \cos \frac{\pi}{6} - \sin \varphi \sin \frac{\pi}{6}) \\ r(\cos \varphi \sin \frac{\pi}{6} + \sin \varphi \cos \frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r \cos \varphi) \cos \frac{\pi}{6} - (r \sin \varphi) \sin \frac{\pi}{6} \\ (r \cos \varphi) \sin \frac{\pi}{6} + (r \sin \varphi) \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x - 1) \cos \frac{\pi}{6} - (y - 2) \sin \frac{\pi}{6} \\ (x - 1) \sin \frac{\pi}{6} + (y - 2) \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

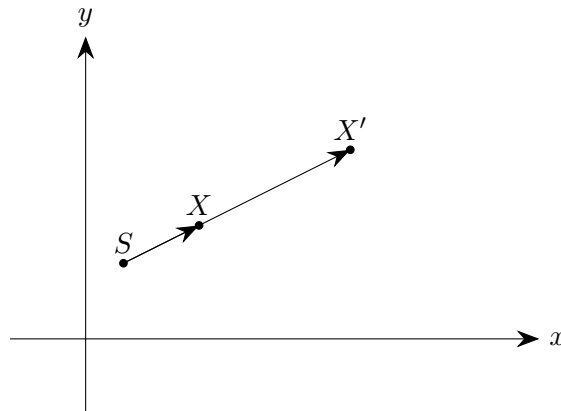
stąd:

$$R_{\theta}^S(X) = X' = S + \overrightarrow{SX'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + (2 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + (\frac{3}{2} - \sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

Przykład 10 (jednokładność)

Wyznacz wzór jednokładności D_k^S o skali $k = 3$ i środku $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.



Punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i jego obraz $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ spełniają warunek:

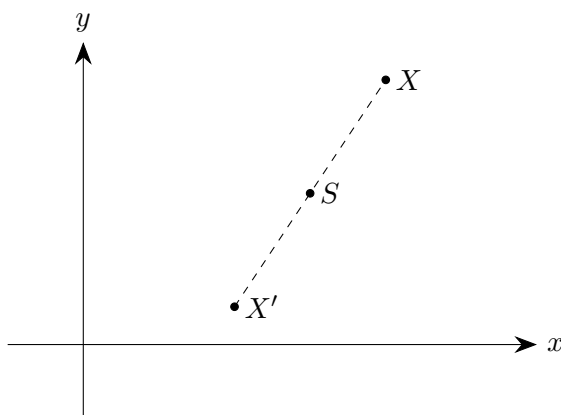
$$\overrightarrow{SX'} = 3 \cdot \overrightarrow{SX} \quad \text{czyli} \quad X' - S = 3 \cdot (X - S)$$

skąd otrzymujemy

$$D_k^S(X) = X' = 3X - 2S = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2 \\ 3y - 4 \end{pmatrix}$$

Przykład 11 (symetria środkowa)

Wyznaczyć wzór symetrii środkowej względem punktu $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Rozwiązanie.

Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ przez $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Punkt $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ jest środkiem odcinka XX' , więc zgodnie ze wzorem (1.1):

$$S = \frac{1}{2}(X + X')$$

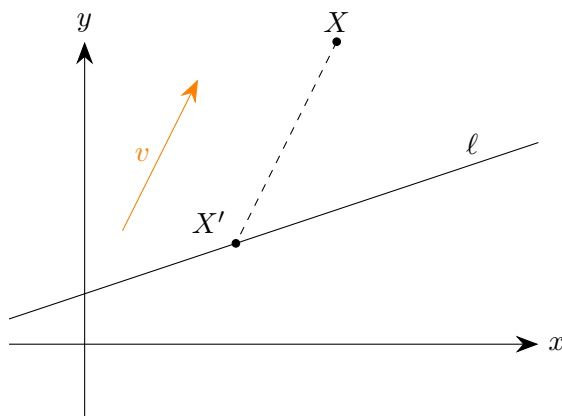
czyli

$$X' = 2S - X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 6 \\ -y + 4 \end{pmatrix}$$

Przykład 12 (rzut ukośny)

Wyznacz wzór rzutu ukośnego na prostą ℓ o równaniu $x - 3y + 1 = 0$ w kierunku wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.



Obrazem punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jest punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ spełniający dwa warunki:

- punkt X' leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$,
- wektor $\overrightarrow{XX'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$ jest równoległy do wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Warunki te można zapisać w postaci układu równań z niewiadomymi x' i y' :

$$\begin{cases} x' - 3y' + 1 = 0 \\ \det \left(\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x' - 3y' + 1 = 0 \\ 4(x' - x) - 2(y' - y) = 0 \end{cases}$$

Po przekształceniu do postaci (1.13) otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' - 3y' = -1 \\ 4x' - 2y' = 4x - 2y \end{cases}$$

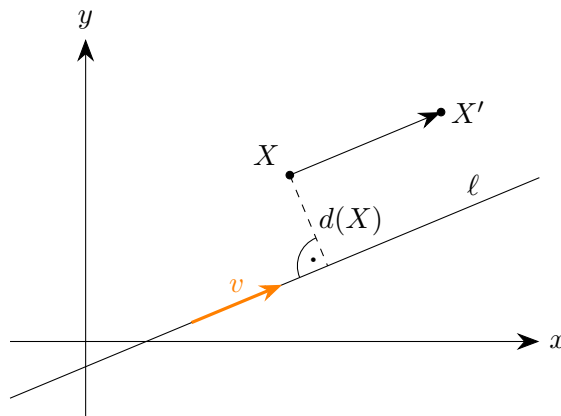
Zgodnie ze wzorami Cramera (Fakt 1.51) otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4x - 2y & -2 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{2 + 12x - 6y}{10} \\ y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4x - 2y \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{4x - 2y + 4}{10} \end{cases}$$

Przykład 13 (powinowactwo ścinające)

Wyznacz wzór powinowactwa ścinającego o osi ℓ mającej równanie $5x - 12y - 8 = 0$ i wektorze $v = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.



Zauważmy, że v jest wektorem kierunkowym prostej ℓ . Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ przez $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Zgodnie z definicją powinowactwa ścinającego, punkt X' spełnia warunek:

$$\overrightarrow{XX'} = d(X) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gdzie $d(X)$ to znakowana odległość punktu X od prostej ℓ , czyli zgodnie z Wnioskiem 1.46:

$$d(X) = \frac{5x - 12y - 8}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{5x - 12y - 8}{13}$$

Wobec tego:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{5x - 12y - 8}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{13}x - \frac{144}{13}y - \frac{96}{13} \\ \frac{25}{13}x - \frac{47}{13}y - \frac{40}{13} \end{pmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że zgodnie z komentarzem przy Wniosku 1.46 znakowaną odległość można zdefiniować na dwa różne sposoby (w zależności od przyjętego równania prostej), co powoduje, że powyższe zadanie ma jeszcze jedno możliwe rozwiązanie.

Zauważmy, że we wszystkich przykładach otrzymaliśmy wzór postaci:

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \quad (2.1)$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f . Wzór ten, dla uproszczenia, zapisujemy zazwyczaj w następującej postaci:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

gdzie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazywamy *macierzą* 2×2 , znak $\cdot$ oznacza mnożenie macierzy przez wektor zdefiniowane następująco:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

zaś znak $+$ oznacza dodawanie wektorów (zauważmy, że wynikiem mnożenia macierzy przez wektor jest wektor). Mnożenie zdefiniowane wzorem (2.3) to bardzo szczególny przypadek mnożenia macierzy, które będzie omówione w Rozdziale 2.2.

Nie każde przekształcenie płaszczyzny ma wzór postaci (2.1) (jest to bardzo wyjątkowa grupa przekształceń), ale są to dokładnie te przekształcenia płaszczyzny, których badaniem zajmuje się algebra liniowa. Stąd następująca definicja:

Definicja 2.2

Przekształceniem afinicznym płaszczyzny nazywamy przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

gdzie a, b, c, d, e, f to pewne liczby rzeczywiste.

Wzór ten można również zapisać w postaci:

$$F(X) = AX + v \quad (2.4)$$

(gdzie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$) lub w postaci:

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \quad (2.5)$$

Wzór ten składa się z *części liniowej* i *części translacyjnej*:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{część liniowa}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{\text{część translacyjna}} \quad (2.6)$$

Rozróżnienie bierze się z tego, że badanie przekształceń afinicznych w dużej mierze opiera się o badanie ich części liniowej, czyli badanie związanymi z nimi przekształceń liniowych.

Algebra liniowa zajmuje się przede wszystkim szczególnym przypadkiem przekształceń afinicznych, w których nie ma części translacyjnej (tzn. $e = f = 0$), czyli przekształceń liniowych.

Definicja 2.3

Przekształceniem liniowym płaszczyzny nazywamy przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane wzorem:

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazywamy *macierzą przekształcenia liniowego* F i oznaczamy $m(F)$.

Wzór ten można również zapisać w postaci:

$$F(X) = AX \quad (2.7)$$

(gdzie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) lub w postaci:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (2.8)$$

Fakt 2.4

Przekształcenie afiniczne F jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $F(0) = 0$.

Dowód. Przekształcenie afiniczne ma wzór $F(X) = AX + v$, gdzie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ i jest ono liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy jego część translacyjna znika, tzn. $v = 0$. Ponieważ

$$F(0) = A \cdot 0 + v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = v$$

więc jest to równoważne stwierdzeniu $F(0) = 0$. $\square$

Wszystkie przekształcenia rozpatrywane w tym rozdziale były przekształceniami afinicznymi. Fakt 2.4 pomaga wyszczególnić wśród nich przekształcenia liniowe, co pokazano poniżej.

	przekształcenia afiniczne	przekształcenia liniowe
1	translacja o dowolny wektor	translacja o wektor 0 (=identyczność)
2	rzut (prostokątny) na dowolną prostą	rzut (prostokątny) na prostą przechodzącą przez O
3	odbicie względem dowolnej prostej	odbicie względem prostej przechodzącej przez O
4	powinowactwo prostokątne o dowolnej osi	powinowactwo prostokątne o osi przechodzącej przez O
5	obrót wokół dowolnego punktu	obrót wokół punktu O
6	jednokładność o dowolnym środku	jednokładność o środku w punkcie O
7	symetria środkowa o dowolnym środku	symetria środkowa o środku O
8	rzut ukośny na dowolną prostą	rzut ukośny na prostą przechodzącą przez O
9	powinowactwo ścinające o dowolnej osi	powinowactwo ścinające o osi przechodzącej przez O
10	identyczność	identyczność
11	przekształcenie stałe	przekształcenie zerowe

Przykład 14

Znaleźć obraz punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ przez:

- (a) przekształcenie liniowe F o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,
 (b) przekształcenie afiniczne o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2 Macierze**Definicja 2.5**

*Macierzą rozmiaru $m \times n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb o m wierszach i n kolumnach. Liczby z tej tablicy nazywamy *wyrazami macierzy*. Macierz o jednakowej liczbie wierszy i kolumn nazywamy *macierzą kwadratową*.*

Przykłady macierzy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

W pierwszej części niniejszego skryptu (skupionej na przestrzeniach 2-wymiarowych), będziemy badać jedynie macierze o co najwyżej 2 wierszach i co najwyżej 2 kolumnach, czyli macierze następujących rozmiarów:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

macierz 2×2 macierz 2×1 macierz 1×2 macierz 1×1

Jak widać wektor $v \in \mathbb{R}^2$ można traktować jako szczególny przypadek macierzy (macierz rozmiaru 2×1 , tzn. macierz o 2 wierszach i 1 kolumnie). Podobnie liczby rzeczywiste można traktować jako macierz rozmiaru 1×1 (macierz o 1 wierszu i 1 kolumnie).

Na zbiorze macierzy tego samego rozmiaru (np. na zbiorze macierzy 2×2) można wprowadzić dwa działania: dodawanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar.

Definicja 2.6

Dodawanie macierzy 2×2 definiujemy w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

Analogicznie definiujemy dodawanie jakichkolwiek dwóch macierzy tego samego rozmiaru (np. macierzy 2×1 lub macierzy 1×2).

Definicja 2.7

Mnożenie macierzy 2×2 przez skalar definiujemy w następujący sposób:

$$t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}$$

W szczególności *macierzą przeciwną* do $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jest macierz $(-1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Analogicznie definiujemy mnożenie macierzy innych rozmiarów przez skalar oraz macierze przeciwne do macierzy innych rozmiarów.

Zauważmy, że Definicje 2.6 i 2.7 stanowią uogólnienie zarówno działań na wektorach (patrz Fakt 1.8 i Fakt 1.9) traktowanych jako macierze 2×1 , jak i działań na liczbach rzeczywistych, traktowanych jako macierze 1×1 . Macierz zerową 0 (oznaczaną zazwyczaj tym samym symbolem co liczba zero, bądź wektor zerowy) definiujemy podobnie jak wektor zerowy:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W związku z wyraźną analogią między działaniami na macierzach a działaniami na wektorach nie dziwi, że działania na macierzach mają własności analogiczne do własności działań na wektorach (por. Fakt 1.12):

Fakt 2.8

Dla dowolnych macierzy A, B, C (tego samego rozmiaru) oraz dowolnych skalarów s, t zachodzą następujące własności:

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $A + B = B + A$ | (przemienność +) |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ | (łączność +) |
| 3) $0 + A = A + 0 = A$ | (element neutralny +) |
| 4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ | (element przeciwny) |
| 5) $(s + t) \cdot A = s \cdot A + t \cdot A$ | (rozdzielność · względem +) |
| 6) $t \cdot (A + B) = t \cdot A + t \cdot B$ | (rozdzielność · względem +) |
| 7) $s \cdot (tA) = (st) \cdot A$ | (łączność mnożenia skalarów) |
| 8) $1 \cdot A = A$ | |

Dowód. Pokażemy dowód łączności dodawania. Dowód pozostałych własności przebiega analogicznie i jego przeprowadzenie pozostawiamy czytelnikowi:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' + a'' & b + b' + b'' \\ c + c' + c'' & d + d' + d'' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' + a'' & b' + b'' \\ c' + c'' & d' + d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' + a'' & b + b' + b'' \\ c + c' + c'' & d + d' + d'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Na zbiorze macierzy można również wprowadzić trzecie działanie (nie mające odpowiednika wśród działań na wektorach): mnożenie macierzy. W odróżnieniu od dodawania i mnożenia przez skalar (które zachowują rozmiar macierzy), mnożyć można jedynie takie dwie macierze, że:

$$\text{liczba kolumn pierwszej macierzy} = \text{liczba wierszy drugiej macierzy} \quad (2.9)$$

Genezę takiego warunku pokazuje poniższa definicja mnożenia.

Definicja 2.9

Iloczyn macierzy 2×2 definiujemy w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

(wyraz w i -tym wierszu i j -tej kolumnie wynikowej macierzy wyliczany jest na podstawie wyrazów w i -tym wierszu pierwszego czynnika i w j -tej kolumnie drugiego czynnika).

Iloczyn macierzy innych rozmiarów (spełniających warunek (2.9)) definiujemy analogicznie, w szczególności:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że mnożenie macierzy 2×2 przez macierz 2×1 (którą utożsamiamy z wektorem) jest zdefiniowane jak we wzorze (2.3) definiującym mnożenie macierzy przez wektor.

Wykonywanie mnożenia macierzy może być wygodniejsze, jeśli drugi czynnik zapiszemy nieco wyżej, a wynik mnożenia poniżej drugiego czynnika, jak w następującym przykładzie.

Przykład 1

Oblicz następujące iloczyny macierzy:

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie.

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ \hline 7 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ \hline 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że mnożenie macierzy **nie jest przemienne**. Po pierwsze, jeśli A i B są macierzami, to zazwyczaj przynajmniej jedno z mnożeń $A \cdot B$, $B \cdot A$ jest niewykonalne (np. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest wykonalne, natomiast $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ nie). Po drugie, w sytuacji, gdy oba mnożenia są wykonalne, mogą one dawać różne wyniki, co pokazuje kolejny przykład.

Przykład 2

Obliczyć iloczyny $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Jak widać $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Fakt 2.10

Jeśli A , B i C są takimi macierzami, że mnożenia $A \cdot B$ i $B \cdot C$ są wykonalne, to:

- 1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (łączność $\cdot$)
- 2) $t \cdot (A \cdot B) = (tA) \cdot B = A \cdot (tB)$
- 3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (rozdzielność $\cdot$ względem $+$)
- 4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (rozdzielność $\cdot$ względem $+$)

Dowód. (1) Rozważmy przypadek, gdy A , B i C są macierzami 2×2 . Pozostałe przypadki rozpatrujemy analogicznie.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} aa'a'' + bc'a'' + ab'c'' + bd'c'' & aa'b'' + bc'b'' + ab'd'' + bd'd'' \\ ca'a'' + dc'a'' + cb'c'' + dd'c'' & ca'b'' + dc'b'' + cb'd'' + dd'd'' \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'a'' + b'c'' & a'b'' + b'd'' \\ c'a'' + d'c'' & c'b'' + d'd'' \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} aa'a'' + ab'c'' + bc'a'' + bd'c'' & aa'b'' + ab'd'' + bc'b'' + bd'd'' \\ ca'a'' + cb'c'' + dc'a'' + dd'c'' & ca'b'' + cb'd'' + dc'b'' + dd'd'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

czyli lewa i prawa strona wzoru są równe.

Dowód pozostałych własności przebiega podobnie. □

Własności działań na macierzach zebrane w Faktach 2.8 i 2.10 pozwalają udowodnić następujące ważne własności przekształceń liniowych:

Fakt 2.11

Jeśli $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem liniowym, to dla dowolnych wektorów u i v oraz dowolnego skalaru t zachodzą własności:

- 1) $F(0) = 0$
- 2) $F(u + v) = F(u) + F(v)$ (addytywność)
- 3) $F(t \cdot u) = t \cdot F(u)$ (jednorodność)

Dowód. Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego F , tzn. $F(X) = AX$. Wówczas własność (1) otrzymujemy przez proste sprawdzenie:

$$F \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Własność (2) wynika z rozdzielności mnożenia macierzy względem dodawania (Fakt 2.8), gdzie wektor traktujemy jako szczególny przypadek macierzy:

$$F(u + v) = A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v = F(u) + F(v)$$

Własność (3) wynika z Faktu 2.10:

$$F(t \cdot u) = A \cdot (tu) = t \cdot (Au) = t \cdot F(u)$$

□

Własność (1) jest w rzeczywistości szczególnym przypadkiem własności (3) (przy $t = 0$). Niemniej, jako wyjątkowo ważny przypadek, podana została w postaci osobnej własności.

Przykład 3

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. O wektorach u i v wiemy, że $F(u + v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $F(u - v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u)$ i $F(v)$.

Rozwiązanie. Korzystając z addytywności i jednorodności przekształceń liniowych (Fakt 2.11), dostajemy:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = F(u + v) = F(u) + F(v)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = F(u - v) = F(u) - F(v)$$

Dodając stronami obie równości otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2F(u), \quad \text{czyli} \quad F(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a odejmując stronami obie równości:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2F(v), \quad \text{czyli} \quad F(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Własności addytywności i jednorodności (łącznie nazywane *liniowością*) mogą stanowić alternatywną charakteryzację przekształceń liniowych, co pokazuje następujący fakt.

Fakt 2.12

Przekształcenie płaszczyzny $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest addytywne i jednorodne.

Dowód. Pokazaliśmy już (Fakt 2.11), że przekształcenie liniowe jest addytywne i jednorodne. Niech teraz $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym przekształceniem płaszczyzny, które jest addytywne i jednorodne. Oznaczmy obrazy wersorów $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ przez przekształcenie F jako $F(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $F(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Wówczas dla dowolnego $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= F(xe_1 + ye_2) = F(xe_1) + F(ye_2) = xF(e_1) + yF(e_2) = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax \\ cx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

czyli F jest przekształceniem liniowym. □

Wnioskiem z dowodu jest następujący fakt:

Fakt 2.13

Jeśli $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, to:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = F(e_1) \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = F(e_2)$$

(tzn. kolumny macierzy przekształcenia to obrazy wersorów).

Dowód.

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

□

Zwróćmy uwagę, że z Faktu 2.13 wynika, że znajomość obrazów obu wersorów przez przekształcenie liniowe F pozwala na ustalenie obrazu przez F każdego innego punktu płaszczyzny. Pokazuje to jak bardzo szczególnymi przekształceniami są przekształcenia liniowe.

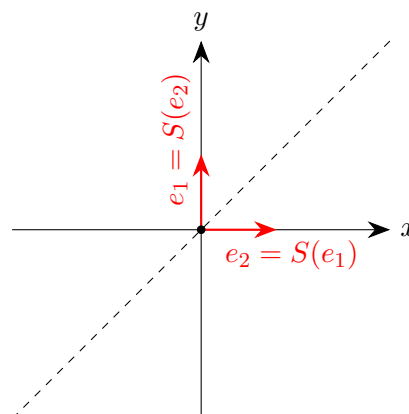
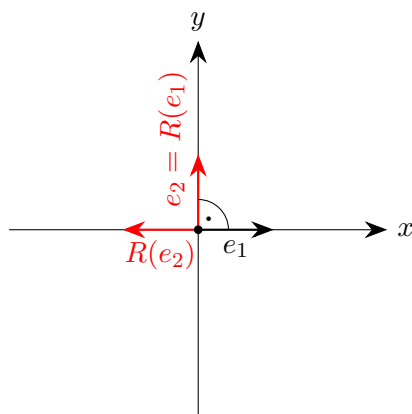
Przykład 4

Wyznacz (bez żadnych rachunków) macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) obrót R o $+90^\circ$ wokół 0 ,

(b) odbicie S względem prostej $y = x$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 2.13 kolumny macierzy przekształcenia to obrazy wersorów. Zatem:



(a) Ponieważ $R(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $R(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (pierwszy rysunek), więc:

$$R(X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

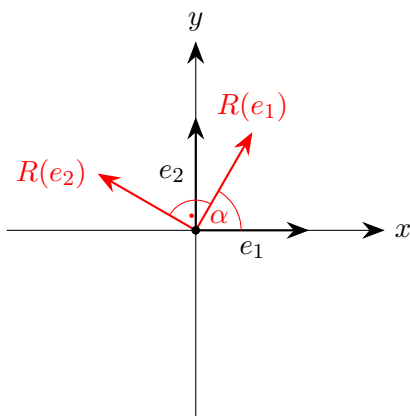
(b) Ponieważ $S(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $S(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (drugi rysunek), więc:

$$S(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Przykład 5

Wyznacz macierz obrotu R o kąt θ wokół 0 .

Rozwiązanie.



Zgodnie ze wzorem (1.10) na współrzędne biegunowe wektora, obrazy wersorów to:

$$R\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$R\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 90^\circ) \\ \sin(\alpha + 90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos 90^\circ - \sin \alpha \sin 90^\circ \\ \sin \alpha \cos 90^\circ + \cos \alpha \sin 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Stąd, zgodnie z Faktem 2.13 otrzymujemy macierz przekształcenia R :

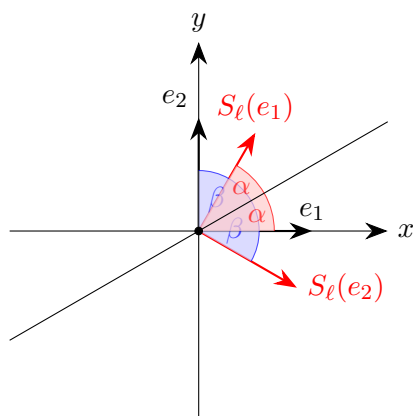
$$R(X) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} X$$

co jest prostszym wyprowadzeniem wzoru z Przykładu 8 z Rozdziału 2.1.

Przykład 6

Wyznacz macierz odbicia S_ℓ względem prostej ℓ przechodzącej przez 0 i nachylonej do dodatniej półosi Ox pod kątem α .

Rozwiązanie.



Zgodnie ze wzorem (1.10) na współrzędne biegunowe wektora, obrazy wersorów to:

$$S_\ell\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_\ell\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

Ponieważ $\beta = 90^\circ - \alpha$, więc $\alpha - \beta = 2\alpha - 90^\circ$, czyli:

$$S_\ell \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha - 90^\circ) \\ \sin(2\alpha - 90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 90^\circ + \sin 2\alpha \sin 90^\circ \\ \sin 2\alpha \cos 90^\circ - \cos 2\alpha \sin 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Stąd, zgodnie z Faktem 2.13, otrzymujemy macierz przekształcenia S_ℓ :

$$S_\ell(X) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} X$$

Przekształcenie liniowe jest jednoznacznie wyznaczone nie tylko przez obrazy obu wersorów, ale przez obrazy dowolnych dwóch **niewspółliniowych** wektorów. W tym sensie poniższy fakt uogólnia Fakt 2.13.

Fakt 2.14

Przekształcenie liniowe płaszczyzny jest jednoznacznie wyznaczone przez obrazy dowolnych dwóch **niewspółliniowych** wektorów, tzn. jeśli dane są niewspółliniowe wektory u i v oraz dowolne wektory u' i v' to istnieje **dokładnie jedno** przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że

$$F(u) = u' \quad \text{oraz} \quad F(v) = v'$$

Dowód. Oznaczmy $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$. Szukamy macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ takiej, że:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} au_1 + bu_2 = u'_1 \\ cu_1 + du_2 = u'_2 \\ av_1 + bv_2 = v'_1 \\ cv_1 + dv_2 = v'_2 \end{cases}$$

Powyższy układ 4 równań z 4 niewiadomymi (a, b, c, d) można zapisać w postaci dwóch układów 2 równań z 2 niewiadomymi (pierwszy z niewiadomymi a, b , drugi z niewiadomymi c, d):

$$\begin{cases} au_1 + bu_2 = u'_1 \\ av_1 + bv_2 = v'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} cu_1 + du_2 = u'_2 \\ cv_1 + dv_2 = v'_2 \end{cases}$$

Wyznacznik główny każdego z tych układów jest taki sam i wynosi:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2 = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \det(u, v) \neq 0$$

(jako że wektory u i v nie są współliniowe). Wobec tego, zgodnie ze wzorami Cramera (Fakt 1.51) każdy z układów ma jednoznaczne rozwiązanie. Stąd istnieje dokładnie jedna macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, czyli dokładnie jedno przekształcenie liniowe F spełniające warunki zadania. $\square$

Fakt 2.14 ma również swój odpowiednik dla przekształceń afinicznych:

Fakt 2.15

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny jest jednoznacznie wyznaczone przez obrazy dowolnych trzech punktów **nie leżących na jednej prostej**, tzn. jeśli dane są nie leżące na jednej prostej punkty u, v, w oraz dowolne punkty u', v', w' to istnieje **dokładnie jedno** przekształcenie afiniczne $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że

$$F(u) = u', \quad F(v) = v', \quad F(w) = w'$$

Dowód. Oznaczmy $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$, $w' = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix}$. Szukamy macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ oraz wektora $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ takich, że:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} au_1 + bu_2 + e = u'_1 \\ cu_1 + du_2 + f = u'_2 \\ av_1 + bv_2 + e = v'_1 \\ cv_1 + dv_2 + f = v'_2 \\ aw_1 + bw_2 + e = w'_1 \\ cw_1 + dw_2 + f = w'_2 \end{cases}$$

Powyższy układ 6 równań z 6 niewiadomymi (a, b, c, d, e, f) można zapisać w postaci dwóch układów 3 równań z 3 niewiadomymi (pierwszy z niewiadomymi a, b, e , drugi z niewiadomymi c, d, f):

$$\begin{cases} au_1 + bu_2 + e = u'_1 \\ av_1 + bv_2 + e = v'_1 \\ aw_1 + bw_2 + e = w'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} cu_1 + du_2 + f = u'_2 \\ cv_1 + dv_2 + f = v'_2 \\ cw_1 + dw_2 + f = w'_2 \end{cases}$$

Przekształćmy ten układ wyznaczając z trzeciego równania niewiadomą e (odpowiednio f) i wstawiając do pierwszych dwóch równań:

$$\begin{cases} a(u_1 - w_1) + b(u_2 - w_2) = (u'_1 - w'_1) \\ a(v_1 - w_1) + b(v_2 - w_2) = (v'_1 - w'_1) \end{cases} \quad \begin{cases} c(u_1 - w_1) + d(u_2 - w_2) = (u'_2 - w'_2) \\ c(v_1 - w_1) + d(v_2 - w_2) = (v'_2 - w'_2) \end{cases}$$

Otrzymane układy na mocy wzorów Cramera (Fakt 1.51) mają jednoznaczne rozwiązanie, gdyż:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 - w_1 & u_2 - w_2 \\ v_1 - w_1 & v_2 - w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - w_1 & v_1 - w_1 \\ u_2 - w_2 & v_2 - w_2 \end{pmatrix} = \det(u - w, v - w) \neq 0$$

bo wektory $u - w$ i $v - w$ są liniowo niezależne. □

Przykład 7

Znajdź przekształcenie liniowe płaszczyzny F takie, że $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 2.14, ponieważ wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ nie są współliniowe, wiemy, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe spełniające warunki zadania. Wzór tego przekształcenia ma postać $F(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$, gdzie a, b, c, d spełniają układ równań:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + 2d = 1 \\ 2a + 3b = -1 \\ 2c + 3d = 2 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad F(X) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Przykład 8

Znajdź przekształcenie afiniczne płaszczyzny F takie, że $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ oraz $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Punkty $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nie leżą na jednej prostej (co można zobaczyć np. sprawdzając, że wektory $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ nie są współliniowe), więc zgodnie z Faktem 2.15 istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne, spełniające warunki zadania. Wzór tego przekształcenia ma postać:

$$F(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Niewiadome a, b, c, d, e, f spełniają układ równań:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a + b + e = 2 \\ c + d + f = 6 \\ 2a + b + e = 3 \\ 2c + d + f = 9 \\ a - b + e = 4 \\ c - d + f = -2 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Do szczególnych punktów związanych z danym przekształceniem należą tzw. punkty stałe przekształcenia:

Definicja 2.16

Punktem stałym przekształcenia F nazywamy taki punkt X , że $F(X) = X$.

Przykład 9

Wyznacz punkty stałe następujących przekształceń:

- (a) obrót wokół punktu S o kąt $\theta \neq 0$,
- (b) odbicie (symetria) względem prostej ℓ ,
- (c) translacja o wektor $v \neq 0$,
- (d) identyczność.

- Rozwiązanie.* (a) Jedynym punktem stałym obrotu jest środek obrotu, czyli punkt S .
- (b) Punktem stałym odbicia (symetrii) względem prostej jest każdy punkt leżący na osi odbicia, czyli zbiorem punktów stałych jest prosta ℓ .
- (c) Translacja o niezerowy wektor nie ma punktów stałych.
- (d) Identyfikacja to przekształcenie, dla którego każdy punkt jest punktem stałym.

Przykład 10

Wyznacz wszystkie punkty stałe przekształcenia afinicznego danego wzorem:

$$(a) F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (b) G(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. (a) Szukamy punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających równanie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x + 2y - 2 = x \\ 3x - y - 4 = y \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Szukamy punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających równanie:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y + 1 = x \\ 4x + 5y + 4 = y \end{cases}$$

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań: każdy punkt leżący na prostej $x + y + 1 = 0$. Są to wszystkie punkty stałe przekształcenia G .

Fakt 2.4 można teraz wysłowić następująco: przekształcenie afiniczne jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy 0 jest jego punktem stałym.

Fakt 2.17

Zbiór punktów stałych przekształcenia afinicznego (a więc również przekształcenia liniowego) jest punktem lub prostą lub zbiorem pustym lub całą płaszczyzną.

Dowód. Jeśli F jest przekształceniem afinicznym, to $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ dla pewnych a, b, c, d, e, f . Punkty stałe F to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} ax + by + e = x \\ cx + dy + f = y \end{cases}$$

Układ ten zapisany w postaci (1.13) to:

$$\begin{cases} (a-1)x + by = -e \\ cx + (d-1)y = -f \end{cases}$$

Zgodnie z Faktem 1.50 zbiór rozwiązań takiego układu jest punktem lub prostą lub zbiorem pustym lub całą płaszczyzną. $\square$

2.3 Składanie przekształceń

Niech F i G będą przekształceniami płaszczyzny. Oznaczmy obraz przez przekształcenie G dowolnego punktu X jako X' , zaś obraz punktu X' przez przekształcenie F jako X'' . Wówczas przekształcenie, które przeprowadza X na X'' nazywamy *złożeniem przekształceń* F i G i oznaczamy $F \circ G$:

$$X \xrightarrow{G} X' \xrightarrow{F} X''$$

Formalnie można to zapisać w następujący sposób:

Definicja 2.18

Złożeniem przekształceń F i G nazywamy przekształcenie $F \circ G$ zadane następującym wzorem:

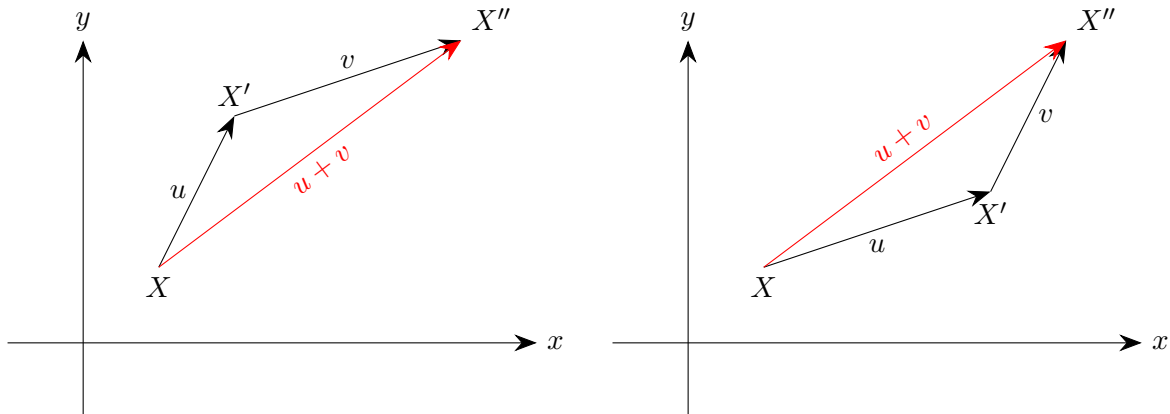
$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) \quad (2.10)$$

Zauważmy, że przekształcenia w złożeniu $F \circ G$ wykonywane są „od prawej do lewej”, tzn. najpierw G , potem F . Taka kolejność została ustalona po to, by wzór (2.10) miał możliwie prostą postać (kolejność liter po obu stronach równości jest jednakowa).

Przykład 1

Znajdź złożenia $T_v \circ T_u$ i $T_u \circ T_v$ translacji T_u i T_v , gdzie $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie (sposób I).



Zauważmy, że dla dowolnego punktu X zachodzi:

$$(T_v \circ T_u)(X) = T_v(T_u(X)) = T_{u+v}(X) \quad (\text{pierwszy rysunek})$$

$$(T_u \circ T_v)(X) = T_u(T_v(X)) = T_{u+v}(X) \quad (\text{drugi rysunek})$$

Rozwiązanie (sposób II). Wzory obu przekształceń to:

$$T_u(X) = X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad T_v(X) = X + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$T_v \left(T_u \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = T_v \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = T_v \left(\begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ y+3 \end{pmatrix}$$

$$T_u \left(T_v \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = T_u \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = T_u \left(\begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ y+3 \end{pmatrix}$$

Przykład 2

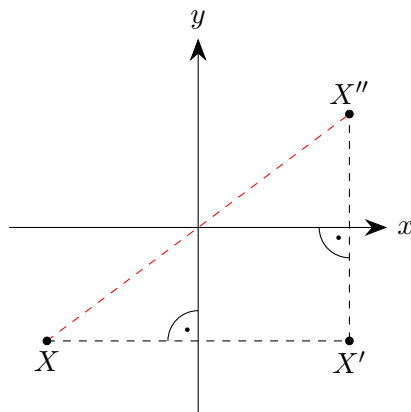
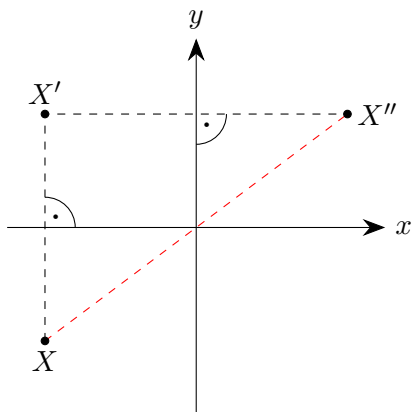
Znajdź złożenia $S_y \circ S_x$ i $S_x \circ S_y$ odbicia S_x względem osi Ox z odbiciem S_y względem osi Oy .

Rozwiązanie (sposób I). Zauważmy, że dla dowolnego punktu X zachodzi:

$$(S_y \circ S_x)(X) = S_y(S_x(X)) = R_\pi(X) \quad (\text{pierwszy rysunek})$$

$$(S_x \circ S_y)(X) = S_x(S_y(X)) = R_\pi(X) \quad (\text{drugi rysunek})$$

gdzie R_π oznacza obrót o kąt π wokół punktu O (czyli symetrię środkową).



Rozwiązanie (sposób II). Wzory obu przekształceń to:

$$S_x \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_y \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

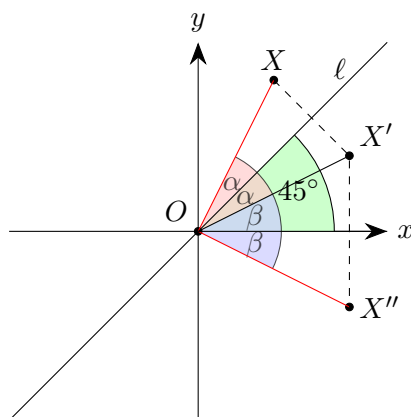
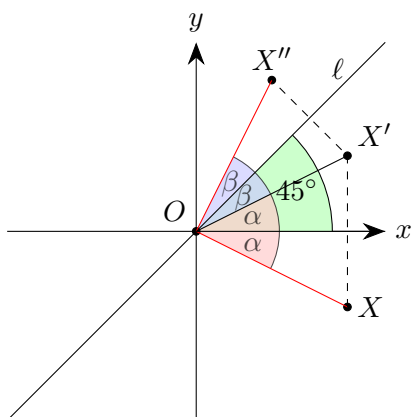
$$S_y \left(S_x \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = S_y \left(\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$S_x \left(S_y \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = S_x \left(\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Przykład 3

Znajdź złożenia odbić $S_\ell \circ S_x$ i $S_x \circ S_\ell$, gdzie ℓ jest prostą o równaniu $y = x$.

Rozwiązanie (sposób I).



Pierwszy rysunek przedstawia złożenie $S_\ell \circ S_x$. Zauważmy, że $\alpha + \beta = 45^\circ$ (kąt nachylenia prostej $y = x$ do osi Ox), więc $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$. Ponieważ dodatkowo $OX = OX' = OX''$, więc punkt X obraca się o kąt $+90^\circ$ wokół punktu O . Stąd: $S_\ell \circ S_x = R_{+90^\circ}$.

Drugi rysunek przedstawia złożenie $S_x \circ S_\ell$. Podobne rozumowanie jak powyżej pokazuje, że punkt X obraca się o kąt -90° wokół punktu O . Stąd: $S_x \circ S_\ell = R_{-90^\circ}$.

Rozwiązanie (sposób II). Wzory przekształceń to (wzór na S_ℓ był wyprowadzony w Przykładzie 11 z Rozdziału 2.2):

$$S_x \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$(S_\ell \circ S_x) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = S_\ell \left(S_x \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = S_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$(S_x \circ S_\ell) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = S_x \left(S_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = S_x \left(\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że zgodnie ze wzorem z Przykładu 8 z Rozdziału 2.1 są to rzeczywiście wzory obrotów o $+90^\circ$ i -90° wokół punktu O .

Przykład 4

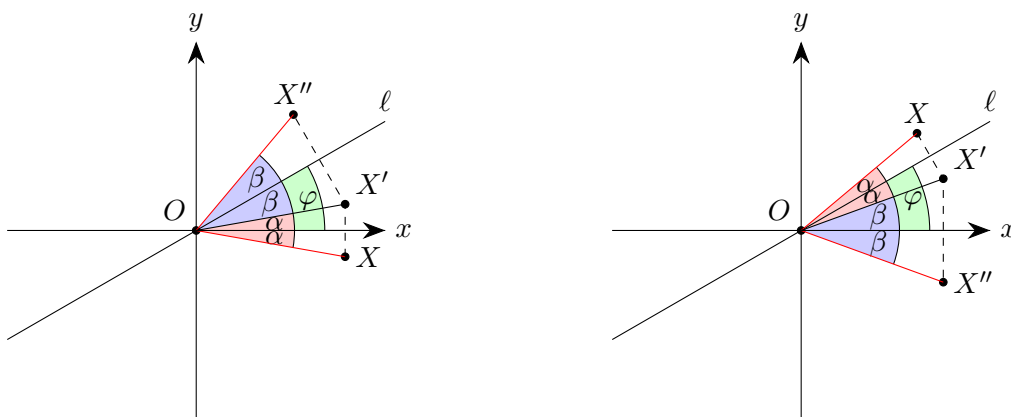
Znajdź złożenia $S_\ell \circ S_x$ i $S_x \circ S_\ell$ odbicia S_ℓ względem prostej ℓ nachylonej pod kątem φ do dodatniej półosi Ox z odbiciem S_x względem osi Ox .

Rozwiązanie (sposób I). Pierwszy rysunek przedstawia złożenie $S_\ell \circ S_x$. Kąt nachylenia prostej ℓ do osi Ox wynosi φ , więc $\alpha + \beta = \varphi$. Ponieważ dodatkowo $OX = OX' = OX''$, więc punkt X obraca się o kąt 2φ wokół punktu O , czyli

$$S_\ell \circ S_x = R_{2\varphi}$$

Drugi rysunek przedstawia złożenie $S_x \circ S_\ell$. Podobne rozumowanie jak powyżej pokazuje, że punkt X obraca się o kąt -2φ wokół punktu O , czyli

$$S_x \circ S_\ell = R_{-2\varphi}$$



Rozwiązanie (sposób II). Wzory przekształceń to (wzór na S_ℓ był wyprowadzony w Przykładzie 6 z Rozdziału 2.2):

$$S_x \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

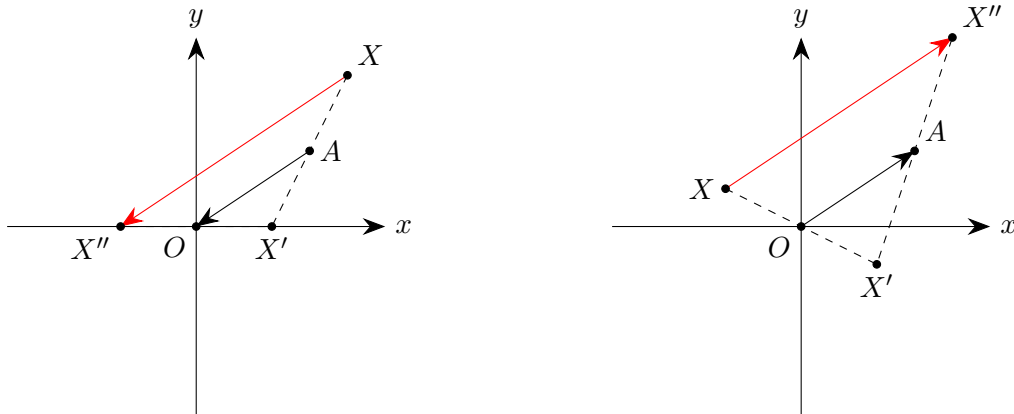
Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 S_\ell \left(S_x \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) &= S_\ell \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{2\varphi} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\
 S_x \left(S_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) &= S_x \left(\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-2\varphi) & -\sin(-2\varphi) \\ \sin(-2\varphi) & \cos(-2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{-2\varphi} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Przykład 5

Znajdź złożenia $S_O \circ S_A$ oraz $S_A \circ S_O$ symetrii środkowych o środkach O i $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie (sposób I).



Zauważmy, że w obu przypadkach odcinek OA łączy środki boków trójkąta $XX'X''$, skąd na mocy Twierdzenia Talesa mamy (niezależnie od wyboru punktu X):

$$\overrightarrow{XX''} = 2 \cdot \overrightarrow{AO} \text{ (pierwszy rysunek) oraz } \overrightarrow{XX''} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} \text{ (drugi rysunek)}$$

Stąd

$$S_O \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AO}} \text{ oraz } S_A \circ S_O = T_{2\overrightarrow{OA}}$$

W szczególności $S_O \circ S_A \neq S_A \circ S_O$.

Rozwiązanie (sposób II). Wzory przekształceń to (wzór na S_A był wyprowadzany w Przykładzie 11 z Rozdziału 2.1):

$$S_O \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \text{ oraz } S_A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6-x \\ 4-y \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 (S_O \circ S_A) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= S_O \left(S_A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = S_O \left(\begin{pmatrix} 6-x \\ 4-y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x-6 \\ y-4 \end{pmatrix} \\
 (S_A \circ S_O) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= S_A \left(S_O \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = S_A \left(\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+6 \\ y+4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Przykład 6

Znajdź złożenia $S \circ R$ i $R \circ S$ odbicia S względem prostej o równaniu $y = x$ z obrotem R o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu O .

Rozwiązanie. Tym razem złożenie trudno jest zobaczyć na rysunku, ale można wyliczyć jego wzór, podobnie jak w poprzednich przykładach. W Przykładzie 4 z Rozdziału 2.2 wyprowadzono wzory przekształceń S i R :

$$S(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad R(X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Stąd:

$$(S \circ R)(X) = S(R(X)) = S\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X = S_x(X)$$

$$(R \circ S)(X) = R(S(X)) = R\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = S_y(X)$$

Przykład 7

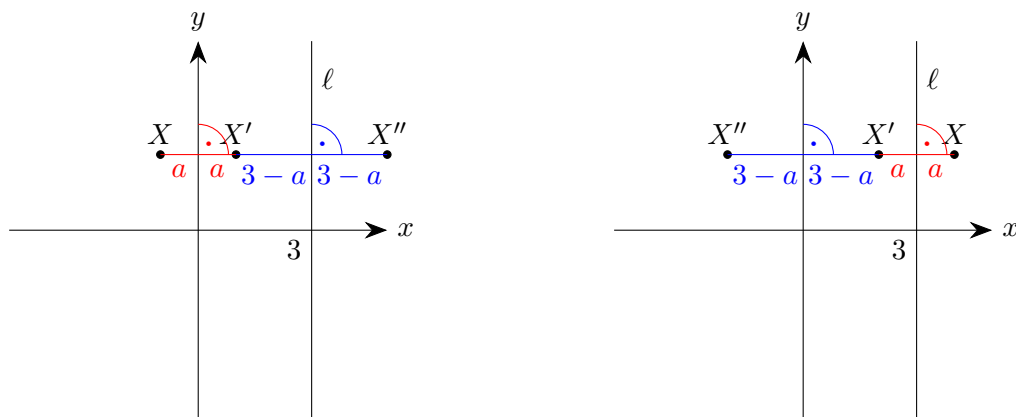
Znajdź złożenia $S_\ell \circ S_y$ i $S_y \circ S_\ell$ odbicia S_ℓ względem prostej o równaniu $x = 3$ i odbicia S_y względem osi Oy .

Rozwiązanie (sposób I). Pierwszy rysunek przedstawia złożenie $S_\ell \circ S_y$. Zauważmy, że dla dowolnego X zachodzi $\overrightarrow{XX''} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, skąd:

$$S_\ell \circ S_y = T_{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Drugi rysunek przedstawia złożenie $S_y \circ S_\ell$. Dla dowolnego X zachodzi $\overrightarrow{XX''} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, skąd:

$$S_y \circ S_\ell = T_{\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}}$$



Rozwiązanie (sposób II). Zauważmy, że dla dowolnego $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zachodzi:

$$S_y\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_\ell\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6-x \\ y \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(S_\ell \circ S_y) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= S_\ell \left(S_y \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = S_\ell \left(\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6+x \\ y \end{pmatrix} = T_{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ (S_y \circ S_\ell) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= S_y \left(S_\ell \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) = S_y \left(\begin{pmatrix} 6-x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x-6 \\ y \end{pmatrix} = T_{\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

Przykład 8

Znajdź złożenia $R_{\frac{\pi}{2}}^S \circ R_{-\frac{\pi}{2}}$ i $R_{-\frac{\pi}{2}} \circ R_{\frac{\pi}{2}}^S$ obrotów wokół punktów O i $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Postępując podobnie jak w Przykładach 8 i 9 z Rozdziału 2.1 możemy wyprowadzić wzory:

$$\begin{aligned}R_{-\frac{\pi}{2}}(X) &= \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X \\ R_{\frac{\pi}{2}}^S(X) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}(R_{-\frac{\pi}{2}} \circ R_{\frac{\pi}{2}}^S)(X) &= (R_{-\frac{\pi}{2}}(R_{\frac{\pi}{2}}^S(X))) = R_{-\frac{\pi}{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = T_{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}(X) \\ (R_{\frac{\pi}{2}}^S \circ R_{-\frac{\pi}{2}})(X) &= (R_{\frac{\pi}{2}}^S(R_{-\frac{\pi}{2}}(X))) = R_{\frac{\pi}{2}}^S \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = T_{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}(X)\end{aligned}$$

Przykład 9

Znajdź złożenia $F \circ G$ i $G \circ F$ przekształceń $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X$ i $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned}(F \circ G)(X) &= F(G(X)) = F \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (G \circ F)(X) &= G(F(X)) = G \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Przykład 10

Przedstaw przekształcenie afiniczne $F(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ w postaci złożenia przekształcenia liniowego i translacji.

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla $G(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X$ oraz $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ otrzymujemy:

$$(T_v \circ G)(X) = T_v(G(X)) = T_v\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = F(X)$$

czyli

$$T_v \circ G = F$$

Możliwe jest również znalezienie rozkładu:

$$G \circ T_u = F$$

dla pewnego (innego) wektora u . Wówczas:

$$(G \circ T_u)(X) = G(T_u(X)) = G(X + u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (X + u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot u$$

więc szukany wektor $u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ musi spełniać warunek:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 3p + q = 2 \\ 2p + q = 1 \end{cases}$$

Skąd $u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zauważmy, że $u \neq v$, co zważywszy na (dostrzeżoną w poprzednich przykładach) nieprzemienność składania przekształceń nie powinno dziwić.

Powyższy przykład można uogólnić na dowolne przekształcenia afiniczne, co pokazuje poniższy fakt.

Fakt 2.19

Każde przekształcenie afiniczne płaszczyzny jest złożeniem przekształcenia liniowego i translacji.

Dowód. Dane jest przekształcenie afiniczne $F(X) = AX + v$, gdzie A jest macierzą 2×2 , zaś v jest wektorem. Oznaczmy przez $G(X) = AX$ przekształcenie liniowe o macierzy A . Wówczas:

$$F = T_v \circ G$$

gdyż

$$(T_v \circ G)(X) = T_v(G(X)) = T_v(AX) = AX + v$$

gdzie T_v oznacza translację o wektor v . □

Obserwacje ze wszystkich przykładów z tego rozdziału można podsumować następującym faktem:

Fakt 2.20

- 1) Złożenie przekształceń liniowych płaszczyzny jest przekształceniem liniowym.
- 2) Złożenie przekształceń afinicznych płaszczyzny jest przekształceniem afinicznym.

Dowód. (1) Niech $F(X) = AX$ oraz $G(X) = BX$, gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, zaś A i B to macierze 2×2 . Korzystając z prawa łączności mnożenia macierzy (Fakt 2.10) otrzymujemy:

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F(BX) = A \cdot (BX) = (AB)X$$

czyli $F \circ G$ jest przekształceniem liniowym.

(2) Niech $F(X) = AX + v$ oraz $G(X) = BX + w$, gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, A i B to macierze 2×2 , a v i w to wektory. Korzystając z prawa łączności mnożenia macierzy oraz rozdzielności mnożenia względem dodawania (Fakt 2.10) otrzymujemy:

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F(BX + w) = A \cdot (BX + w) + v = (AB)X + (Aw + v)$$

czyli $F \circ G$ jest przekształceniem afinicznym. □

Fakt 2.21

Jeśli F i G są przekształceniami liniowymi płaszczyzny, to:

$$m(F \circ G) = m(F) \cdot m(G)$$

(tzn. składanie przekształceń liniowych odpowiada mnożeniu ich macierzy).

Dowód. Oznaczmy macierze przekształceń F i G przez $A = m(F)$ i $B = m(G)$. Wówczas:

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F(BX) = A \cdot (BX) = (A \cdot B)X$$

czyli $A \cdot B = m(F \circ G)$. □

Fakt 2.22

Składanie przekształceń jest łączne, tzn. dla dowolnych przekształceń F, G, H (dla których poniższe złożenia mają sens) zachodzi:

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

Składanie przekształceń nie jest przemienne.

Dowód. Zgodnie z Definicją 2.18:

$$((F \circ G) \circ H)(X) = (F \circ G)((H(X))) = F(G(H(X)))$$

$$(F \circ (G \circ H))(X) = (F(G \circ H(X))) = F(G(H(X)))$$

□

Przykład 11

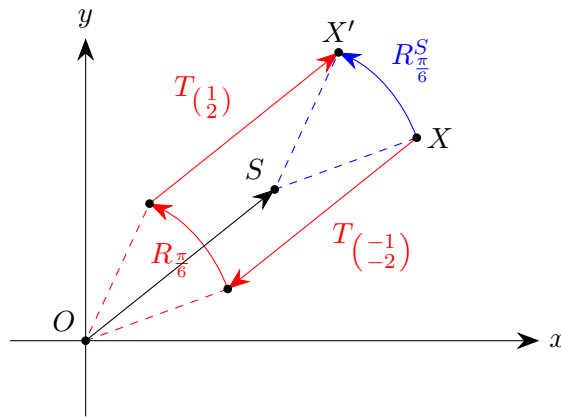
Przestaw obrót $R_{\frac{\pi}{6}}^S$ o kąt $\frac{\pi}{6}$ wokół punktu $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ w postaci złożenia:

$$R_{\frac{\pi}{6}}^S = T_v \circ R_{\frac{\pi}{6}} \circ T_{-v}$$

gdzie $R_{\frac{\pi}{6}}$ jest obrotem wokół punktu O . Wykorzystaj to przedstawienie do znalezienia wzoru przekształcenia $R_{\frac{\pi}{6}}^S$.

Rozwiązanie. Na rysunku widać, że:

$$R_{\frac{\pi}{6}}^S = T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \circ R_{\frac{\pi}{6}} \circ T_{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$



Wzory translacji i obrotu wokół punktu O wyznaczyliśmy już w Przykładach 1 i 8 w Rozdziale 2.1:

$$T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}, \quad T_{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$R_{\frac{\pi}{6}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

więc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R_{\frac{\pi}{6}}^S \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \circ R_{\frac{\pi}{6}} \circ T_{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \left(R_{\frac{\pi}{6}} \left(T_{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right) \right) \\ &= T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \left(R_{\frac{\pi}{6}} \left(\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right) \right) = T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

co pokrywa się ze wzorem z Przykładu 9 z Rozdziału 2.1.

2.4 Izometrie płaszczyzny

Definicja 2.23

Izometria płaszczyzny, to przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, które zachowuje odległości, tzn. dla dowolnych $A, B \in \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}|$$

Izometria liniowa płaszczyzny, to izometria płaszczyzny, która jest równocześnie przekształceniem liniowym.

Przykłady izometrii:

izometrie	izometrie liniowe
obrót wokół punktu	obrót wokół punktu 0
odbicie względem prostej	odbicie względem prostej przechodzącej przez punkt 0
translacja	translacja o wektor $\vec{0}$ (=identyczność)
identyczność	identyczność

Twierdzenie 2.24

Każda izometria płaszczyzny jest przekształceniem afinicznym.

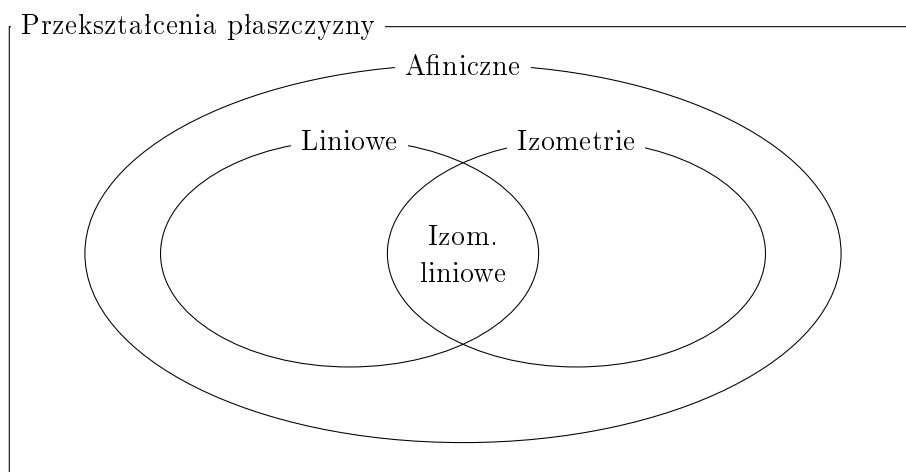
Dowód tego ważnego twierdzenia wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Wniosek 2.25

Izometria płaszczyzny F jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy $F(0) = 0$.

Dowód. Zgodnie z Twierdzeniem 2.24 izometria płaszczyzny jest przekształceniem afinicznym, więc zgodnie z Faktem 2.4 jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy $F(0) = 0$. $\square$

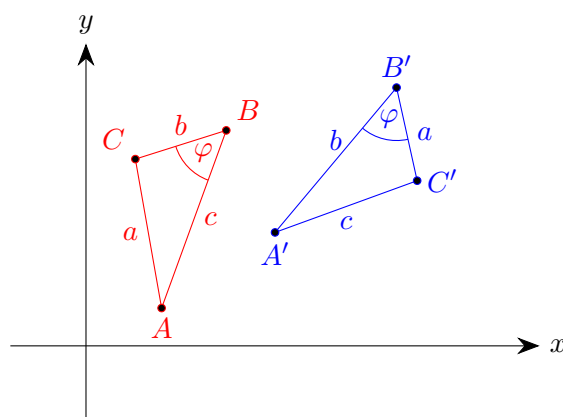
Wzajemne relacje pomiędzy poznanymi typami przekształceń płaszczyzny zebrane są na poniższym diagramie:



Fakt 2.26

Każda izometria płaszczyzny zachowuje kąty, tzn. $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Dowód. Trójkąt ABC i jego izometryczny obraz $A'B'C'$ są przystające, gdyż izometria zachowuje długości (cecha przystawania trójkątów bbb). Wobec tego odpowiadające sobie kąty tych trójkątów mają równe miary, w szczególności $\angle ABC = \angle A'B'C'$.



□

Wniosek 2.27

Jeśli F jest izometrią płaszczyzny, to dowolny wielokąt $A_1A_2 \dots A_n$ jest przystający do swojego obrazu $A'_1A'_2 \dots A'_n$ przez przekształcenie F .

Dowód. Wielokąt $A_1A_2 \dots A_n$ i jego obraz $A'_1A'_2 \dots A'_n$ mają odpowiednie boki jednakowych długości (Definicja 2.23) i odpowiednie kąty tej samej miary (Fakt 2.26). Wielokąty te są zatem przystające. □

Powyższy wniosek można uogólnić na dowolne figury na płaszczyźnie, jednak dowód takiego uogólnienia wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Fakt 2.28

Jeśli F jest izometrią płaszczyzny, to dowolna figura jest przystająca do swojego obrazu przez przekształcenie F .

Ponieważ w obszarze naszych zainteresowań znajdują się niemal wyłącznie przekształcenia liniowe, więc spośród wszystkich izometrii zajmować się będziemy głównie izometriami liniowymi.

Definicja 2.29

Mówimy, że A jest *macierzą izometrii*, jeśli przekształcenie liniowe F takie, że $m(F) = A$ (tzn. $F(X) = AX$) jest izometrią (jest to oczywiście izometria liniowa).

Twierdzenie 2.30: Klasyfikacja izometrii liniowych

Każda izometria liniowa płaszczyzny jest albo obrotem wokół punktu O , albo odbiciem względem pewnej prostej przechodzącej przez punkt O .

Przekształcenie identycznościowe (które również jest izometrią liniową) traktujemy tu jako szczególny przypadek obrotu (obrot o kąt 0).

Dowód. Wersory $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ są prostopadłymi wektorami długości 1, zaś izometria zachowuje długości odcinków i miary kątów, więc obrazy $F(e_1)$ i $F(e_2)$ to również prostopadłe wektory jednostkowe. Zgodnie z (1.10) współrzędne biegunowe wektora długości 1 to:

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

dla pewnego kąta θ . Wektor $F(e_2)$ jest prostopadły do $F(e_1)$, więc jest postaci:

$$F(e_2) = t \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

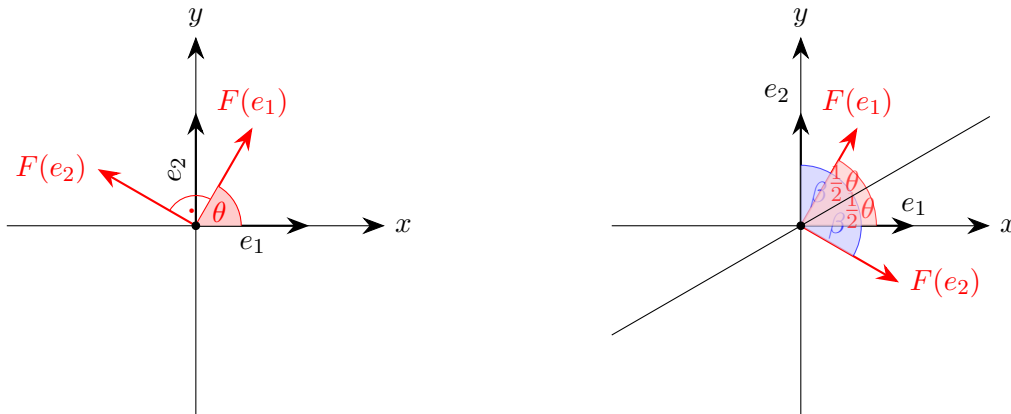
Ponieważ $|F(e_2)| = 1$, więc $|t| = \pm 1$. To daje nam dwie możliwości:

$$F(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Na mocy Faktu 2.13 kolumny macierzy przekształcenia liniowego to obrazy wersorów, więc macierz izometrii liniowej F jest postaci:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Pierwsza z tych macierzy to macierz obrotu wokół O o kąt θ (Przykład 8 z Rozdziału 2.1 lub Przykład 4 z Rozdziału 2.2). Druga z tych macierzy to macierz odbicia względem prostej ℓ nachylonej pod kątem $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ do dodatniej półosi Ox (Przykład 6 z Rozdziału 2.2).



Zatem F jest obrotem wokół punktu O lub odbiciem względem prostej przechodzącej przez punkt O . $\square$

Fakt 2.31

Niech A będzie macierzą 2×2 . Wówczas następujące warunki są równoważne:

- 1) A jest macierzą izometrii,
- 2) A jest postaci $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, gdzie $a^2 + b^2 = 1$,
- 3) kolumny macierzy A są prostopadłymi wektorami długości 1.

Dowód. (1) $\iff$ (2)

Zgodnie ze wzorem (2.11) macierz izometrii jest postaci

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

gdzie $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$. Z drugiej strony każdą macierz postaci

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

gdzie $a^2 + b^2 = 1$ można zapisać w postaci (2.12) (gdzie $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ to zapis jednostkowego wektora

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ w postaci biegunowej (1.10)).

(2) $\iff$ (3)

Pierwsza kolumna macierzy jest długości 1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, gdzie $a^2 + b^2 = 1$. Druga kolumna jest do niej prostopadła wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $t \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, przy czym jest ona długości 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $t = \pm 1$.

□

Wniosek 2.32

Wyznacznik macierzy izometrii to ± 1 .

Dowód. Na mocy Faktu 2.31 wyznacznik macierzy izometrii to:

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = 1 \quad \text{lub} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = -a^2 - b^2 = -1$$

□

Fakt ten ma związek z tym, że izometria zachowuje nie tylko długości odcinków i miary kątów, ale również pola figur (zgodnie z Faktem 2.28 przekształca każdą figurę na figurę do niej przystającą, więc w szczególności o takim samym polu, co figura wyjściowa). Związek między wyznacznikiem macierzy przekształcenia liniowego a zachowaniem pola wyjaśniają kolejne fakty.

Fakt 2.33

Dla dowolnych macierzy A i B rozmiaru 2×2 zachodzi wzór:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Dowód. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ i obliczmy lewą i prawą stronę wzoru:

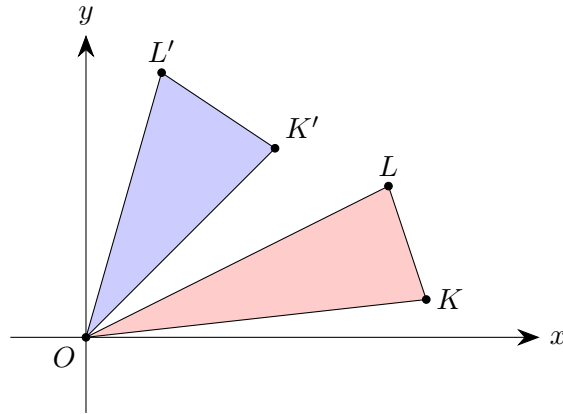
$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} = (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') \\ &= (aa')(cb') + (aa')(dd') + (bc')(cb') + (bc')(dd') - (ab')(ca') - (ab')(dc') - (bd')(ca') - (bd')(dc') \\ &= aca'c' + bdb'd' - acb'd' - bda'c' \\ \det A \cdot \det B &= (ad - bc)(a'd' - b'c') = ada'd' + bcb'c' - adb'c' - bca'd' = \det(AB) \end{aligned}$$

□

Fakt 2.34

Jeśli $F(X) = AX$ jest przekształceniem liniowym płaszczyzny, to dla dowolnego trójkąta OKL (gdzie O to początek układu współrzędnych) zachodzi:

$$P_{\triangle OK'L'} = |\det A| \cdot P_{\triangle OKL}$$



Dowód. Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wektory $K = \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix}$, $K' = \begin{pmatrix} x_{K'} \\ y_{K'} \end{pmatrix}$, $L' = \begin{pmatrix} x_{L'} \\ y_{L'} \end{pmatrix}$ spełniają warunki:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{K'} \\ y_{K'} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{L'} \\ y_{L'} \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że zgodnie z regułą mnożenia macierzy, można oba te warunki (wektorowe) zapisać jednym warunkiem (macierzowym):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_K & x_L \\ y_K & y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{K'} & x_{L'} \\ y_{K'} & y_{L'} \end{pmatrix}$$

skąd na mocy Faktu 2.33 mamy:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x_K & x_L \\ y_K & y_L \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{K'} & x_{L'} \\ y_{K'} & y_{L'} \end{pmatrix}$$

czyli

$$\left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_K & x_L \\ y_K & y_L \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_{K'} & x_{L'} \\ y_{K'} & y_{L'} \end{pmatrix} \right|$$

co zgodnie z Faktem 1.37 daje:

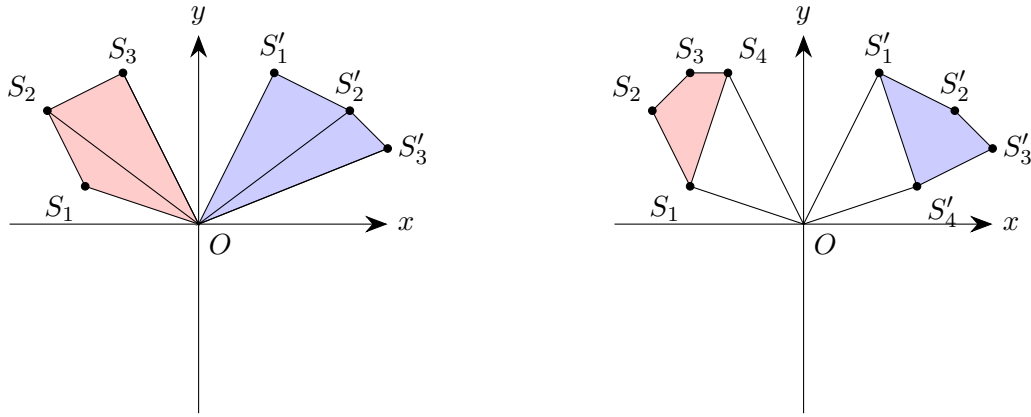
$$|\det A| \cdot P_{\triangle OKL} = P_{\triangle OK'L'}$$

□

Wniosek 2.35

Jeśli $F(X) = AX$ jest przekształceniem liniowym płaszczyzny, to dla dowolnego wielokąta $S_1 \dots S_n$ zachodzi:

$$P_{S'_1 \dots S'_n} = |\det A| \cdot P_{S_1 \dots S_n}$$



Dowód. Jeśli jednym z wierzchołków wielokąta jest punkt O , to wynika to z Faktu 1.48 oraz Faktu 2.34, na przykład w sytuacji przedstawionej na pierwszym rysunku otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_{OS'_1S'_2S'_3} &= P_{\triangle OS'_1S'_2} + P_{\triangle OS'_2S'_3} = |\det A| \cdot P_{\triangle OS_1S_2} + |\det A| \cdot P_{\triangle OS_2S_3} \\ &= |\det A| \cdot (P_{\triangle OS_1S_2} + P_{\triangle OS_2S_3}) = |\det A| \cdot P_{OS_1S_2S_3} \end{aligned}$$

(F jest przekształceniem liniowym, więc $O' = F(O) = O$).

W sytuacji, gdy O nie jest wierzchołkiem wielokąta, wykorzystujemy przypadek rozpatrzony powyżej, na przykład w sytuacji przedstawionej na drugim rysunku otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_{S'_1S'_2S'_3S'_4} &= P_{OS'_1S'_2S'_3S'_4} - P_{\triangle OS'_1S'_4} = |\det A| \cdot P_{OS_1S_2S_3S_4} - |\det A| \cdot P_{\triangle OS_1S_4} \\ &= |\det A| \cdot (P_{OS_1S_2S_3S_4} - P_{\triangle OS_1S_4}) = |\det A| \cdot P_{S_1S_2S_3S_4} \end{aligned}$$

□

Wniosek 2.35 można uogólnić na dowolne figury. Dowód tak ogólnego faktu wymaga formalnej definicji pola oraz pojęcia granicy i wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Fakt 2.36

Jeśli $F(X) = AX$ jest przekształceniem liniowym płaszczyzny, to dla dowolnej figury f (niekoniecznie wielokąta) zachodzi:

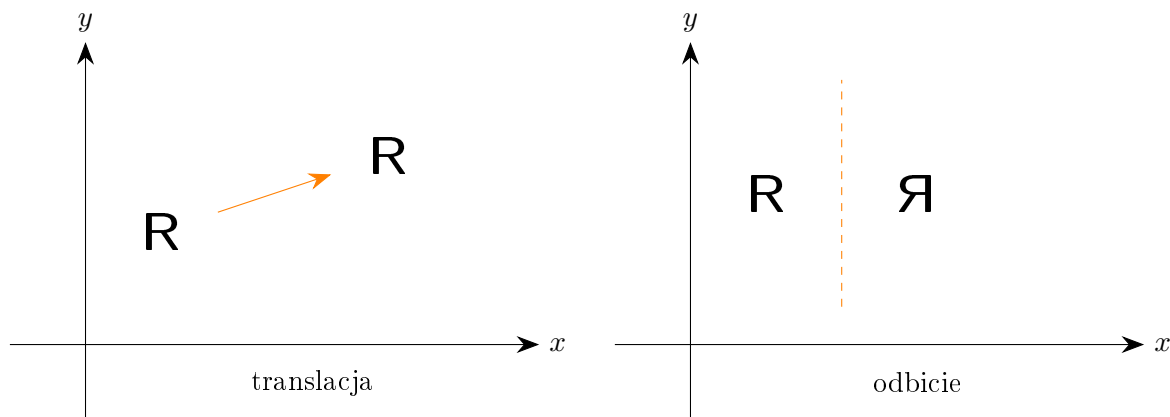
$$P_f = |\det A| \cdot P_f$$

Interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy przekształcenia dotyczy nie tylko wartości bezwzględnej wyznacznika, ale również jego znaku. Stąd następująca definicja.

Definicja 2.37

Przekształcenie liniowe F *zachowuje orientację*, jeśli dla dowolnych niewspółliniowych wektorów u i v pary (u, v) i $(F(u), F(v))$ mają jednakowe orientacje, a *zmienia orientację*, jeśli dla dowolnych niewspółliniowych wektorów u i v pary (u, v) i $(F(u), F(v))$ mają przeciwne orientacje.

Nieformalny sposób rozróżniania przekształceń płaszczyzny zachowujących orientację od tych, które ją zmieniają jest następujący: przekształcenie płaszczyzny zachowuje orientację, jeśli obraz np. litery **R** jest literą **R** (być może nieco zdeformowaną), natomiast zmienia orientację, jeśli obraz litery **R** jest jej lustrzanym odbiciem **Я** (być może nieco zdeformowanym).

**Fakt 2.38**

Jeśli A jest macierzą przekształcenia liniowego płaszczyzny F , to:

- F zachowuje orientację $\iff \det A > 0$,
- F zmienia orientację $\iff \det A < 0$.

Dowód. Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wektory $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $F(u) = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$, $F(v) = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$ spełniają warunki:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

Podobnie jak w dowodzie Faktu 2.34 oba te warunki (wektorowe) można zapisać jednym warunkiem (macierzowym):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{pmatrix}$$

skąd na mocy Faktu 2.33 otrzymujemy:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{pmatrix}$$

czyli

$$\det A \cdot \det(u, v) = \det(F(u), F(v))$$

Zatem:

- jeśli $\det A > 0$, to wyznaczniki $\det(u, v)$ i $\det(F(u), F(v))$ mają jednakowe znaki,
- jeśli $\det A < 0$, to wyznaczniki $\det(u, v)$ i $\det(F(u), F(v))$ mają przeciwne znaki,
- jeśli $\det A = 0$, to $\det(F(u), F(v)) = 0$, więc nie można mówić o orientacji pary $(F(u), F(v))$.

□

Wniosek 2.39

Wyznacznik macierzy izometrii zachowującej orientację to $+1$, a wyznacznik macierzy izometrii zmieniającej orientację to -1 .

Dowód. Zgodnie z Wnioskiem 2.32 wyznacznik macierzy izometrii to ± 1 . Fakt 2.38 wiąże znak wyznacznika z zachowywaniem/zmianą orientacji. □

Przykład 1

Ustal, które z poniższych przekształceń zachowuje, a które zmienia orientację:

- (a) obrót, (b) odbicie względem prostej, (c) jednokładność,
(d) powinowactwo prostokątne, (e) rzut prostokątny.

Rozwiązanie. Rozważając, które z przekształceń przeprowadzają $\mathbf{R}$ na $\mathbf{R}$, a które na $\mathbf{R}$ nie-trudno zauważyć, że obrót, jednokładność (zarówno o skali dodatniej, jak i ujemnej) oraz powinowactwo prostokątne o skali dodatniej zachowują orientację, natomiast odbicie względem prostej i powinowactwo prostokątne o skali ujemnej zmieniają orientację. W przypadku rzutu prostokątnego nie można mówić o zachowywaniu bądź zmianie orientacji.

Przykład 2

Ustal, która z poniższych macierzy jest macierzą przekształcenia liniowego zachowującego orientację, a która – przekształcenia zmieniającego orientację:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\det A > 0, \quad \det B = 0, \quad \det C < 0.$$

Zatem A jest macierzą przekształcenia liniowego zachowującego orientację, C – macierzą przekształcenia zmieniającego orientację, zaś B nie należy do żadnego z tych zbiorów macierzy.

2.5 Przekształcenia różnowartościowe i „na”

Przekształcenie liniowe nie musi mieć jednakowej dziedziny i przeciwdziedziny (jak w poprzednich rozdziałach, gdzie badaliśmy jedynie przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$). Ponieważ w pierwszej części skryptu zajmujemy się jedynie przestrzeniami 1- i 2-wymiarowymi, więc ograniczamy się do przekształceń, gdzie zarówno dziedziną, jak i przeciwdziedziną jest jedna z przestrzeni: $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$.

Definicja 2.40

Przekształceniem liniowym będziemy nazywać taką funkcję F , której:

- dziedziną jest $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^2$,
- przeciwdziedziną jest $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^2$,
- wzór jest postaci $F(X) = A \cdot X$, gdzie A jest macierzą, zaś $\cdot$ oznacza mnożenie macierzy.

W Rozdziale 2.1 poznaliśmy dużo przykładów przekształceń liniowych $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. W związku z tym zaczniemy od przykładów przekształceń liniowych, gdzie dziedziną bądź przeciwdziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$.

Przykład 1 (znakowana odległość od prostej)

Dane jest przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, które każdemu punktowi przyporządkowuje jego **znakowaną** odległość od prostej o równaniu $2x + y = 0$. Uzasadnij, że F jest przekształceniem liniowym oraz znajdź macierz tego przekształcenia.

Rozwiązanie. Zgodnie z Wnioskiem 1.46 znakowana odległość punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ od prostej o równaniu $2x + y = 0$ jest równa:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{2x + y}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2x + y}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y$$

Przekształcenie to jest liniowe, gdyż:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gdzie $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ jest macierzą tego przekształcenia.

Przykład 2 (znakowane pole)

Dany jest punkt $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz przekształcenie $F_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, które każdemu punktowi X przyporządkowuje **znakowane** pole trójkąta OAX . Uzasadnij, że F_A jest przekształceniem liniowym oraz znajdź macierz tego przekształcenia.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 1.40 znakowane pole trójkąta OAX to:

$$F_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} = -x + \frac{3}{2}y$$

Przekształcenie to jest liniowe, gdyż:

$$F_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gdzie $\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia.

Przykład 3 (iloczyn skalarny)

Dany jest wektor $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ oraz przekształcenie $G_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, które każdemu wektorowi X przyporządkowuje iloczyn skalarny $v \circ X$. Uzasadnij, że G_v jest przekształceniem liniowym oraz znajdź macierz tego przekształcenia.

Rozwiązanie. Zauważmy, że:

$$G_v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = v \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x - y$$

czyli

$$G_v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zatem przekształcenie to jest liniowe, a jego macierz to $\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Przykład 4 (Przekształcenie liniowe $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$)

Uzasadnij, że przekształcenie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane wzorem $F(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \end{pmatrix}$ (tzn. przyporządkowujące liczbie rzeczywistej t odpowiedni punkt na prostej o równaniu parametrycznym

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$) jest przekształceniem liniowym oraz znajdź macierz tego przekształcenia.

Rozwiązanie. Przekształcenie liniowe F można zapisać w następujący sposób jako mnożenie macierzy (pamiętając, że liczbę $t \in \mathbb{R}$ utożsamiamy z macierzą (t) o rozmiarze 1×1):

$$F(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Zatem przekształcenie to jest liniowe, a jego macierz to $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Przykład 5 (Przekształcenie liniowe $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

Dane są przekształcenia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadane wzorami $F(t) = 3t$ oraz $G(t) = 3t + 1$. Ustal, które z nich jest przekształceniem liniowym oraz znajdź macierz tego przekształcenia.

Rozwiązanie. Przekształcenie liniowe F można zapisać w następujący sposób jako mnożenie macierzy (pamiętając, że liczbę $t \in \mathbb{R}$ utożsamiamy z macierzą (t) o rozmiarze 1×1):

$$F(t) = (3) \cdot (t) = (3t)$$

Zatem przekształcenie to jest liniowe, a jego macierz (rozmiaru 1×1) to (3) .

Przekształcenia G nie można zapisać w podobny sposób, więc nie jest ono przekształceniem liniowym.

Zauważmy, że terminologia ta nieco odbiega od stosowanej w szkole (gdzie funkcją liniową nazywano funkcję $f(x) = ax + b$). W świetle Definicji 2.40 funkcja postaci $f(x) = ax$ jest liniowa, natomiast funkcja $f(x) = ax + b$ (dla $b \neq 0$) nie jest liniowa (będziemy ją nazywali funkcją afiniczną).

Definicja 2.41

Obrazem punktu P przez przekształcenie F nazywamy punkt $F(P)$.

Definicja 2.42

Przeciwwobrazem punktu P przez przekształcenie F (oznaczanym $F^{-1}[P]$) nazywamy zbiór wszystkich takich punktów X , że $F(X) = P$.

Przykład 6

Znajdź obraz punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ przez następujące przekształcenia:

- (a) symetria S względem prostej o równaniu $3x - 4y = 0$,
- (b) rzut P_1 na prostą o równaniu $3x - 4y = 0$,
- (c) rzut P_2 na prostą o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$,
- (d) przekształcenie F stale równe $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Przekształcenia te mają następujące wzory (wyznaczone w Przykładach 3, 2 i 5 w Rozdziale 2.1):

$$S(X) = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} X, \quad P_1(X) = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} X$$

$$P_2(X) = \begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{8}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix}, \quad F(X) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

W związku z tym obrazem punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ przez te przekształcenia są punkty

$$S\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{41}{25} \\ -\frac{10}{25} \end{pmatrix}, \quad P_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} \\ \frac{6}{25} \end{pmatrix}, \quad P_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{11}{13} \\ -\frac{10}{13} \end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Przykład 7

Znajdź przeciwobraz punktu $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ przez następujące przekształcenia:

- (a) symetria S względem prostej o równaniu $3x - 4y = 0$,
- (b) rzut P_1 na prostą o równaniu $3x - 4y = 0$,
- (c) rzut P_2 na prostą o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$,
- (d) przekształcenie F stale równe $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Wzory powyższych przekształceń przytoczono w poprzednim przykładzie. Wyznaczenie przeciwobrazów polega na rozwiązaniu równań:

$$(a) \ S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Można to zauważyć również bez rachunków, jako że punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ leży na osi symetrii, więc jest punktem stałym przekształcenia i nie jest obrazem żadnego innego punktu.

$$(b) \ P_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego równania są wszystkie punkty leżące na prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Można to zauważyć również bez rachunków, jako że punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ leży na prostej, na którą rzutujemy, więc punkty przeprowadzane na $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ to punkty leżące na prostej prostopadłej do prostej $3x - 4y = 0$ i przechodzącej przez $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$(c) \ P_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest zbiór pusty. Można to zauważyć również bez rachunków, jako że punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ nie leży na prostej, na którą rzutujemy, więc nie jest obrazem żadnego punktu.

$$(d) \ F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Równanie to jest tożsamościowe, jego zbiorem rozwiązań jest cała płaszczyzna.

Przykład 8

Znaleźć przeciwobraz punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ przez przekształcenie:

(a) afiniczne F o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(b) liniowe G o macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,

Rozwiązanie. Szukamy rozwiązań równań wektorowych:

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, czyli $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Równanie to można zapisać w postaci układu dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $G(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, czyli $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Równanie to można zapisać w postaci układu dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = -1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest prosta o równaniu $2x + y - 1 = 0$.

Jak widać z powyższych przykładów, przeciwobraz punktu może się składać z jednego punktu, ale może również być zbiorem pustym lub całą prostą, a nawet całą płaszczyzną. W przypadku przekształceń afinicznych płaszczyzny (w szczególności liniowych) jest to kompletna lista możliwości, co pokażemy poniżej.

Fakt 2.43

Obrazem punktu przez dowolne przekształcenie jest punkt.

Fakt 2.44

Przeciwobrazem punktu przez przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest punkt lub prosta lub zbiór pusty lub cała płaszczyzna. Przeciwobraz ten jest punktem wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$, gdzie $F(X) = AX + v$ jest wzorem przekształcenia.

Dowód. Niech $F(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ będzie przekształceniem afinicznym. Przeciwobrazem punktu $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ jest zbiór rozwiązań równania (z niewiadomymi x i y):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} ax + by = p - e \\ cx + dy = q - f \end{cases}$$

Zgodnie z Faktem 1.50 zbiorem rozwiązań tego układu jest punkt lub prosta lub zbiór pusty lub cała płaszczyzna. Co więcej, wiemy, że rozwiązanie jest jednoznaczne (punkt) wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$. □

Definicja 2.45

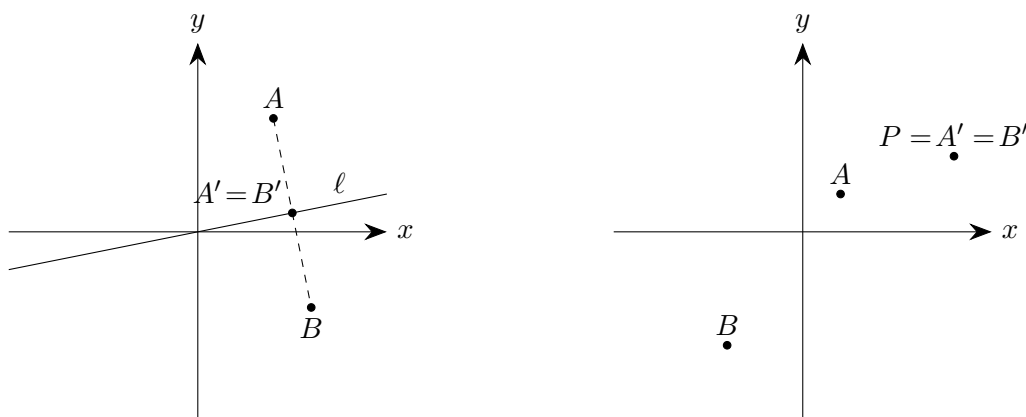
Przekształcenie F nazywamy *różnowartościowym*, jeśli dla dowolnych elementów dziedziny u i v takich że $u \neq v$ zachodzi $F(u) \neq F(v)$ (tzn. różne punkty **zawsze** mają różne obrazy).

Przykład 9

Uzasadnij, że poniższe przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nie są różnowartościowe:

- (a) rzut na prostą ℓ ,
- (b) przekształcenie stałe (stałe równe P).

Rozwiązanie. W każdym przypadku można wskazać takie (różne) punkty A i B na płaszczyźnie, że $A' = B'$:

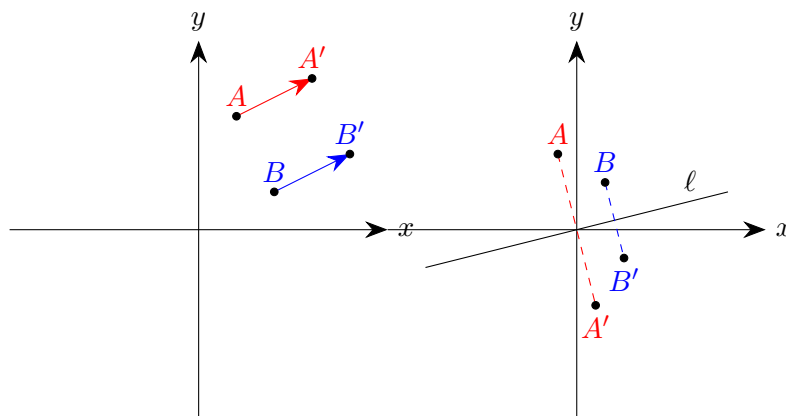
**Przykład 10**

Uzasadnij, że poniższe przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ są różnowartościowe:

- (a) translacja T_v o wektor v ,
- (b) odbicie S_ℓ względem prostej ℓ ,

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnych różnych punktów A i B zachodzi $A' \neq B'$:

- (a) $T_v(A) \neq T_v(B)$ (pierwszy rysunek)
- (b) $S_\ell(A) \neq S_\ell(B)$ (drugi rysunek)



Przykład 11

Sprawdź różnowartościowość poniższych przekształceń:

- (a) znakowana odległość od danej prostej ℓ (przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$),
- (b) przekształcenie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane macierzą $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Przekształcenie (a) nie jest różnowartościowe, gdyż można wskazać dwa różne punkty A i B mające taką samą znakowaną odległość od prostej ℓ .

Przekształcenie (b) jest różnowartościowe, gdyż dla różnych argumentów $t \neq s$ punkty $t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ są różnymi punktami płaszczyzny.

Definicję różnowartościowości przekształcenia można przeformułować używając pojęcia przeciwobrazu:

Fakt 2.46

Przekształcenie F jest różnowartościowe, wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdego punktu jest pojedynczym punktem lub zbiorem pustym.

Dowód. Przekształcenie F jest różnowartościowe, gdy **nie istnieją** takie różne punkty u i v , że $F(u) = F(v)$, czyli gdy przeciwobraz żadnego punktu nie zawiera dwóch lub więcej punktów. $\square$

Fakt 2.47

- 1) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz $m(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ma niezerowy wyznacznik.
- 2) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nigdy nie jest różnowartościowe.
- 3) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz $m(F) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ jest niezerowa.
- 4) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz $m(F) = (a)$ jest niezerowa.

Dowód. Zgodnie z Faktem 2.46 przekształcenie F jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu P równanie $F(X) = P$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

- (1) W przypadku $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza to, że równanie (z niewiadomymi x i y):

$$AX = P \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie **niezależnie od wyboru** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 1.51 w przypadku gdy $\det A \neq 0$ równanie to ma jedno rozwiązanie niezależnie od p i q . W przypadku gdy $\det A = 0$ równanie to ma 0 lub ∞ rozwiązań, zależnie od wyboru p i q . Przekształcenie F jest zatem różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

- (2) W przypadku $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza to, że równanie (z niewiadomymi x i y):

$$AX = P \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie **niezależnie od wyboru** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Tymczasem równanie to (o ile $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$) jest równaniem prostej (można je zapisać w postaci $ax + by = p$), czyli ma ∞ rozwiązań. W przypadku gdy $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ równanie to ma ∞ rozwiązań dla $p = 0$. Przekształcenie F nigdy nie jest zatem różnowartościowe.

(3) W przypadku $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza to, że równanie (z niewiadomą x):

$$AX = P \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie **niezależnie od wyboru** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Jeśli $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, to równanie to albo jest sprzeczne (gdy wektory $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ nie są współliniowe) albo ma jedno rozwiązanie (współczynnik skalowania). Jeśli $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, to w sytuacji $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista x . Przekształcenie F zatem jest różnowartościowe, o ile tylko $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(4) W przypadku $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza to, że równanie (z niewiadomą x):

$$ax = p$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie **niezależnie od wyboru** p . Równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie (postaci $x = \frac{p}{a}$) gdy $a \neq 0$, natomiast jeśli $a = 0$ to dla $p = 0$ rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista x . Przekształcenie F zatem jest różnowartościowe, o ile tylko $a \neq 0$. $\square$

Fakt 2.48

Przekształcenie $F(X) = AX + v$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie do dowodu Faktu 2.47(1) i jego przeprowadzenie pozostawiamy czytelnikowi. $\square$

Wniosek 2.49

Izometria płaszczyzny jest przekształceniem różnowartościowym.

Dowód. Niech $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie izometrią (niekoniecznie liniową). Dla dowolnych różnych punktów A i B wektor $\overrightarrow{AB}$ jest niezerowy. Ponieważ izometria zachowuje długości wektorów, więc $\overrightarrow{A'B'}$ też jest niezerowy, czyli $A' \neq B'$. Wobec tego F jest różnowartościowe. $\square$

Definicja 2.50

Przekształcenie F nazywamy *na*, jeśli dla dowolnego elementu P przeciwdziedziny istnieje taki punkt X w dziedzinie, że $F(X) = P$ (tzn. każdy punkt przeciwdziedziny jest obrazem pewnego punktu dziedziny).

Przykład 12

Uzasadnij, że poniższe przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nie są „na”:

- (a) rzut na prostą ℓ ,
- (b) przekształcenie stałe (stałe równe P).

Rozwiązanie. (a) Punkty poza prostą ℓ nie są obrazem żadnego punktu.
 (b) Punkty inne niż P nie są obrazem żadnego punktu.

Przykład 13

Uzasadnij, że poniższe przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ są „na”:

- (a) translacja T_v o wektor v ,
- (b) odbicie S_ℓ względem prostej ℓ .

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że:

- (a) każdy punkt P płaszczyzny jest końcem pewnego wektora $\overrightarrow{XP} = v$ (czyli obrazem pewnego punktu X),
- (b) każdy punkt P płaszczyzny jest odbiciem symetrycznym względem prostej ℓ pewnego punktu X .

Zatem oba te przekształcenia są „na”.

Przykład 14

Sprawdź, które z poniższych przekształceń są „na”:

- (a) znakowana odległość od prostej $2x + y = 0$ (przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$),
- (b) przekształcenie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane macierzą $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Dowolna liczba rzeczywista może być znakowaną odległością od prostej o równaniu $2x + y = 0$, więc to przekształcenie jest „na”.

(b) Obrazem liczby t jest wektor $\begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix}$, więc tylko punkty leżące na prostej o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ są obrazami, zatem przekształcenie nie jest „na”.

Fakt 2.51

Przekształcenie F jest „na”, wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdego punktu jest niepustym zbiorem.

Dowód. Przekształcenie F jest „na”, wtedy i tylko wtedy gdy **każdy** punkt przeciwdziedziny jest obrazem, czyli jego przeciwobraz jest niepusty. $\square$

Fakt 2.52

- 1) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest „na” $\iff$ macierz $m(F)$ ma niezerowy wyznacznik.
- 2) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest „na” $\iff$ macierz $m(F)$ jest niezerowa.
- 3) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nigdy nie jest „na”.
- 4) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest „na” $\iff$ macierz $m(F)$ jest niezerowa.

Dowód. Zgodnie z Faktem 2.51 przekształcenie F jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu P równanie $F(X) = P$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

(1) W przypadku $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza to, że równanie (z niewiadomymi x i y):

$$AX = P \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie **niezależnie od wyboru** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 1.51 w przypadku gdy $\det A \neq 0$ równanie to ma jedno rozwiązanie niezależnie od p i q . W przypadku gdy $\det A = 0$ równanie to ma 0 lub ∞ rozwiązań, zależnie od wyboru p i q . Przekształcenie F jest zatem różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

(2) W przypadku $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza to, że równanie (z niewiadomymi x i y):

$$AX = P \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie **niezależnie od wyboru** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Tymczasem równanie to (o ile $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) jest równaniem prostej (można je zapisać w postaci $ax + by = p$), czyli ma ∞ rozwiązań. W przypadku gdy $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ to równanie nie ma rozwiązań dla $p \neq 0$. Przekształcenie F jest zatem „na”, o ile $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) W przypadku $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza to, że równanie (z niewiadomą x):

$$AX = P \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie **niezależnie od wyboru** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Jeśli $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, to równanie to albo jest sprzeczne, jeśli za $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ wybierzemy wektor niewspółliniowy z $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Jeśli $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, to równanie jest sprzeczne dla dowolnego $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Przekształcenie F zatem nigdy nie jest „na”.

(4) W przypadku $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza to, że równanie (z niewiadomą x):

$$ax = p$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie **niezależnie od wyboru** p . Równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie ($x = \frac{p}{a}$) gdy $a \neq 0$, natomiast jeśli $a = 0$ to dla $p \neq 0$ jest sprzeczne. Przekształcenie F zatem jest różnowartościowe, o ile tylko $a \neq 0$. $\square$

Fakt 2.53

Przekształcenie $F(X) = AX + v$ jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie do dowodu Faktu 2.52(1) i jego przeprowadzenie pozostawiamy czytelnikowi. $\square$

2.6 Przekształcenie odwrotne

Definicja 2.54

*Przekształceniem odwrotnym do przekształcenia $F : D \rightarrow C$ nazywamy takie przekształcenie $G : C \rightarrow D$, że $F \circ G = \text{Id}_D$ oraz $G \circ F = \text{Id}_C$. Przekształcenie G o tej własności oznaczamy jako F^{-1} . Przekształcenie F , dla którego istnieje przekształcenie odwrotne nazywamy *przekształceniem odwracalnym*.*

Zwróćmy uwagę, że z uwagi na to, że składanie przekształceń liniowych nie jest przemienne, definicja wymaga zbadania zarówno złożenia $F \circ G$, jak i $G \circ F$.

Fakt 2.55

Jeśli F jest przekształceniem odwracalnym oraz $F(X) = X'$, to $F^{-1}(X') = X$.

Dowód. Skoro $F(X) = X'$, to $F^{-1}(X') = F^{-1}(F(X)) = (F^{-1} \circ F)(X) = \text{Id}(X) = X$. □

Fakt 2.55 pozwala myśleć o następującej konstrukcji przekształcenia odwrotnego: patrzymy na przekształcenie F , które każdemu punktowi X przyporządkowuje pewien punkt X' (co można sobie wyobrazić jako strzałkę o początku X i końcu X'), a następnie „odwracamy” przyporządkowania, tzn. zmieniamy zwrot wszystkich strzałek (tzn. punktowi X' przyporządkowujemy punkt X). Opisana konstrukcja zadziała, o ile spełnione będą dwa warunki:

- każdy punkt z przeciwdziedziny jest obrazem (przez przekształcenie F) **co najwyżej** jednego punktu (w przeciwnym razie „odwrócenie” przyporządkowania nie dawałoby funkcji, gdyż niektórym punktom przypisane byłoby kilka obrazów),
- każdy punkt z przeciwdziedziny jest obrazem (przez przekształcenie F) **co najmniej** jednego punktu (w przeciwnym razie „odwrócenie” przyporządkowania nie dawałoby funkcji, gdyż niektórym punktom nie byłby przypisany żaden obraz).

Warunki te rozpoznajemy jako różnowartościowość i „na”, co pozwala podsumować powyższe rozważania w formie następującego faktu:

Fakt 2.56

F jest przekształceniem odwracalnym wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwbraz każdego punktu jest pojedynczym punktem. Innymi słowy, F jest odwracalne $\iff F$ jest różnowartościowe i „na”.

Fakt 2.57

Jeśli G jest przekształceniem odwrotnym do F , to F jest przekształceniem odwrotnym do G (tzn. $(F^{-1})^{-1} = F$).

Dowód. Skoro G jest odwrotne do F , to $F \circ G = \text{Id}$ oraz $G \circ F = \text{Id}$, a to oznacza, że F jest odwrotne do G . □

Wniosek 2.58

- 1) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz $m(F)$ ma niezerowy wyznacznik.
- 2) Przekształcenia liniowe $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ani $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ nigdy nie są odwracalne.

Dowód. (1) Zgodnie z Faktami 2.47 oraz 2.52 przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest różnowartościowe i „na” wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz $m(F)$ ma niezerowy wyznacznik.

(2) Te same fakty pokazują, że przekształcenie $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nigdy nie jest „na”, a przekształcenie $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ nigdy nie jest różnowartościowe, a zatem zgodnie z Faktem 2.56 żadne z nich nie może być odwracalne. $\square$

Jak już zauważyliśmy przy badaniu złożenia przekształceń liniowych, operacje na przekształceniach liniowych można rozumieć jako operacje na macierzach tych przekształceń. Podobnie jest z operacją odwracania przekształcenia liniowego.

Fakt 2.59

Macierz identycznościowa $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ma tę własność, że:

$$AI = IA = A, \quad \text{dla dowolnej macierzy } A \in M_{2 \times 2}$$

$$IB = B, \quad \text{dla dowolnej macierzy } B \in M_{2 \times 1}$$

Definicja 2.60

Macierz odwrotną do macierzy $A \in M_{2 \times 2}$ nazywamy taką macierz $A^{-1} \in M_{2 \times 2}$, że

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Macierz, dla której istnieje macierz odwrotna nazywamy *macierz odwracalną*.

Zwróćmy uwagę, że ze względu na nieprzemienność mnożenia macierzy definicja musi wymagać by iloczyn macierzy A i A^{-1} był macierzą identycznościową niezależnie od kolejności czynników.

Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Szukamy macierzy odwrotnej do A , tzn. takiej macierzy $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, że:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Pierwsze z równań (7.1) można zapisać w postaci dwóch równań wektorowych:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.14)$$

które można zapisać jako dwa układy 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi:

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$$

Jeśli $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$, to zgodnie ze wzorami Cramera każdy z powyższych układów ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \cdot d, \quad z = \frac{\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \cdot (-c)$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \cdot (-b), \quad t = \frac{\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \cdot a$$

wobec czego szukaną macierzą odwrotną powinna być macierz:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ponieważ mnożenie macierzy nie jest przemienne, więc musimy jeszcze sprawdzić, że znaleziona macierz spełnia również drugie z równań (7.1):

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fakt 2.61

Macierz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$, a macierzą do niej odwrotną jest macierz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dowód. Przed sformułowaniem faktu wyprowadziliśmy powyższy wzór na macierz odwrotną. Pozostaje uzasadnić, że w przypadku, gdy $\det A = 0$, macierz A nie jest odwracalna. Ale jeśli macierz A jest odwracalna, to zachodzi $A \cdot A^{-1} = I$, co na mocy Faktu 2.33 pociąga:

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

więc w przypadku $\det A = 0$, to otrzymujemy sprzeczność. □

Wniosek 2.62

Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane wzorem $F(X) = AX$ jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest odwracalna. W takiej sytuacji:

$$F^{-1}(X) = A^{-1}X \quad (\text{tzn. } m(F^{-1}) = m(F)^{-1})$$

Dowód. Przekształcenie F , zgodnie z Wnioskiem 2.58, jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\det m(F) \neq 0$, co zgodnie z Faktem 2.61 jest równoważne odwracalności macierzy $m(F)$.

Jeśli $m(F) = A$ jest odwracalna, to przekształcenie $G(X) = A^{-1}X$ jest przekształceniem odwrotnym do F , gdyż:

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = A \cdot (A^{-1} \cdot X) = (A \cdot A^{-1}) \cdot X = I \cdot X = X$$

$$(G \circ F)(X) = G(F(X)) = A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = I \cdot X = X$$

□

Fakt 2.63

Dla dowolnych odwracalnych macierzy A i B o wymiarach 2×2 zachodzą warunki:

$$1) \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

$$2) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Dowód. (1) Zgodnie z Faktem 2.33 zachodzi:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$$

Stąd otrzymujemy $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

(2) Zauważmy, że na mocy prawa łączności mnożenia:

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

czyli macierze $B^{-1}A^{-1}$ i AB są wzajemnie odwrotne. □

Macierze odwrotne pozwalają na alternatywne podejście do problemu rozwiązywania układów równań liniowych. Układ:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

można zapisać przy pomocy macierzy w postaci:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

lub w uproszczonej postaci

$$AX = B$$

i rozwiązywać korzystając z własności macierzy odwrotnej:

$$X = A^{-1}B$$

Ze względu na nieprzemienność mnożenia macierzy trzeba zawsze zwracać uwagę na to, z której strony mnożymy przez macierz odwrotną, co pokazują poniższe przykłady.

Przykład 1

Rozwiąż następujące równania macierzowe:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Rozwiązanie. W każdym przypadku mnożymy obie strony równania przez macierz odwrotną, zwracając uwagę na to, by zarówno lewą jak i prawą stronę równości mnożyć przez macierz odwrotną z tej samej strony (mnożenie macierzy nie jest przemienne).

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

Definicja 2.64

Transpozycją macierzy A (niekoniecznie kwadratowej), oznaczaną $A^\top$, nazywamy macierz, która jest „symetrycznym odbiciem” macierzy A względem głównej przekątnej, jak na poniższym rysunku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Macierz A , dla której $A^\top = A$ nazywamy *macierzą symetryczną*.

Fakt 2.65

Dla dowolnych wektorów u i v na płaszczyźnie zachodzi wzór:

$$u \circ v = u^\top \cdot v$$

Dowód. Oznaczmy $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Wówczas:

$$u \circ v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u^\top \cdot v$$

□

Fakt 2.66

- 1) Dla dowolnych macierzy A i B tego samego rozmiaru oraz dowolnego skalaru t zachodzą wzory:

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top, \quad (tA)^\top = t \cdot A^\top$$

- 2) Dla dowolnych macierzy A i B , dla których iloczyn $A \cdot B$ ma sens zachodzi wzór:

$$(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$$

Dowód. (1) Udowodnimy pierwszy wzór dla macierzy 2×2 . Dowód dla macierzy innych rozmiarów oraz dowód drugiego wzoru jest analogiczny:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right)^\top &= \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}^\top \end{aligned}$$

□

Fakt 2.67

Dla dowolnej macierzy A rozmiaru 2×2 zachodzi $\det A = \det A^\top$.

Dowód. Jeśli $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, to $A^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ oraz $\det A = \det A^\top = ad - bc$.

□

Fakt 2.68

Macierz A jest macierzą izometrii wtedy i tylko wtedy, gdy jest odwracalna i $A^{-1} = A^{\top}$.

Dowód. Jeśli A jest macierzą izometrii, to na mocy Faktu 2.31 mamy

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

gdzie $a^2 + b^2 = 1$. Stąd zgodnie z Faktem 2.61:

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = A^{\top}$$

lub

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2 - b^2} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = A^{\top}$$

Jeśli z kolei A spełnia warunek $A^{-1} = A^{\top}$, to zgodnie z Faktami 2.66 i 2.63 dostajemy $(\det A)^{-1} = \det A^{\top} = \det A$, czyli $\det A = \pm 1$. Oznaczając $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, zgodnie z Faktem 2.61 dostajemy:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^{\top} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \text{czyli } d = a \text{ i } c = -b, \text{ jeśli } \det A = +1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^{\top} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \text{czyli } d = -a \text{ i } c = b, \text{ jeśli } \det A = -1$$

□

Fakt 2.69

Macierz A jest macierzą izometrii wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $A^{\top}$ jest macierzą izometrii. W szczególności, macierz A jest macierzą izometrii wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiersze są prostopadłymi wektorami długości 1.

Dowód. Jeśli A jest macierzą izometrii, to zgodnie z Faktem 2.68:

$$A^{-1} = A^{\top}$$

skąd zgodnie z Faktami 2.66 i 2.63:

$$(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A = (A^{\top})^{\top}$$

czyli $A^{\top}$ jest macierzą izometrii. Podobnie pokazujemy, że jeśli $A^{\top}$ jest macierzą izometrii, to A również. Ponieważ transpozycja macierzy zamienia kolumny na wiersze, więc warunek dotyczący kolumn z Faktu 2.31 tłumaczy się na warunek dotyczący wierszy. □

Rozdział 3

Diagonalizacja macierzy 2×2

3.1 Wartości własne i wektory własne

Od tej pory przestajemy się zajmować przekształceniami afinicznymi. Nasza grupa przekształceń to przekształcenia liniowe.

Definicja 3.1

Wektor własny przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ to wektor X spełniający warunek:

$$F(X) = \lambda \cdot X$$

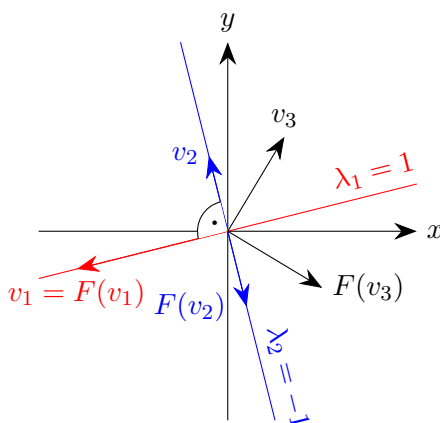
dla pewnej liczby rzeczywistej λ . Jeśli $X \neq 0$, to liczbę λ nazywamy *wartością własną* przekształcenia F , zaś X *wektorem własnym dla wartości własnej λ* . Wektor $X = 0$ jest wektorem własnym dla każdej wartości własnej λ .

Innymi słowy: wektor własny przekształcenia F to taki wektor X , który ma ten sam kierunek co jego obraz $F(X)$, natomiast wartość własna to współczynnik λ o jaki skaluje go przekształcenie F . Zauważmy, że punkt stały przekształcenia liniowego (Definicja 2.16) jest szczególnym przypadkiem wektora własnego (dla wartości własnej 1). Drugim szczególnym przypadkiem jest każdy wektor, który należy do przeciwobrazu punktu 0 (jest to wektor własny dla wartości własnej 0).

Przykład 1

Wyznacz wartości i wektory własne odbicia S_ℓ względem prostej ℓ .

Rozwiązanie. Dla dowolnego wektora v_1 leżącego na prostej ℓ zachodzi $F(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1$, czyli $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta ℓ jest zbiorem wektorów własnych dla λ_1 .



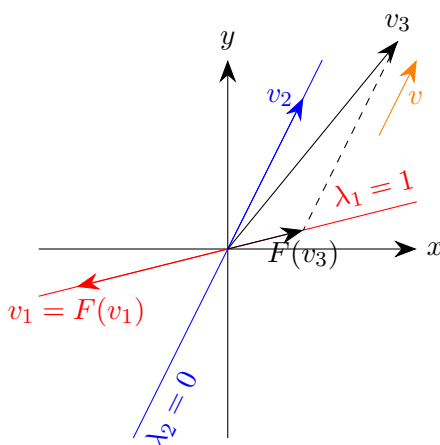
Dla dowolnego wektora v_2 prostopadłego do prostej ℓ zachodzi $F(v_2) = -v_2 = (-1) \cdot v_2$, czyli $\lambda_2 = -1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta prostopadła do ℓ przechodząca przez 0 jest zbiorem wektorów własnych dla λ_2 .

Jeśli wektor v_3 nie jest równoległy ani prostopadły do ℓ , to wektory v_3 i $F(v_3)$ mają różne kierunki, przekształcenie nie ma zatem więcej wektorów ani wartości własnych.

Przykład 2

Wyznacz wartości i wektory własne rzutu ukośnego na prostą ℓ w kierunku wektora v .

Rozwiązanie. Dla dowolnego wektora v_1 leżącego na prostej ℓ zachodzi $F(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1$, czyli $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta ℓ jest zbiorem wektorów własnych dla λ_1 .



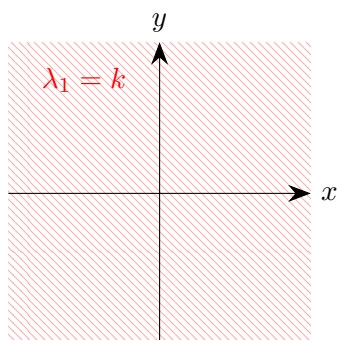
Dla dowolnego wektora v_2 równoległego do v zachodzi $F(v_2) = 0 = 0 \cdot v_2$, czyli $\lambda_2 = 0$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta równoległa do v przechodząca przez 0 jest zbiorem wektorów własnych dla λ_2 .

Jeśli wektor v_3 nie jest równoległy ani do ℓ , ani do v , to wektory v_3 i $F(v_3)$ mają różne kierunki, przekształcenie nie ma zatem więcej wektorów ani wartości własnych.

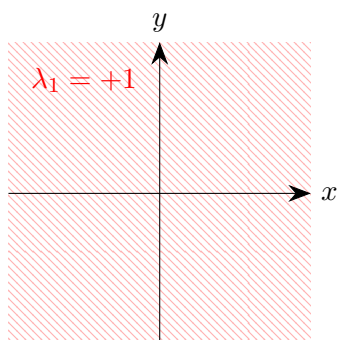
Przykład 3

Wyznacz wartości i wektory własne następujących przekształceń liniowych:

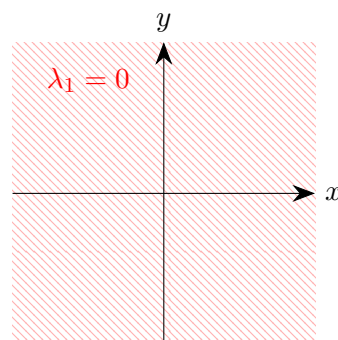
- (a) jednokładność o środku O i skali k ,
- (b) przekształcenie identycznościowe,
- (c) przekształcenie zerowe.



jednokładność



identyczność



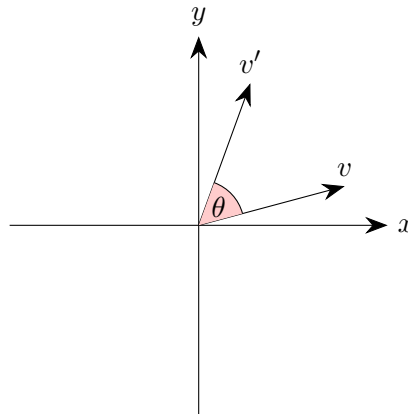
przekształcenie zerowe

- (a) Jednokładność o środku O i skali k spełnia warunek: $F(X) = k \cdot X$ dla każdego wektora X , w związku z tym każdy wektor jest wektorem własnym dla wartości własnej $\lambda_1 = k$.
- (b) Przekształcenie identycznościowe spełnia warunek $F(X) = 1 \cdot X$ dla każdego wektora X , czyli każdy wektor jest wektorem własnym dla $\lambda_1 = 1$.
- (c) Przekształcenie zerowe spełnia warunek $F(X) = 0 \cdot X$ dla każdego wektora X , czyli każdy wektor jest wektorem własnym dla $\lambda_1 = 0$.

Przykład 4

Wyznacz wszystkie wartości i wektory własne obrotu wokół O o kąt θ (inny niż 0 i π).

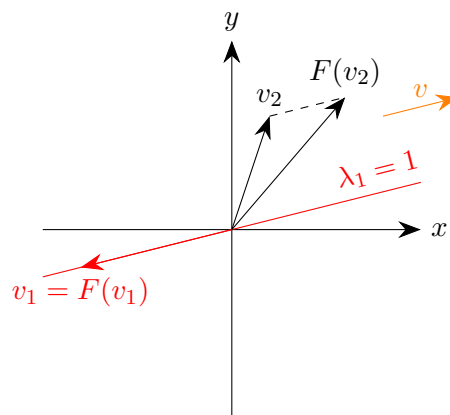
Rozwiązanie. Jeśli v jest niezerowym wektorem, to v i $F(v)$ mają różne kierunki. Przekształcenie to nie ma zatem żadnych wartości własnych, ani niezerowych wektorów własnych.

**Przykład 5**

Wyznacz wszystkie wartości i wektory własne powinowactwa ścinającego o osi ℓ (przechodzącej przez 0) i wektorze v .

Rozwiązanie. Dla dowolnego wektora v_1 równoległego do prostej ℓ zachodzi $F(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1$, czyli $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta ℓ jest zbiorem wektorów własnych dla λ_1 .

Jeśli wektor v_2 nie jest równoległy do ℓ , to wektory v_2 i $F(v_2)$ mają różne kierunki, przekształcenie nie ma zatem więcej wektorów ani wartości własnych.



Jeśli mamy podaną macierz przekształcenia liniowego, to wyznaczanie wartości i wektorów własnych można sprowadzić do rozwiązywania równań, jak to pokazują kolejne fakty.

Fakt 3.2

Wartości własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ to rozwiązania równania:

$$\det(m(F) - \lambda \text{Id}) = 0$$

Wielomian $\chi_F(\lambda) = \det(m(F) - \lambda \text{Id})$ nazywamy *wielomianem charakterystycznym* przekształcenia F .

Dowód. Niech A będzie macierzą przekształcenia F , tzn. $F(X) = AX$. Warunek:

$$F(X) = \lambda X \quad (\text{w wersji macierzowej } A \cdot X = \lambda X)$$

można zapisać w postaci

$$(F - \lambda \text{Id})(X) = 0 \quad (\text{w wersji macierzowej } (A - \lambda I) \cdot X = 0)$$

Zatem λ jest wartością własną F wtedy i tylko wtedy, gdy równanie macierzowe

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0 \tag{3.1}$$

ma niezerowe rozwiązanie. Ponieważ wektor $X = 0$ jest rozwiązaniem (8.1) niezależnie od wartości λ , więc szukamy takich λ , dla których (8.1) ma przynajmniej dwa rozwiązania ($X = 0$ i rozwiązanie niezerowe). Równanie (8.1) to układ cramerowski o macierzy głównej $(A - \lambda I)$, który zgodnie z Faktem 1.50 ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Wobec tego wartościami własnymi są pierwiastki λ równania $\det(A - \lambda I) = 0$. □

Przykład 6

Znajdź wszystkie wartości własne i wektory własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X$$

Rozwiązanie. Tym razem, w odróżnieniu od poprzednich przykładów, wygodniej będzie zacząć od wyznaczenia wartości własnych. Zgodnie z Faktem 3.2 wartości własne przekształcenia F , to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$\chi_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

czyli rozwiązania równania:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Zatem wartościami własnymi są $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 5$. Wyznamy teraz wektory własne dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$. Zgodnie z definicją, są to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y = x \\ 3x + 4y = y \end{cases}$$

Każde z równań tego układu przekształca się do postaci $x + y = 0$, więc zbiorem wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ jest prosta o równaniu $x + y = 0$.

Wyznamy teraz wektory własne dla wartości własnej $\lambda_1 = 5$. Zgodnie z definicją, są to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y = 5x \\ 3x + 4y = 5y \end{cases}$$

Każde z równań tego układu przekształca się do postaci $3x - y = 0$, więc zbiorem wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda_2 = 5$ jest prosta o równaniu $3x - y = 0$.

Jak pokazuje powyższy przykład i wcześniejszy dowód, czasami wygodniej jest posługiwać się warunkiem macierzowym niż funkcyjnym, dlatego wprowadzimy pojęcie wartości własnej i wektora własnego macierzy (kwadratowej).

Definicja 3.3

Wektor własny macierzy A rozmiaru 2×2 , to wektor X spełniający warunek

$$AX = \lambda X$$

dla pewnej liczby rzeczywistej λ . Jeśli $X \neq 0$, to liczbę λ nazywamy *wartością własną* macierzy A , zaś X *wektorem własnym dla wartości własnej λ* . Wektor $X = 0$ jest wektorem własnym dla każdej wartości własnej λ . Wielomian

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

nazywamy *wielomianem charakterystycznym* macierzy A .

Innymi słowy, wartości i wektory własne macierzy A to wartości i wektory własne przekształcenia liniowego o macierzy A . W związku z tą uwagą, na wszystkie kolejne fakty można patrzeć na dwa sposoby: jako odnoszące się do macierzy A lub jako odnoszące się do przekształcenia liniowego o macierzy A .

Wniosek 3.4

Macierz $A \in M_{2 \times 2}$ (przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) ma co najwyżej dwie wartości własne.

Dowód. Wartości własne macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} = (a-x)(d-x) - bc$$

Ponieważ wielomian kwadratowy ma co najwyżej dwa pierwiastki, więc macierz A ma co najwyżej dwie wartości własne. $\square$

Fakt 3.5

Niezerowy wektor własny macierzy $A \in M_{2 \times 2}$ (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) przynależy tylko do jednej wartości własnej.

Dowód. Załóżmy (nie wprost), że X jest niezerowym wektorem własnym macierzy A dla dwóch różnych wartości własnych λ_1 i λ_2 . Oznacza to, że:

$$\begin{cases} AX = \lambda_1 X \\ AX = \lambda_2 X \end{cases}$$

Stąd

$$\lambda_1 X = \lambda_2 X \quad \text{czyli} \quad (\lambda_1 - \lambda_2)X = 0$$

skąd otrzymujemy sprzeczność, gdyż $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ oraz $X \neq 0$. □

Fakt 3.6

Jeśli λ jest wartością własną macierzy $A \in M_{2 \times 2}$ (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), to zbiór wektorów własnych dla λ jest albo prostą (przechodzącą przez 0) albo całą płaszczyzną.

Dowód. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Zbiór wektorów $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ własnych dla wartości własnej λ to zbiór rozwiązań następującego układu równań (z niewiadomymi x i y):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

Po przekształceniu otrzymujemy układ cramerowski:

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Zbiór rozwiązań takiego układu to (zgodnie z Faktem 1.50) zbiór pusty, punkt, prosta lub cała płaszczyzna. Ponieważ $x = y = 0$ spełnia ten układ równań, a skoro λ jest wartością własną, to układ ma oprócz tego przynajmniej jedno niezerowe rozwiązanie, więc lista możliwych zbiorów rozwiązań to: prosta zawierająca punkt 0 oraz cała płaszczyzna. □

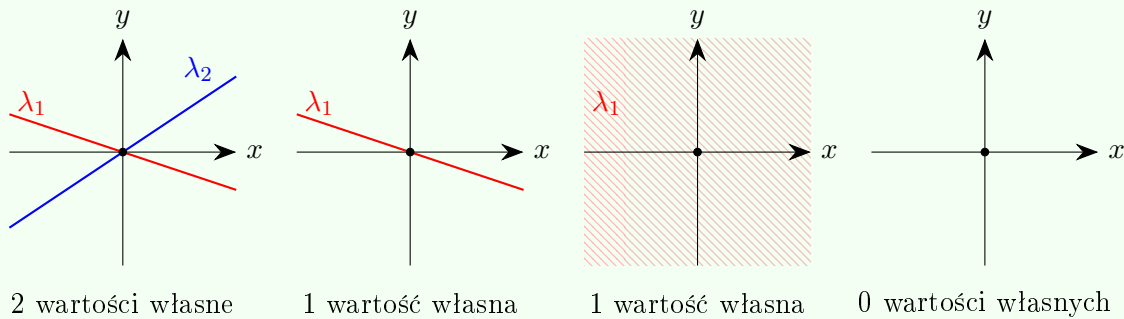
Fakt 3.7

Jeśli macierz $A \in M_{2 \times 2}$ (przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) ma dwie różne wartości własne, to zbiór wektorów własnych dla każdej z wartości własnych jest prostą przechodzącą przez 0.

Dowód. Zgodnie z Faktem 3.6 zbiór wektorów własnych dla każdej z wartości własnych to prosta przechodząca przez 0 lub płaszczyzna. Ponieważ jednak niezerowy wektor własny może należeć do tylko jednej wartości własnej (Fakt 3.5), więc jedyną możliwością są dwie różne proste przechodzące przez 0. □

Wniosek 3.8

Zbiór wektorów własnych macierzy 2×2 (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) jest jednym z poniższych zbiorów:



Dowód. Zgodnie z Wnioskiem 3.8 macierz 2×2 ma 0, 1 lub 2 wartości własne. Jeśli ma tylko 1 wartość własną λ_1 , to zbiór wektorów własnych dla λ_1 to (zgodnie z Faktem 3.6) prosta przechodząca przez 0 lub cała płaszczyzna. Jeśli ma 2 wartości własne λ_1 i λ_2 , to (zgodnie z Faktem 3.7) zbiory wektorów własnych to dwie różne proste przechodzące przez 0. Stąd możliwe są tylko cztery sytuacje przedstawione na rysunkach. Przykłady z początku rozdziału pokazują, że każda z tych sytuacji faktycznie może mieć miejsce. $\square$

Fakt 3.9: Wzory Viete'a

Jeśli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Dowód. Skoro x_1 i x_2 są pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c$, to rozkładając ten wielomian na czynniki otrzymujemy:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wymnażając dostajemy:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + (ax_1x_2)$$

Ponieważ dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają jednakowe odpowiednie współczynniki, więc:

$$\begin{cases} b = -a(x_1 + x_2) \\ c = ax_1x_2 \end{cases}$$

skąd:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$\square$

Wniosek 3.10

Jeśli macierz A rozmiaru 2×2 ma dwie wartości własne λ_1 i λ_2 , to:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A \end{cases}$$

gdzie $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = p + s$ nazywamy *śladem* macierzy.

Dowód. Niech $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Wówczas λ_1 i λ_2 to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} p - \lambda & q \\ r & s - \lambda \end{pmatrix} = (p - \lambda)(s - \lambda) - qr = \lambda^2 - (p + s)\lambda + (ps - qr) \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A \end{aligned}$$

Zgodnie z wzorami Viete'a:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{-\operatorname{tr} A}{1} = \operatorname{tr} A \\ \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det A}{1} = \det A \end{cases}$$

□

Wykorzystując powyższy wniosek można szybko ustalić znaki wartości własnych bez ich wyliczania:

Przykład 7

Wiedząc, że macierz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ma 2 wartości własne ustal znaki wartości własnych.

Rozwiązanie. Zgodnie z Wnioskiem 3.10 wiemy, że:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 5 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = 2 \end{cases}$$

Suma i iloczyn wartości własnych jest dodatnia, a zatem $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$.

3.2 Diagonalizacja macierzy**Twierdzenie 3.11: Diagonalizacja macierzy**

Jeśli A jest macierzą 2×2 , która ma dwie różne wartości własne λ i μ , to

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{gdzie } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

przy czym $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ to wektory własne odpowiednio dla λ i μ .

Dowód. Niech $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ będą niezerowymi wektorami własnymi odpowiednio dla wartości własnych λ i μ macierzy A . Oznaczmy $P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$. Macierz AP jest macierzą 2×2 , a zgodnie z zasadami mnożenia macierzy, wektory:

$$AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$$

$$AP \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}$$

stanowią odpowiednio pierwszą i drugą kolumną macierzy AP . Wobec tego:

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & \mu v_1 \\ \lambda u_2 & \mu v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = PD$$

Skoro $AP = PD$, a macierz P jest odwracalna (bo wektory u i v , zgodnie z Faktem 3.7, są niewspółliniowe), to $A = PDP^{-1}$. $\square$

Fakt 3.12

Niech A będzie macierzą 2×2 , zaś D i P takimi macierzami 2×2 , że P jest odwracalna oraz $A = PDP^{-1}$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi wzór:

$$A^n = PD^n P^{-1}$$

Dowód. Przeprowadźmy indukcję względem n . Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że dla pewnej wartości $n = k$ zachodzi $A^k = PD^k P^{-1}$. Wówczas dla $n = k + 1$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = PD^k P^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^k (P^{-1} \cdot P) DP^{-1} \\ &= P(D^k ID)P^{-1} = P(D^k D)P^{-1} = P(D^{k+1})P^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

Powyższy fakt jest prawdziwy dla dowolnej macierzy D , aczkolwiek w praktyce będziemy go wykorzystywać głównie w sytuacji gdy D jest diagonalna (a PDP^{-1} jest diagonalizacją macierzy A), co pozwoli nam sprawnie potęgować macierze kwadratowe.

Fakt 3.13

Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

Dowód powyższego faktu pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Pierwszym ważnym zastosowaniem diagonalizacji macierzy jest wyliczanie potęg (naturalnych) macierzy kwadratowych, jak pokazuje to poniższy przykład.

Przykład 1

Obliczyć $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{100}$.

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ to

$$\det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Zatem wartości własne to $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 3$. Wektory własne dla λ_1 to zbiór rozwiązań równania:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \end{cases} \quad \text{czyli} \quad x = -y$$

Wektory własne dla λ_2 to zbiór rozwiązań równania:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \end{cases} \quad \text{czyli} \quad x = y$$

Zatem przykładowe wektory własne dla wartości własnych 1 i 3 to, odpowiednio, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, czyli macierz diagonalizuje się w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Wobec tego, zgodnie z Faktem 3.12 i Faktem 3.13:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{100} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{100} + 1 & 3^{100} - 1 \\ 3^{100} + 1 & 3^{100} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Drugie ważne zastosowanie, to rozwiązywanie rekurencji liniowych (tzn. wyznaczanie swartego wzoru ciągu zadanego rekurencyjnie).

Przykład 2

Ciąg (a_n) zadany jest następującą rekurencją:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$$

Kolejnymi wyrazami tego ciągu są zatem: 0, 1, 5, 19, 65, ... Znajdź (zwarty) wzór na a_n .

Rozwiązanie. Każdy wyraz ciągu zależy tylko od dwóch poprzednich wyrazów. Jeśli zatem będziemy rozpatrywać wektory $v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$, to każdy wektor będzie zależał tylko od poprzedniego wektora i zależność tę będzie można zapisać warunkiem:

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_{n-1}$$

W związku z tym:

$$v_n = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_{n-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 v_{n-2} = \dots = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n v_0 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dla wyznaczenia wzoru na a_n trzeba więc obliczyć n -tą potęgę macierzy. Postępujemy jak w poprzednim przykładzie. Wielomian charakterystyczny macierzy $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ to:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-3)(\lambda-2)$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego to zatem $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$, a odpowiadające im wektory własne to (jak nietrudno wyliczyć) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diagonalizacja macierzy przyjmuje zatem postać:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$a_n = 3^n - 2^n$$

Trzeci rodzaj problemów, do których będziemy wykorzystywać diagonalizację macierzy, to wyznaczanie macierzy przekształcenia liniowego, dla którego znamy (lub łatwo możemy ustalić) wartości i wektory własne.

Przykład 3

Wyznaczyć macierze następujących przekształceń liniowych:

- (a) odbicie względem prostej ℓ o równaniu $3x - 4y = 0$,
- (b) rzut (prostopadły) na prostą ℓ o równaniu $3x - 4y = 0$,

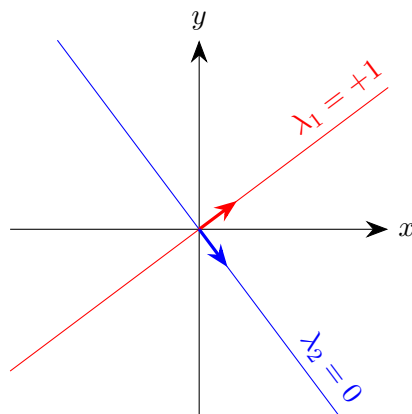
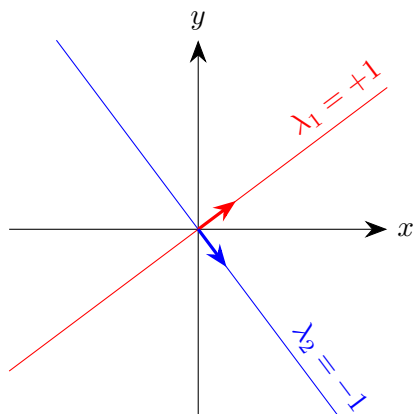
Rozwiązanie. Zauważmy, że w każdym przypadku jesteśmy w stanie wyznaczyć wektory i wartości własne przekształcenia:

- (a) Wartości własne to 1 i -1 , a wektory własne to, odpowiednio, wektory równoległe do ℓ (czyli współliniowe z wektorem kierunkowym $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$) i prostopadłe do ℓ (czyli współliniowe z wektorem normalnym $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$).
- (b) Wartości własne to 1 i 0, a wektory własne to, odpowiednio, wektory równoległe do ℓ (czyli współliniowe z wektorem kierunkowym $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$) i prostopadłe do ℓ (czyli współliniowe z wektorem normalnym $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$).

W związku z tym macierze tych przekształceń (zapisane w postaci diagonalnej) mają postać:

$$(a) \quad R \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(b) \ P \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Powyższe przykłady pokazują jak ważne jest diagonalizowanie macierzy. Z Faktu ?? wiemy, że nie każda macierz 2×2 się diagonalizuje (bo nie każda macierz 2×2 ma dwa niewspółliniowe wektory własne). Poniższe twierdzenie wyodrębnia zbiór macierzy (symetrycznych), które zawsze się diagonalizują (aczkolwiek nie każda diagonalizująca się macierz musi być symetryczna).

Twierdzenie 3.14: Twierdzenie spektralne dla $\mathbb{R}^2$

Symetryczna macierz A rozmiaru 2×2 zawsze się diagonalizuje, tzn.

$$A = PDP^{-1}$$

i to w taki sposób, że kolumny macierzy P są wektorami prostopadłymi.

Innymi słowy zachodzi jedna z dwóch możliwości:

- (a) A ma dwie różne wartości własne, a zbiory ich wektorów własnych są prostopadłymi prostymi,
- (b) A ma jedną (podwójną) wartość własną λ , dla której zbiór wektorów własnych jest całą płaszczyzną (wówczas $A = \lambda I$).

Dowód. Wielomian charakterystyczny macierzy symetrycznej $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ to:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - \lambda(a + c) + (ac - b^2)$$

Wyróżnik tego wielomianu to:

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

przy czym $\Delta = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - c = 0$ i $b = 0$, czyli $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Stąd z Faktu 3.2 macierz A jest albo postaci aI albo ma dwie różne wartości własne.

Niech teraz v_1 i v_2 będą wektorami własnymi dla różnych wartości własnych λ_1 i λ_2 . Zauważmy, że:

$$\lambda_1(v_1 \circ v_2) = (\lambda_1 v_1) \circ v_2 = (\lambda_1 v_1)^\top v_2 = (Av_1)^\top v_2 = v_1^\top A^\top v_2 = v_1^\top Av_2$$

$$= v_1^\top \cdot \lambda_2 v_2 = \lambda_2(v_1 \circ v_2)$$

Zatem $\lambda_1(v_1 \circ v_2) = \lambda_2(v_1 \circ v_2)$, co wobec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ daje $v_1 \circ v_2 = 0$, czyli v_1 i v_2 są prostopadłe. $\square$

Fakt 3.15

Jeśli A jest macierzą 2×2 , to A i $A^\top$ mają jednakowy wielomian charakterystyczny i jednakowe wartości własne.

Dowód. Rozważane wielomiany charakterystyczne to

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) \quad \text{oraz} \quad \chi_{A^\top} = \det(A^\top - xI)$$

Zauważmy, że zgodnie z Faktem 2.66:

$$(A - xI)^\top = A^\top - xI^\top = A^\top - xI$$

Ponieważ transponowanie macierzy nie zmienia wyznacznika (Fakt 2.67), więc:

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \det(A - xI)^\top = \det(A^\top - xI) = \chi_{A^\top}(x)$$

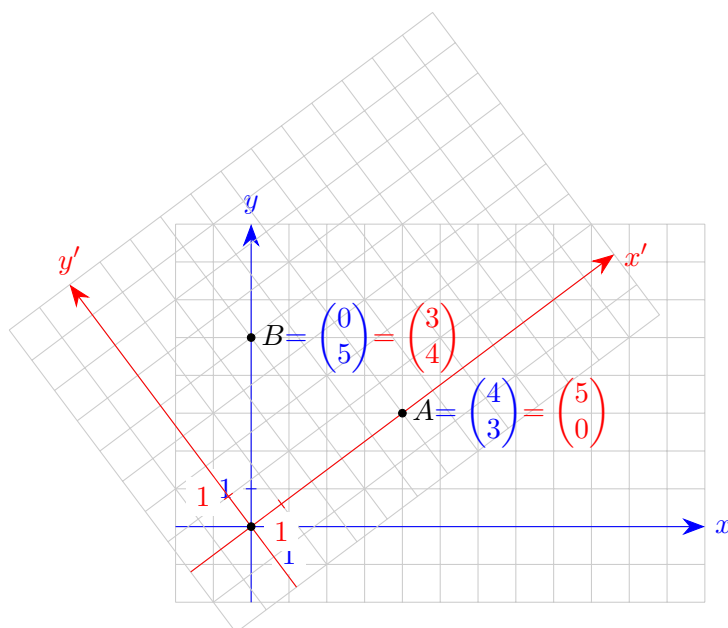
$\square$

Rozdział 4

Zamiana układu współrzędnych na płaszczyźnie

4.1 Nowy układ współrzędnych

Na jednej płaszczyźnie możemy mieć dwa różne układy współrzędnych (jak na poniższym rysunku). Wówczas każdemu punktowi można przypisać współrzędne na dwa różne sposoby: względem jednego lub względem drugiego układu współrzędnych. Dla uproszczenia będziemy jeden z nich nazywać *starym* układem współrzędnych (i współrzędne będziemy oznaczać x i y), a drugi – *nowym* układem współrzędnych (i współrzędne będziemy oznaczać x' i y').



Aby rozróżnić (bez używania kolorów) współrzędne danego punktu względem różnych układów współrzędnych, będziemy stosować następującą konwencję: $[v]_{stary}$ będzie oznaczać współrzędne w starym układzie, zaś $[v]_{nowy}$ współrzędne w nowym układzie. Na powyższym rysunku mamy więc:

$$[A]_{stary} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [A]_{nowy} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

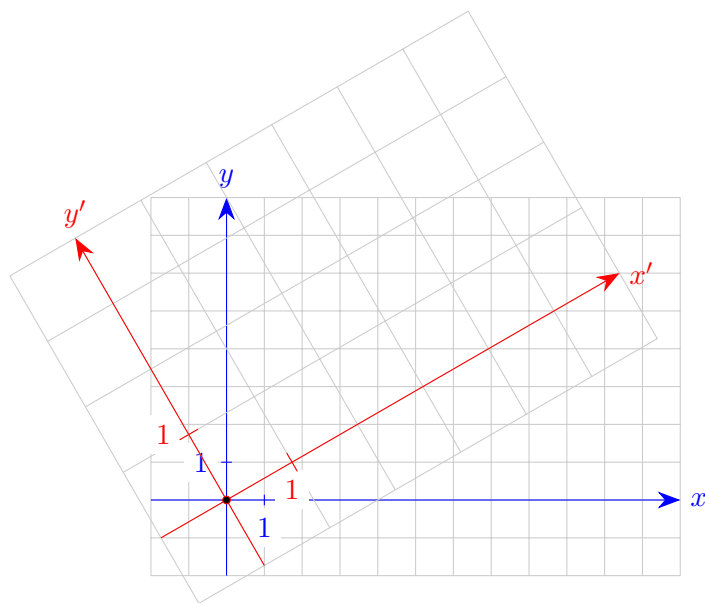
$$[B]_{stary} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad [B]_{nowy} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

W niniejszym skrypcie będziemy rozważać jedynie sytuację, gdy początek układu współrzędnych O jest taki sam zarówno w nowym, jak i w starym układzie współrzędnych, tzn.

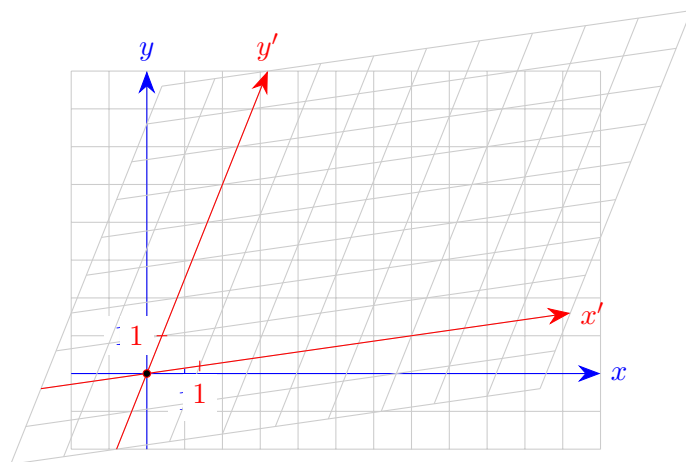
$$[O]_{\text{stary}} = [O]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pozwala to pozostać przy dotychczasowej konwencji utożsamiania punktów i wektorów (tzn. $\overrightarrow{OA} = A$), gdyż początek układu współrzędnych (będący domyślnym początkiem wektora) nie zależy od wyboru układu.

Natomiast jednostka w nowym układzie współrzędnych nie musi być też tożsama z jednostką w starym układzie współrzędnych:



Nowy układ współrzędnych nie musi być nawet układem prostokątnym (tzn. jego osie nie muszą być prostopadłe):



W tej sytuacji potrzebujemy więc zdefiniować czym jest układ współrzędnych i co to są współrzędne względem wybranego (niekoniecznie prostokątnego) układu współrzędnych:

Definicja 4.1

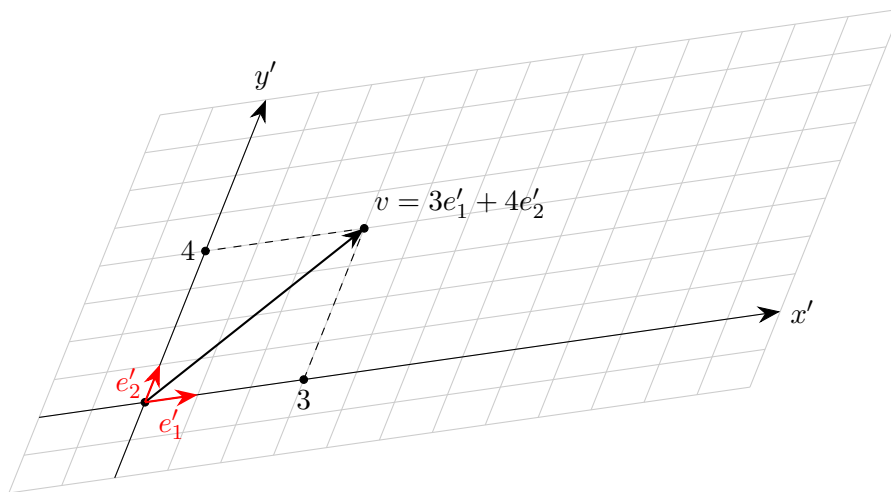
*Układem współrzędnych na płaszczyźnie nazwiemy dwie przecinające się (pod dowolnym kątem) proste (nazywane osiami x i y), niezerowy wektor równoległy do osi x (nazywany *pierwszym wersorem* i wyznaczający jednostkę na osi x) oraz niezerowy wektor równoległy do osi y (nazywany *drugim wersorem* i wyznaczający jednostkę na osi y).*

Zgodnie z powyższą definicją, wersor to wektor o początku O (punkt przecięcia osi, czyli początek układu współrzędnych) i końcu oznaczającym jednostkę na jednej z osi (punkty te będziemy oznaczać $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Definicja 4.2

Współzrzednymi wektora (punktu) v w (nowym) układzie współrzędnych o wersorach e'_1 i e'_2 nazywamy takie liczby x' i y' , że:

$$v = x'e'_1 + y'e'_2$$



Zauważmy, że definicja ta zgodna jest z naszym dotychczasowym rozumieniem współrzędnych – jeśli punkt (wektor) v w starym układzie ma współrzędne x i y , to:

$$v = xe_1 + ye_2$$

gdzie e_1 i e_2 to wersory starego układu współrzędnych.

Przykład 1

Dany jest nowy układ współrzędnych, którego wersorami są wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz:

- (a) nowe współrzędne wektora $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (tzn. $[v]_{stary} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$),
- (b) stare współrzędne wektora w , takiego że $[w]_{nowy} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Szukamy nowych współrzędnych, tzn. takich x' i y' , że

$$v = x'e'_1 + y'e'_2$$

Oznacza to rozwiązywanie układu równań:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 3 = x' + 3y' \\ 4 = 2x' + y' \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $x' = \frac{9}{5}$, $y' = \frac{2}{5}$.

(b) Skoro nowe współrzędne wektora w to 3 i 4, to:

$$w = 3e'_1 + 4e'_2 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Fakt 4.3

Jeśli e'_1, e'_2 są wersorami nowego układu współrzędnych, to dla dowolnego wektora v zachodzi:

$$[v]_{stary} = P \cdot [v]_{nowy} \quad (4.1)$$

gdzie P jest macierzą, której kolumnami są stare współrzędne nowych wersorów, tzn.

$$P = ([e'_1]_{stary}, [e'_2]_{stary})$$

Macierz P nazywamy *macierzą zamiany współrzędnych*.

Dowód. Wektor v można zapisać w postaci kombinacji liniowej starych wersorów:

$$v = xe_1 + ye_2, \quad \text{czyli} \quad [v]_{stary} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

oraz w postaci kombinacji liniowej nowych wersorów:

$$v = x'e'_1 + y'e'_2, \quad \text{czyli} \quad [v]_{nowy} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Jeśli oznaczymy stare współrzędne nowych wersorów jak następuje:

$$[e'_1]_{stary} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad e'_1 = ae_1 + ce_2$$

$$[e'_2]_{stary} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad e'_2 = be_1 + de_2$$

to

$$v = x'e'_1 + y'e'_2 = x'(ae_1 + ce_2) + y'(be_1 + de_2) = (x'a + y'b)e_1 + (x'c + y'd)e_2$$

Zatem stare współrzędne wektora v to:

$$[v]_{stary} = \begin{pmatrix} x'a + y'b \\ x'c + y'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \cdot [v]_{nowy}$$

□

Zauważmy, że $[e'_1]_{nowy} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $[e'_2]_{nowy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, więc podstawiając $v = e'_1$ oraz $v = e'_2$ do wzoru (4.1) otrzymujemy:

$$[e'_1]_{stary} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad [e'_2]_{stary} = P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

co oznacza, że $[e'_1]_{stary}$ i $[e'_2]_{stary}$ to kolumny macierzy P (zgodnie z Faktem 4.3).

Rozważmy jeszcze raz Przykład 1, tym razem opierając jego rozwiązanie na wzorze (4.1)

Przykład 2

Dany jest nowy układ współrzędnych, którego wersorami są wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz:

(a) nowe współrzędne wektora $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (tzn. $[v]_{stary} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$),

(b) stare współrzędne wektora w , takiego że $[w]_{nowy} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

Rozwiązanie. Wersory nowego układu współrzędnych to $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, co oznacza:

$$[e'_1]_{stary} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad [e'_2]_{stary} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wobec tego macierz P z Faktu 4.3 ma postać:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Stąd, zgodnie z Faktem 4.3, otrzymujemy:

$$(a) [v]_{stary} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot [v]_{nowy}, \text{ czyli } [v]_{nowy} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot [v]_{stary} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$(b) [w]_{stary} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot [w]_{nowy} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Przykład 3

Wersorami nowego układu współrzędnych są wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz w nowych współrzędnych równanie prostej, która w starych współrzędnych ma równanie $2x + 3y - 1 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Zgodnie ze wzorem (4.1) mamy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = x' + 2y' \\ y = x' + y' \end{cases}$$

Stąd:

$$2x + 3y - 1 = 2(x' + 2y') + 3(x' + y') - 1 = 5x' + 7y' - 1$$

czyli równanie prostej to $5x' + 7y' - 1 = 0$.

Rozwiązanie (sposób II). Równanie $2x + 3y - 1 = 0$ można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

co uwzględniając wzór (4.1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

daje:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{czyli} \quad 5x' + 7y' = 1$$

co jest równaniem prostej w nowych współrzędnych.

Przykład 4

Wersorami nowego układu współrzędnych są wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz w starych współrzędnych równanie prostej, która w nowych współrzędnych ma równanie $x' + y' - 2 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Zgodnie ze wzorem (4.1) mamy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = x' + y' \\ y = -x' + y' \end{cases}$$

skąd wyliczamy:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Wobec tego:

$$x' + y' - 2 = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y) + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) - 2 = x - 2$$

czyli równanie prostej w starych współrzędnych to $x - 2 = 0$.

Rozwiązanie (sposób II). Równanie $x' + y' - 2 = 0$ można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2$$

co uwzględniając wzór (4.1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

daje:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \quad \text{czyli} \quad x = 2$$

co jest równaniem prostej w nowych współrzędnych.

Jeśli zmieniamy układ współrzędnych, to zmianę ulegną również macierze przekształceń liniowych. Dla rozróżnienia macierzy przekształcenia liniowego F w starym i nowym układzie współrzędnych, będziemy je oznaczać, odpowiednio, $m_{stary}(F)$ i $m_{nowy}(F)$.

Definicja 4.4

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Macierzą F w starym układzie współrzędnych nazywamy macierz $m_{stary}(F)$ spełniającą dla dowolnego wektora X warunek:

$$[F(X)]_{stary} = m_{stary}(F) \cdot [X]_{stary}$$

Macierzą F w nowym układzie współrzędnych nazywamy macierz $m_{nowy}(F)$ spełniającą dla dowolnego wektora X warunek:

$$[F(X)]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [X]_{nowy}$$

Zauważmy, że definicja macierzy przekształcenia w starym układzie współrzędnych to inaczej zapisana Definicja 2.3. Interpretacja macierzy przekształcenia w nowym układzie współrzędnych jest analogiczna do interpretacji macierzy przekształcenia w starym układzie współrzędnych, opisaney w Fakcie 2.13.

Fakt 4.5

Jeśli $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w (nowym) układzie współrzędnych o wersorach e'_1 i e'_2 , to:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = [F(e'_1)]_{\text{nowy}} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = [F(e'_2)]_{\text{nowy}}$$

(tzn. kolumny macierzy przekształcenia to nowe współrzędne obrazów nowych wersorów).

Dowód.

$$[F(e'_1)]_{\text{nowy}} = m_{\text{nowy}}(F) \cdot [e'_1]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$[F(e'_2)]_{\text{nowy}} = m_{\text{nowy}}(F) \cdot [e'_2]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

□

Przykład 5

Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pewne przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ma w nowym układzie macierz $m_{\text{nowy}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(e'_1)$, $F(e'_2)$ oraz $F\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 4.5, skoro $m_{\text{nowy}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, to:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = [F(e'_1)]_{\text{nowy}} \quad \text{czyli} \quad F(e'_1) = 4e'_1 + e'_2 = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [F(e'_2)]_{\text{nowy}} \quad \text{czyli} \quad F(e'_2) = e'_1 + e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e'_1 + e'_2$, więc:

$$F(v) = F(e'_1 + e'_2) = F(e'_1) + F(e'_2) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Operowanie macierzami przekształceń w nowych i starych współrzędnych bardzo upraszcza następujący fakt:

Fakt 4.6

Niech e'_1 i e'_2 będą wersorami nowego układu współrzędnych, zaś P macierzą zamiany współrzędnych (tzn. $P = ([e'_1]_{\text{stary}}, [e'_2]_{\text{stary}})$). Wówczas dla dowolnego przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zachodzi wzór:

$$m_{\text{stary}}(F) = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot P^{-1} \quad (4.2)$$

Dowód. Zgodnie z Definicją 4.4 mamy:

$$[F(X)]_{\text{nowy}} = m_{\text{nowy}}(F) \cdot [X]_{\text{nowy}}$$

Zgodnie z Faktem 4.3 zastosowanym dla wektora X :

$$[X]_{\text{stary}} = P \cdot [X]_{\text{nowy}}, \quad \text{czyli} \quad P^{-1}[X]_{\text{stary}} = [X]_{\text{nowy}}$$

Zgodnie z Faktem 4.3 zastosowanym dla wektora $F(X)$:

$$[F(X)]_{\text{stary}} = P \cdot [F(X)]_{\text{nowy}}$$

Łącząc te wzory otrzymujemy:

$$[F(X)]_{\text{stary}} = P \cdot [F(X)]_{\text{nowy}} = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot [X]_{\text{nowy}} = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot P^{-1} \cdot [X]_{\text{stary}}$$

Porównując otrzymany wzór:

$$[F(X)]_{\text{stary}} = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot P^{-1} \cdot [X]_{\text{stary}}$$

z definicją:

$$[F(X)]_{\text{stary}} = m_{\text{stary}}(F) \cdot [X]_{\text{stary}}$$

dostajemy szukany wzór:

$$m_{\text{stary}}(F) = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot P^{-1}$$

□

Przykład 6

Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o macierzy A ma dwie różne wartości własne λ i μ . Wprowadźmy nowy układ współrzędnych o wersorach $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, gdzie u i v to wektory własne F dla wartości własnych, odpowiednio, λ i μ . Znajdź macierz F w nowym układzie.

Rozwiązanie. Skoro nowe wersory $e'_1 = u$ i $e'_2 = v$ są wektorami własnymi F , to:

$$F(e'_1) = \lambda \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 \quad \text{oraz} \quad F(e'_2) = 0 \cdot e'_1 + \mu \cdot e'_2$$

skąd $m_{\text{nowy}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Zauważmy, że w takim razie, zgodnie ze wzorem (4.2) otrzymujemy:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = ([e'_1]_{\text{stary}}, [e'_2]_{\text{stary}}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

czyli wzór na diagonalizację macierzy. Wzór (4.2) można więc traktować jako uogólnienie wzoru na diagonalizację macierzy.

Przykład 7

Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w nowym układzie ma macierz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F w starym układzie.

(b) Przekształcenie liniowe $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w starym układzie ma macierz $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wyznacz

macierz G w nowym układzie.

Rozwiązanie. Macierz zamiany współrzędnych to $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 4.6:

$$m_{stary}(F) = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

oraz

$$m_{stary}(G) = P \cdot m_{nowy}(G) \cdot P^{-1}$$

skąd otrzymujemy:

$$m_{nowy}(G) = P^{-1} \cdot m_{stary}(G) \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Krzywe drugiego stopnia

W Rozdziale 1.2 dowiedzieliśmy się, że równanie pierwszego stopnia z niewiadomymi x i y , tzn. równanie

$$ax + by + c = 0 \quad (4.3)$$

zazwyczaj opisuje prostą na płaszczyźnie (wyjątkiem jest przypadek $a = b = 0$, gdy równanie to opisuje zbiór pusty lub całą płaszczyznę). Równanie (4.3) nazywamy *równaniem pierwszego stopnia*, gdyż niewiadome x i y występują w co najwyżej pierwszej potęgze. W niniejszym rozdziale ustalimy jaki zbiór opisuje równanie drugiego stopnia z niewiadomymi x i y , tzn. równanie

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (4.4)$$

Równanie (4.4) nazywamy *równaniem drugiego stopnia*, gdyż niewiadome x i y występują w co najwyżej drugiej potęgze (przy czym składnik bxy traktujemy jako składnik drugiego stopnia, gdyż występuje w nim iloczyn dwóch niewiadomych). Dla uproszczenia, rozważać będziemy tylko przypadek, gdy w równaniu (4.4) nie występują składniki pierwszego stopnia (tzn. $d = e = 0$), a wyraz wolny jest niezerowy (tzn. $f \neq 0$). To dodatkowe założenie w niewielkim stopniu wpływa na ogólność rozważań. Najpierw przyjrzymy się kilku szczególnym przypadkom równań drugiego stopnia.

Definicja 4.7

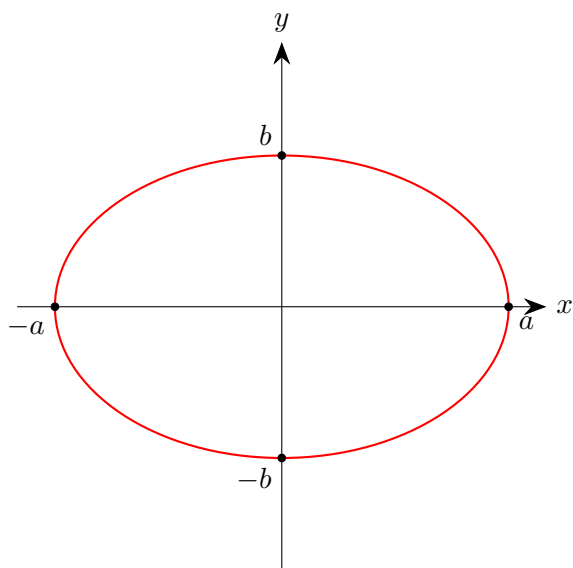
Elipsą o długiej półosi długości a i krótkiej półosi długości b ($a \geq b$) nazywamy krzywą zadaną równaniem:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (4.5)$$

Zwróćmy uwagę, że okrąg jest szczególnym przypadkiem elipsy (gdy długa i krótka półoś są tej samej długości). Równanie $x^2 + y^2 = r^2$ okręgu o środku w punkcie O można zapisać w postaci:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

Wówczas promień okręgu to półoś elipsy (a średnica okręgu to oś elipsy).

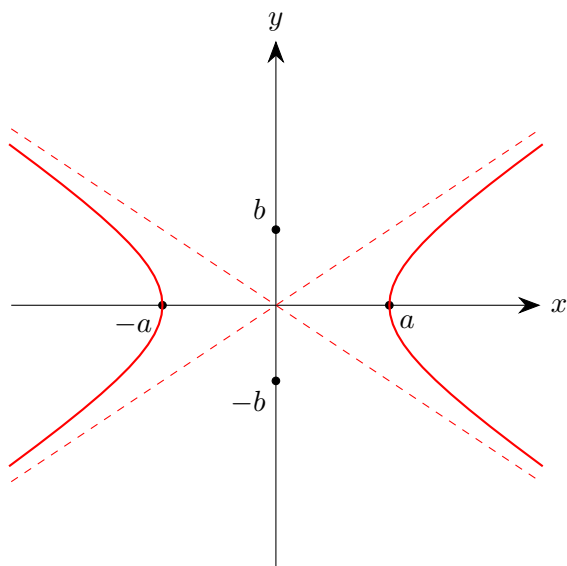


Elipsa o równaniu $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

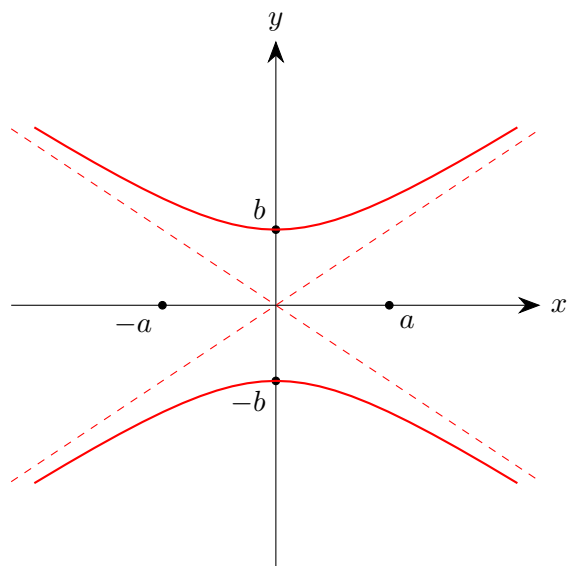
Definicja 4.8

Hiperbolą nazywamy krzywą zadaną równaniem:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{lub} \quad -\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (4.6)$$

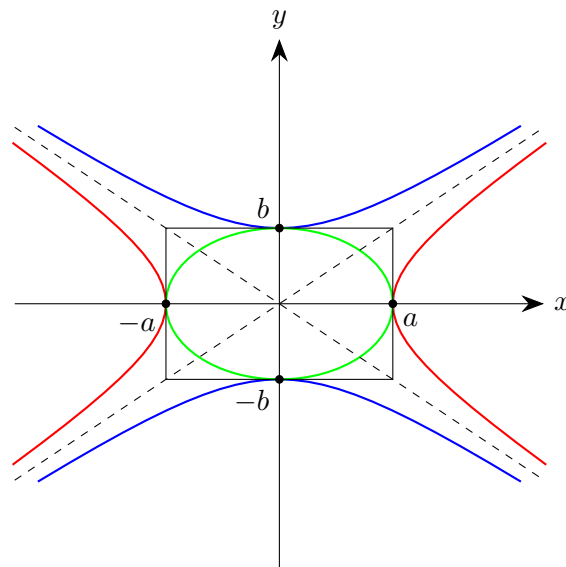


Hiperbola o równaniu $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



Hiperbola o równaniu $-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

Na kolejnym rysunku, we wspólnym układzie współrzędnych, przedstawiono wykresy wszystkich trzech równań:



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad -\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Rysunek ten pokazuje praktyczną metodę rysowania hiperboli:

- (1) zaznaczyć punkty $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$ i ustalić, które dwa z tych punktów należą do wykresu (tzn. spełniają rozważane równanie hiperboli),
- (2) narysować prostokąt, dla którego cztery powyższe punkty są środkami boków i przedłużyć jego przekątne (będą to asymptoty hiperboli),
- (3) naszkicować dwie gałęzie hiperboli przechodzące przez punkty wybrane w (1) i mające asymptoty ustalone w (2).

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami, będziemy rozważać równania drugiego stopnia postaci:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0$$

gdzie $f \neq 0$. Równanie takie można przekształcić do postaci:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$$

gdzie $A = -\frac{a}{f}$, $B = -\frac{b}{f}$, $C = -\frac{c}{f}$. Rozważmy najpierw sytuację, gdy $B = 0$.

Fakt 4.9

Zbiór punktów płaszczyzny opisany równaniem $Ax^2 + Cy^2 = 1$ to:

- elipsa, gdy $A, C > 0$,
- hiperbola, gdy $A > 0 > C$ lub $C > 0 > A$,
- zbiór pusty, gdy $A, C < 0$.

Przypadek, gdy $A = 0$ lub $C = 0$ pozostawiamy do rozważenia w ramach ćwiczeń.

Dowód. Jeśli $A, C > 0$, to równanie to można przekształcić do postaci równania elipsy:

$$\left(\frac{x}{1/\sqrt{A}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{C}}\right)^2 = 1$$

Jeśli $A > 0 > C$, to równanie to można przekształcić do postaci równania hiperboli:

$$\left(\frac{x}{1/\sqrt{A}}\right)^2 - \left(\frac{y}{1/\sqrt{-C}}\right)^2 = 1$$

Podobnie w przypadku $C > 0 > A$:

$$-\left(\frac{x}{1/\sqrt{-A}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{C}}\right)^2 = 1$$

W sytuacji gdy $A, C < 0$, lewa strona równania jest ujemna lub równa zero, więc równanie jest sprzeczne. $\square$

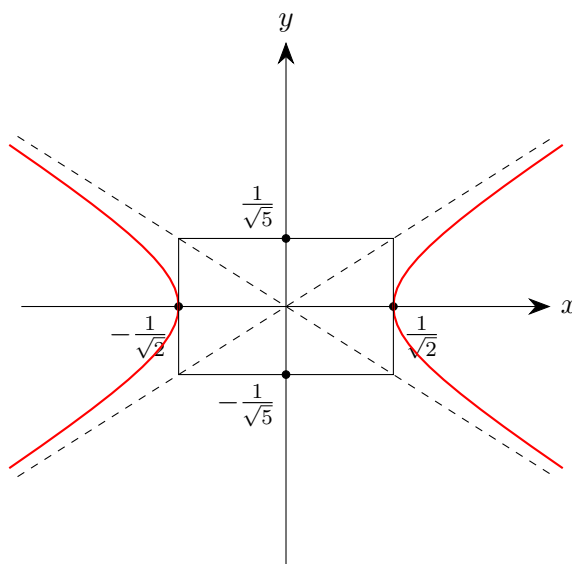
Przykład 1

Narysuj krzywą o równaniu $2x^2 - 5y^2 = 1$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 4.9 krzywa ta jest hiperbolą. Możemy ją zapisać w postaci (4.6):

$$\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)^2 = 1$$

Zgodnie z opisaną wcześniej procedurą rysujemy prostokąt o środkach boków $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, przedłużamy jego przekątne, by otrzymać asymptoty hiperboli i prowadzimy dwie gałęzie hiperboli przez punkty $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ (które, jak nietrudno sprawdzić, spełniają zadane równanie).



W dalszej części pokażemy, że równanie w postaci $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ można sprowadzić do postaci $A'(x')^2 + C'(y')^2 = 1$ w odpowiednio wybranym (nowym) prostokątnym układzie współrzędnych, co oznacza, że (o ile $A', C' \neq 0$) jest to równanie elipsy, hiperboli lub równanie sprzeczne.

Twierdzenie 4.10

Dane jest równanie

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1 \quad (4.7)$$

Jeśli v_1 i v_2 to **jednostkowe** wektory własne symetrycznej macierzy $\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$ dla wartości własnych λ_1 i λ_2 , to w nowym układzie współrzędnych o wersorach v_1 i v_2 równanie (4.7) przyjmuje postać:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 1 \quad (4.8)$$

W szczególności równanie to opisuje:

- elipsę, jeśli $\lambda_1, \lambda_2 > 0$,
- hiperbolę, jeśli $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ lub $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$,
- zbiór pusty, jeśli $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Ponadto osie symetrii otrzymanej elipsy lub hiperboli to osie nowego układu współrzędnych (czyli proste o wektorach kierunkowych v_1 i v_2).

Dowód. Przypadek $B = 0$ nie wymaga zmiany układu współrzędnych (nowy układ i stary układ pokrywają się) i został rozpatrzony w Fakcie 4.9.

Przyjmijmy, że $B \neq 0$. Równanie $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ można zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{czyli} \quad X^\top QX = 1 \quad (4.9)$$

gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$. Iloczyn macierzy po lewej stronie równości to macierz rozmiaru 1×1 , którą utożsamiamy z pojedynczą liczbą rzeczywistą. Macierz Q jest macierzą symetryczną, więc zgodnie z Twierdzeniem Spektralnym diagonalizuje się, czyli:

$$Q = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{2x} \\ v_{1y} & v_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{2x} \\ v_{1y} & v_{2y} \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{czyli} \quad Q = PDP^{-1}$$

gdzie λ_1 i λ_2 to wartości własne Q , a $v_1 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix}$ to odpowiadające im wektory własne. Wektory własne v_1 i v_2 są prostopadłe (zgodnie z Twierdzeniem Spektralnym) i można je wybrać tak, by $|v_1| = |v_2| = 1$ (przeskalowany wektor własny też jest wektorem własnym). Wobec tego macierz P jest macierzą izometrii (jej kolumny to prostopadłe wektory długości 1), czyli:

$$P^\top = P^{-1}$$

Ponieważ $Q = PDP^{-1}$, więc równanie (4.9) przyjmuje postać:

$$X^\top (PDP^{-1})X = 1$$

którą zgodnie ze wzorem na transponowanie iloczynu macierzy (Fakt 2.66) można przekształcić do:

$$(P^\top X)^\top D(P^{-1}X) = 1, \quad \text{czyli} \quad (P^{-1}X)^\top D(P^{-1}X) = 1$$

Wprowadzamy nowy układ współrzędnych, dla których v_1 i v_2 będą wersorami. Nowy układ współrzędnych będzie prostokątny (bo wersory są prostopadłe) i będzie miał taką samą jednostkę

co stary układ (bo jako nowe wersory wybraliśmy wektory długości 1) oraz zgodnie z Faktem 4.3 $X = PX'$, czyli $P^{-1}X = X'$. Stąd badane równanie przyjmuje postać:

$$(X')^\top D(X') = 1 \quad \text{czyli} \quad (x' \ y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{czyli} \quad \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 1$$

□

Przykład 2

Narysuj krzywą o równaniu $11x^2 - 24xy + 4y^2 = 1$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Twierdzeniem 4.10 szukamy wartości i wektorów własnych macierzy $Q = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. Jej wielomian charakterystyczny to

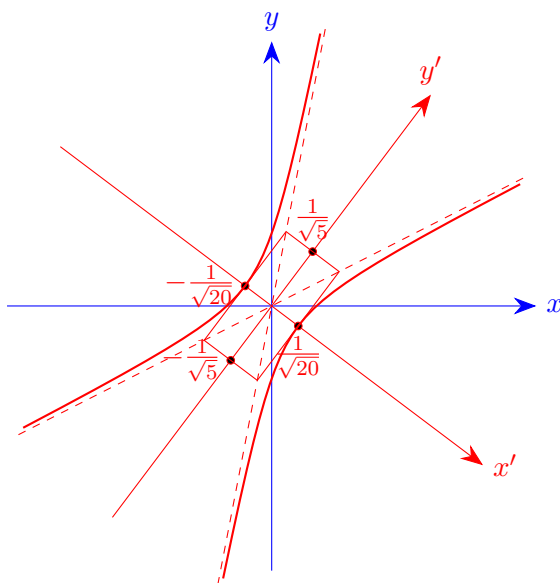
$$\chi_Q(x) = \det \begin{pmatrix} 11-x & -12 \\ -12 & 4-x \end{pmatrix} = (11-x)(4-x) - 144 = x^2 - 15x - 100 = (x-20)(x+5)$$

czyli wartościami własnymi są $\lambda_1 = 20$ i $\lambda_2 = -5$. Wektory własne dla wartości własnej λ_1 to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 11x - 12y = 20x \\ -12x + 4y = 20y \end{cases}$$

tzn. punkty leżące na prostej $3x + 4y = 0$. Przykładem (niezerowego) wektora własnego jest $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, a ponieważ potrzebujemy wektora jednostkowego, więc dzieląc go przez jego długość otrzymujemy: $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Podobnie ustalamy $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Zaznaczamy nowy układ współrzędnych i szkicujemy w nowym układzie współrzędnych (zgodnie z procedurą) hiperbolę o równaniu:

$$20(x')^2 - 5(y')^2 = 1$$



Przykład 3

Narysuj krzywą o równaniu $34x^2 - 24xy + 41y^2 = 1$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Twierdzeniem 4.10 szukamy wartości i wektorów własnych macierzy $Q = \begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix}$. Jej wielomian charakterystyczny to

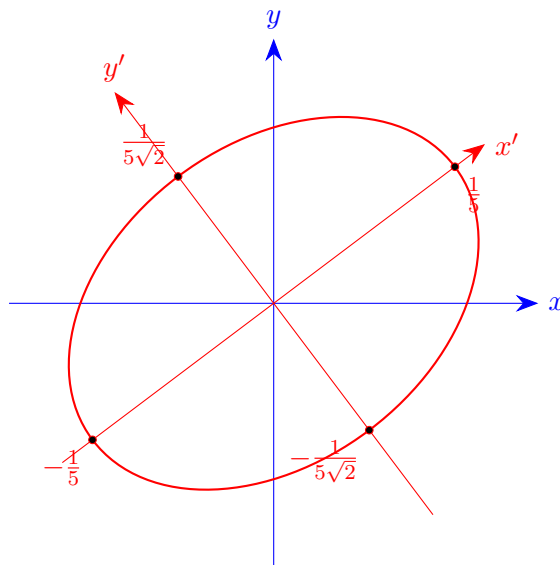
$$\chi_Q(x) = \det \begin{pmatrix} 34-x & -12 \\ -12 & 41-x \end{pmatrix} = (34-x)(41-x) - 144 = x^2 - 75x + 1250 = (x-25)(x-50)$$

czyli wartościami własnymi są $\lambda_1 = 25$ i $\lambda_2 = 50$. Wektory własne dla wartości własnej λ_1 to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 34x - 12y = 25x \\ -12x + 41y = 25y \end{cases}$$

tzn. punkty leżące na prostej $3x - 4y = 0$. Przykładem (niezerowego) wektora własnego jest $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, a ponieważ potrzebujemy jednostkowego wektora własnego, więc dzieląc go przez jego długość otrzymujemy: $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Podobnie ustalamy $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Zaznaczamy nowy układ współrzędnych i szkicujemy w nowym układzie współrzędnych elipsę o równaniu:

$$25(x')^2 + 50(y')^2 = 1$$

**Przykład 4**

Narysuj krzywą o równaniu $xy = 1$ (czyli „szkolną” hiperbolę o równaniu $y = \frac{1}{x}$).

Rozwiązanie. Zgodnie z Twierdzeniem 4.10 szukamy wartości i wektorów własnych macierzy $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Jej wielomian charakterystyczny to

$$\chi_Q(x) = \det \begin{pmatrix} -x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -x \end{pmatrix} = x^2 - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$$

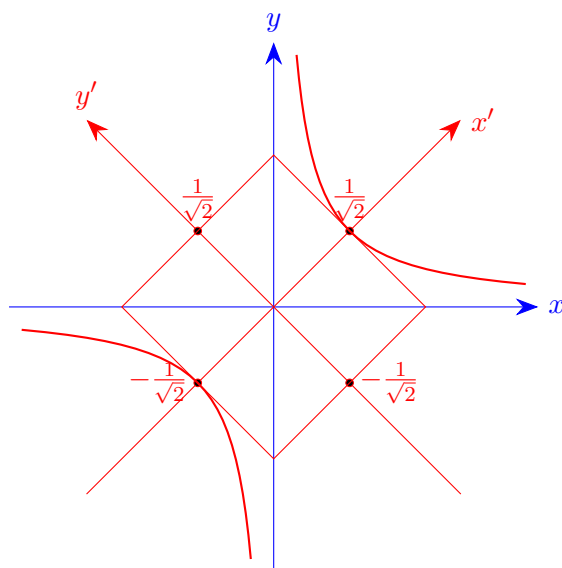
czyli wartościami własnymi są $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Wektory własne dla wartości własnej λ_1 to

rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

więc $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, a ponieważ szukamy jednostkowego wektora własnego, to $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Podobnie ustalamy, że $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Zaznaczamy nowy układ współrzędnych i szkicujemy w nowym układzie współrzędnych (zgodnie z procedurą) hiperbolę o równaniu:

$$\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 = 1$$



Rozdział 5

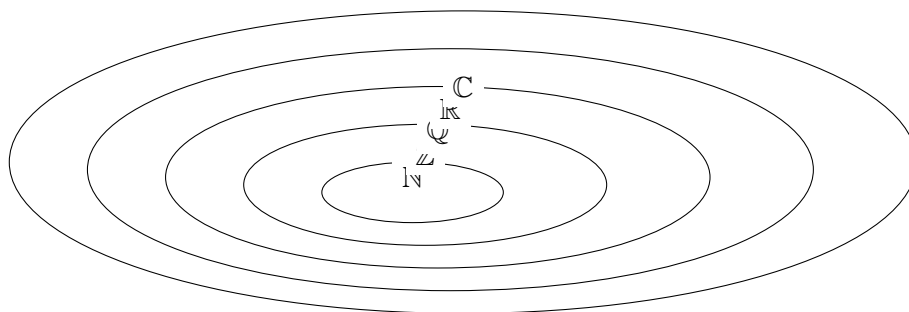
Liczby zespolone

5.1 Działania na liczbach zespolonych

Definicja 5.1

Liczby zespolone to liczby postaci $a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś i to taka liczba (nierzeczywista), dla której $i^2 = -1$ (myślimy: $i = \sqrt{-1}$). Liczbę a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej $z = a + bi$ (i oznaczamy $\operatorname{Re}z$), a liczbę b – *częścią urojoną* liczby zespolonej z (i oznaczamy $\operatorname{Im}z$).

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest podzbiorem zbioru liczb zespolonych (oznaczanego $\mathbb{C}$), tzn. każda liczba rzeczywista $r \in \mathbb{R}$ jest liczbą zespoloną o zerowej części urojonej: $r = r + 0 \cdot i$. Wzajemne relacje wszystkich poznanych zbiorów liczb przedstawia rysunek poniżej.



Działania na liczbach zespolonych określamy tak, by zachowane były prawa działań obowiązujące dla liczb rzeczywistych, w szczególności przemienność i łączność dodawania i mnożenia i rozdzielność mnożenia względem dodawania oraz by działania na liczbach rzeczywistych były szczególnym przypadkiem działań na liczbach zespolonych. Stąd następujące definicje:

Definicja 5.2

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych $a + ib$ i $c + id$ (za wyjątkiem dzielenia przez 0) definiujemy następująco:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

O ile definicja dodawania i odejmowania wydaje się naturalna, o tyle definicje mnożenia i dzielenia wymagają wytłumaczenia. Wymnażając liczby zespolone $a + ib$ i $c + id$ oraz stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania (oraz warunek $i^2 = -1$) otrzymujemy zapowiadany wzór:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + ib \cdot c + a \cdot id + ib \cdot id = ac + i(bc + ad) + i^2 bd = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Wzór na iloraz liczb zespolonych również wyprowadzamy przy pomocy prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, wykorzystując mechanizm stosowany przy usuwaniu niewymierności z mianownika:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 - (id)^2} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Wynika stąd, że dzielenie przez liczbę zespoloną $c + id$ jest wykonalne, o ile $c^2 + d^2 \neq 0$, czyli o ile c i d nie są jednocześnie zerami (tzn. za wyjątkiem dzielenia przez liczbę $0 = 0 + 0i$).

Przykład 1

Wykonać dzielenie $(1 + i) : (1 + 2i)$.

Rozwiązanie.

$$\frac{1 + i}{1 + 2i} = \frac{(1 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 + i - 2i + 2}{1 + 4} = \frac{3 - i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$$

Zasadniczym powodem wprowadzenia liczb zespolonych jest to, że umożliwiają znalezienie pierwiastków dowolnego równania wielomianowego (każdy wielomian ma przynajmniej jeden pierwiastek zespolony, nawet gdy nie ma żadnych pierwiastków rzeczywistych). Pierwszym przykładem jest wyliczenie pierwiastka kwadratowego z liczby rzeczywistej ujemnej (czyli rozwiązywanie równania wielomianowego $x^2 + c = 0$, gdzie $c > 0$):

$$\sqrt{-1} = i, \quad \sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2i, \quad \sqrt{-5} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = i\sqrt{5}$$

(powyższe wyliczenia stanowią tylko połowę prawdy, o czym mówi Fakt 5.10).

Przykład 2

Obliczyć $\sqrt{i}$.

Rozwiązanie. Niech $\sqrt{i} = a + bi$, gdzie a i b to liczby rzeczywiste. Wówczas:

$$(a + bi)^2 = i, \quad \text{czyli} \quad (a^2 - b^2) + 2abi = i$$

Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są zarówno ich części rzeczywiste, jak i urojone, czyli:

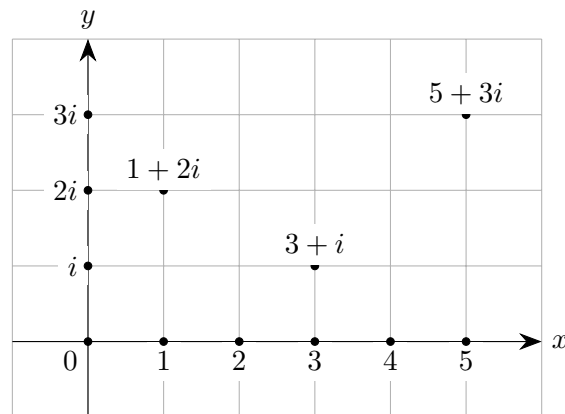
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań (w liczbach rzeczywistych) otrzymujemy $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $a = b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Stąd:

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{lub} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wyjaśnienie, dlaczego otrzymaliśmy dwa rozwiązania zawarte jest w Fakcie 5.10.

Liczby rzeczywiste przedstawiamy jako punkty na prostej (osi liczbowej). Liczby zespolone przedstawiamy jako punkty na płaszczyźnie, gdzie część rzeczywista i część urojona odpowiadają współrzędnym punktu płaszczyzny (tzn. liczba $a + bi$ odpowiada punktowi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$).



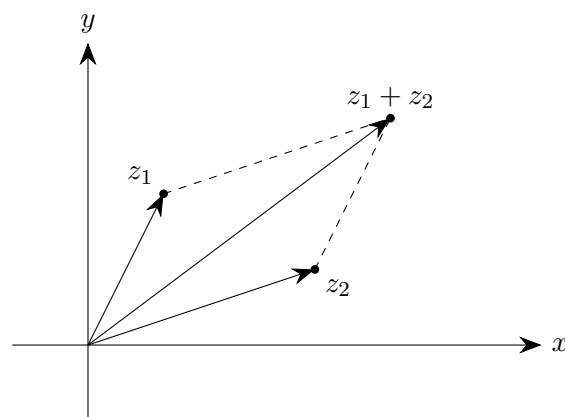
Dodawanie liczb zespolonych odbywa się jak dodawanie wektorów. Nietrudno się o tym przekonać porównując dodawanie wektorów:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

z dodawaniem liczb zespolonych:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

Wektor $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ oraz liczba zespolona $(a+c) + i(b+d)$ oznaczają ten sam punkt płaszczyzny.



Fakt 5.3: Nierówność trójkąta

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzi warunek

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Dowód. Traktując liczby zespolone jako wektory na płaszczyźnie zauważamy, że jest to inaczej zapisana nierówność trójkąta dla wektorów na płaszczyźnie (Fakt 1.21). □

Wiemy, że punkty na płaszczyźnie można opisywać podając współrzędne kartezjańskie (x i y) albo współrzędne biegunowe (promień r i kąt θ). To drugie przedstawienie jest znacznie wygodniejsze przy mnożeniu liczb zespolonych, dlatego współrzędne biegunowe dla liczb zespolonych mają swoje specjalne nazwy:

Definicja 5.4

Jeśli liczbę zespoloną $z = a + ib$ przedstawimy w postaci punktu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ na płaszczyźnie, to współrzędne biegunowe r i θ tego punktu będziemy nazywać:

- r – *modułem* liczby zespolonej z (ozn. $|z|$),
- θ – *argumentem* liczby zespolonej z (ozn. $\arg z$).

W ten sposób otrzymujemy *przedstawienie trygonometryczne* liczby zespolonej z :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (5.1)$$

Zwróćmy uwagę, że argument liczby zespolonej z (jako kąt między wektorem z a dodatnią półosią Ox) jest wyznaczony modulo 2π (tzn. dodanie całkowitej wielokrotności 2π nie zmienia $\arg z$).

Fakt 5.5

Dla dowolnej liczby zespolonej $z = a + ib$ (gdzie a i b to odpowiednio część rzeczywista i urojona) zachodzi:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg z = \arctg \frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad \arctg \frac{b}{a} + \pi$$

Ustalenie którą z dwóch wartości przyjmuje $\arg z$ wymaga ustalenia, w której ćwiartce znajduje się liczba zespolona z .

Dowód. Zgodnie z definicją, jeśli oznaczymy $|z| = r$ oraz $\arg z = \theta$, to:

$$a = r \cos \theta \quad \text{oraz} \quad b = r \sin \theta$$

Stąd

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \sqrt{r^2} = r$$

jako, że $r \geq 0$. Ponadto:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tg \theta \quad \text{czyli} \quad \theta = \arctg \frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad \arctg \frac{b}{a} + \pi$$

jako że funkcja $\tg$ ma okres π , więc znając $\tg \theta$ nie otrzymujemy pełnej informacji o kącie θ . $\square$

Przykład 3

Przedstaw w postaci trygonometrycznej liczby zespolone $z_1 = 1 + i$ oraz $1 + 2i$.

Rozwiązanie. Nietrudno obliczyć moduły obu liczb:

$$|z_1| = r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad |z_2| = r_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Ich argumenty to:

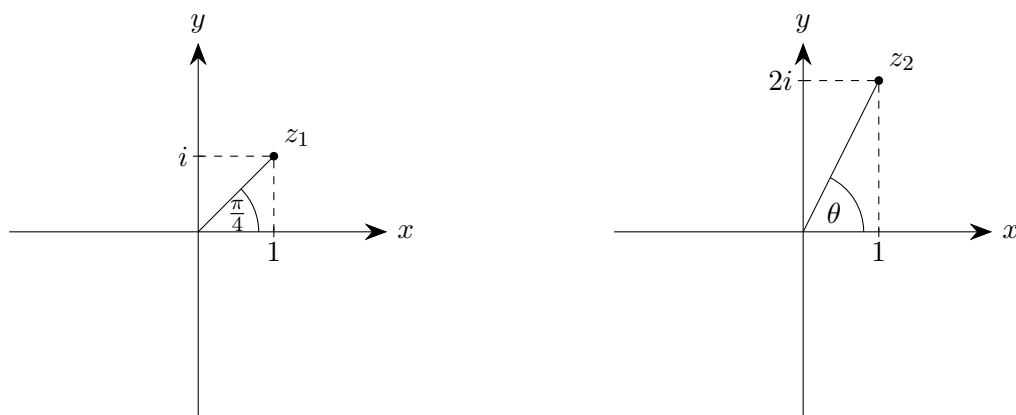
$$\arg z_1 = \arctg \frac{1}{1} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{oraz} \quad \arg z_2 = \arctg 2$$

Stąd:

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\cos \theta + i \sin \theta), \quad \text{gdzie} \quad \theta = \arctg 2$$

Wartość $\arg z_1$ można również (bez żadnych rachunków) odczytać z rysunku:



Przedstawienie trygonometryczne liczby zespolonej pozwala lepiej zrozumieć operację mnożenia liczb zespolonych:

Fakt 5.6

Dla dowolnych (niezerowych) liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzą warunki:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{oraz} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi} \quad (5.2)$$

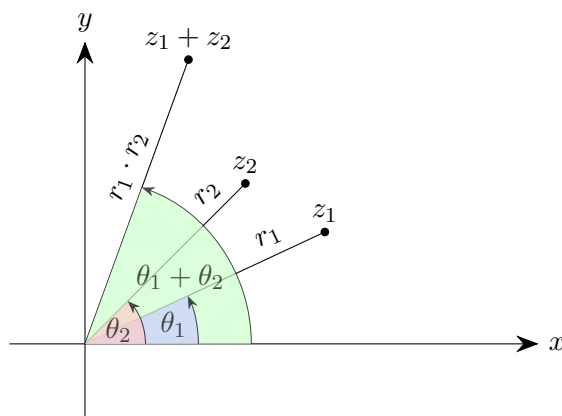
Innymi słowy:

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (5.3)$$

Dowód. Jeśli $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ oraz $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, to:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) =$$

$$r_1 r_2((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$



□

Analogiczne wzory zachodzą dla dzielenia liczb zespolonych:

Fakt 5.7

Dla dowolnych (niezerowych) liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzą warunki:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{oraz} \quad \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi} \quad (5.4)$$

Innymi słowy:

$$\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad (5.5)$$

Dowód. Z Faktu 5.6 zastosowanego dla liczb zespolonych $\frac{z_1}{z_2}$ i z_2 otrzymujemy:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2| = \left| \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \right| = |z_1|$$

$$\arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + \arg z_2 = \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \right) = \arg z_1 \pmod{2\pi}$$

co po przekształceniu daje wzory (5.4). □

Szczególным przypadkiem wzoru (5.5) (w sytuacji $z_1 = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$) jest wzór na odwrotność liczby zespolonej:

Fakt 5.8

Dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq 0$ zachodzą warunki:

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad \text{oraz} \quad \arg(z^{-1}) = -\arg z$$

Innymi słowy:

$$(r(\cos \theta + i \sin \theta))^{-1} = (r^{-1})(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = (r^{-1})(\cos \theta - i \sin \theta) \quad (5.6)$$

Wzór (5.3) w przypadku $r_1 = r_2 = r$ oraz $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ przyjmuje postać:

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \quad (5.7)$$

Indukcyjnie możemy udowodnić jego następujące uogólnienie:

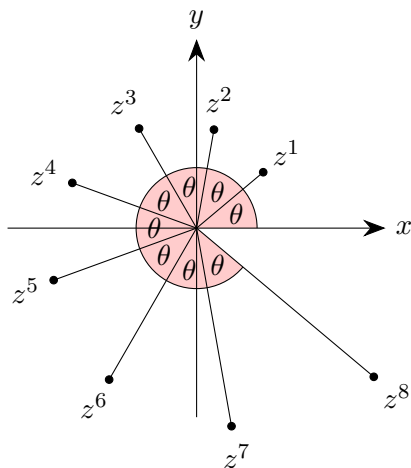
Fakt 5.9

Jeśli liczbę zespoloną z zapiszemy w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, to dla dowolnego n całkowitego zachodzi:

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (5.8)$$

W szczególności prawdziwy jest wzór (zwany *wzorem de Moivre'a*):

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$



Dowód. Przypadek $n \geq 0$ dowodzimy indukcyjnie. Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Jeśli wzór (5.8) jest prawdziwy dla $n = k$, to dla $n = k + 1$, zgodnie ze wzorem (5.3), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{k+1} &= [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^k \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta) = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r^{k+1}((\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta) + i(\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta)) \\ &= r^{k+1}(\cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta) \end{aligned}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej to dowodzi przypadku $n \geq 0$.

W przypadku $n < 0$ oznaczmy $n = -k$. Wówczas $k > 0$ i stosując udowodnioną już część faktu oraz wzór (5.6) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{-k} &= \left[(r(\cos \theta + i \sin \theta))^k \right]^{-1} = [r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)]^{-1} \\ &= r^{-k}(\cos(-k\theta) + i \sin(-k\theta)) \end{aligned}$$

□

Przykład 4

Obliczyć $(1 + i)^{100}$ oraz $(1 + 2i)^{100}$.

Rozwiązanie. Korzystając z wyznaczonych w poprzednim przykładzie postaci trygonometrycznych, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (1 + i)^{100} &= (\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}))^{100} = (\sqrt{2})^{100} \cdot (\cos \frac{100\pi}{4} + i \sin \frac{100\pi}{4}) \\ &= 2^{50} \cdot (\cos 25\pi + i \sin 25\pi) = -2^{50} \end{aligned}$$

oraz dla $\theta = \arctg 2$:

$$\begin{aligned} (1 + 2i)^{100} &= (\sqrt{5} \cdot (\cos \theta + i \sin \theta))^{100} = (\sqrt{5})^{100} (\cos(100\theta) + i \sin(100\theta)) \\ &= 5^{50} (\cos(100\theta) + i \sin(100\theta)) \end{aligned}$$

Fakt 5.9 można wykorzystać również do wyznaczenia pierwiastka n -tego stopnia. Zgodnie z definicją pierwiastkowania, $\sqrt[n]{z}$ to taka liczba zespolona w , że

$$w^n = z \tag{5.9}$$

Przedstawiając w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ oraz $w = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, warunek (5.9) można zapisać jako:

$$(s(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

czyli zgodnie ze wzorem de Moivre'a:

$$s^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Dwie liczby zespolone są równe, gdy ich moduły są równe oraz ich argumenty są równe modulo 2π , więc:

$$s^n = r \quad \text{oraz} \quad n\varphi = \theta \pmod{2\pi}$$

Stąd dostajemy moduł szukanej liczby w :

$$|w| = s = \sqrt[n]{r}$$

oraz n różnych możliwych argumentów liczby w :

$$\varphi = \frac{\theta}{n}, \quad \text{lub} \quad \varphi = \frac{\theta+2\pi}{n} \quad \text{lub} \quad \varphi = \frac{\theta+4\pi}{n} \quad \text{lub} \quad \dots \quad \text{lub} \quad \varphi = \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}$$

Oznacza to, że udowodniliśmy następujący fakt:

Fakt 5.10

(Niezerowa) liczba zespolona $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ma n różnych pierwiastków n -tego stopnia:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[n]{r} \cdot (\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n}) \\ w_1 &= \sqrt[n]{r} \cdot (\cos \frac{\theta+2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2\pi}{n}) \\ w_2 &= \sqrt[n]{r} \cdot (\cos \frac{\theta+4\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+4\pi}{n}) \\ &\dots \\ w_{n-1} &= \sqrt[n]{r} \cdot (\cos \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}) \end{aligned}$$

Niestety nie ma możliwości podania jednego pierwiastka n -tego stopnia z liczby zespolonej z – zawsze otrzymujemy n równoprawnych pierwiastków. Niejednoznaczność tę częściowo można zaobserwować już przy pierwiastkowaniu dodatnich liczb rzeczywistych, np. $\sqrt{4}$ może być równy 2 (bo $2^2 = 4$) lub -2 (bo $(-2)^2 = 4$). Wykonując pierwiastkowanie liczb rzeczywistych zawsze odrzucaliśmy jedną z możliwości (ujemną), tak, by pierwiastkowanie dawało jednoznaczny wynik. W przypadku pierwiastkowania liczb zespolonych nie da się w sensowny sposób wybrać jednej z n możliwości.

Przykład 5

Obliczyć $\sqrt{i}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $i = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$, więc $\sqrt{i}$ ma następujące dwie wartości:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ w_1 &= 1 \cdot (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

dokładnie jak w Przykładzie 2.

Przykład 6

Obliczyć $\sqrt[3]{8i}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $8i = 8 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$, więc $\sqrt[3]{8i}$ ma następujące trzy wartości:

$$w_0 = 2 \cdot (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_2 = 2 \cdot (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = 2 \cdot (-i) = -2i$$

Przykład 7

Obliczyć $\sqrt[4]{-1+i}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $-1+i = \sqrt{2} \cdot (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$, więc $\sqrt[4]{-1+i}$ ma następujące cztery wartości:

$$w_0 = \sqrt[8]{2} \cdot (\cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16})$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2} \cdot (\cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16})$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2} \cdot (\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16})$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2} \cdot (\cos \frac{27\pi}{16} + i \sin \frac{27\pi}{16})$$

Zasada mówiąca, że istnieje n różnych pierwiastków n -tego stopnia dotyczy nie tylko pierwiastkowania liczb nierzeczywistych, ale również pierwiastkowania liczb rzeczywistych – każda niezerowa liczba rzeczywista ma n różnych zespolonych pierwiastków n -tego stopnia.

Przykład 8

Wyznaczyć wszystkie pierwiastki szóstego stopnia z 1.

Rozwiązanie. Ponieważ $1 = \cos 0 + i \sin 0$, więc $\sqrt[6]{1}$ ma następujące sześć wartości:

$$w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$w_4 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_5 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

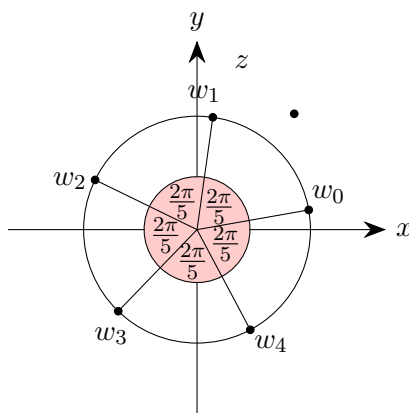
Fakt 5.11

Dla dowolnej niezerowej liczby zespolonej z pierwiastki z liczby z :

- stopnia 2 (pierwiastki kwadratowe) to dwie liczby przeciwne,
- stopnia n (gdzie $n \geq 3$) to wierzchołki pewnego n -kąta foremnego o środku w 0.

Dowód. Zauważmy, że wszystkie pierwiastki z liczby $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ mają jednakowy moduł

(równy $\sqrt[n]{r}$), zaś argumenty kolejnych pierwiastków różnią się o $\frac{2\pi}{n}$. W przypadku $n = 2$ otrzymujemy więc dwie liczby przeciwne (różnica argumentów wynosi π), zaś w przypadku $n \geq 3$ otrzymujemy punkty leżące w równych odstępach na okręgu o środku 0 i promieniu $\sqrt[n]{r}$ (na rysunku pokazano przypadek $n = 5$).



□

Alternatywnym (i często wygodniejszym od postaci trygonometrycznej) sposobem zapisu liczb zespolonych jest *postać wykładnicza*.

Definicja 5.12

Funkcję wykładniczą e^z dla argumentów zespolonych $z = x + iy$ (gdzie x i y to liczby rzeczywiste) definiujemy następująco:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (5.10)$$

W szczególności, dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (5.11)$$

Wstawiając we wzorze (5.11) $y = \pi$ otrzymujemy słynny *wzór Eulera*:

$$e^{\pi i} = -1$$

Wzory (5.3), (5.5), (5.6) i (5.8), w postaci wykładniczej przyjmują postać dobrze znanych (dla argumentów rzeczywistych) własności potęgowania:

Fakt 5.13

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 oraz dowolnej liczby całkowitej n zachodzą wzory:

$$1) \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

$$2) \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$$

$$3) \quad (e^z)^{-1} = e^{-z}$$

$$4) \quad (e^z)^n = e^{nz}$$

Dowód. Oznaczmy $z_1 = a + ib$ oraz $z_2 = c + id$. Wówczas:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{a+ib} \cdot e^{c+id} = e^a(\cos b + i \sin b) \cdot e^c(\cos d + i \sin d) = e^a \cdot e^c(\cos b + i \sin b)(\cos d + i \sin d)$$

$$= e^{a+c}(\cos(b+d) + i \sin(b+d)) = e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{z_1+z_2}$$

Pozostałe własności dowodzimy analogicznie. □

5.2 Wielomiany zespolone

Równania liniowe (jak również układy równań liniowych) w liczbach zespolonych rozwiązuje się dokładnie tak samo, jak w liczbach rzeczywistych.

Przykład 1

Znajdź wszystkie pary liczb zespolonych z i w spełniające następujący układ równań:

$$\begin{cases} (1+i)z + w = (1+2i) \\ iz + (1-i)w = (2+i) \end{cases}$$

Rozwiązanie (sposób I). Stosując metodę podstawiania otrzymujemy:

$$w = (1+2i) - (1+i)z$$

co podstawiamy do drugiego równania otrzymując:

$$iz + (1-i)((1+2i) - (1+i)z) = (2+i)$$

$$(-2+i)z + (3+i) = (2+i) \quad \text{czyli} \quad z = \frac{-1}{-2+i} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

skąd

$$w = (1+2i) - (1+i)z = (1+2i) - (1+i)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Rozwiązanie (sposób II). Stosując wzory Cramera otrzymujemy:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} = (1+i)(1-i) - 1 \cdot i = 2 - i \neq 0$$

$$D_z = \det \begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 2+i & 1-i \end{pmatrix} = (1+2i)(1-i) - 1 \cdot (2+i) = 1$$

$$D_w = \det \begin{pmatrix} 1+i & 1+2i \\ i & 2+i \end{pmatrix} = (1+i)(2+i) - i \cdot (1+2i) = 3 + 2i$$

Stąd:

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{2-i} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$w = \frac{D_w}{D} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Zasadniczym powodem wprowadzenia liczb zespolonych była potrzeba znalezienia rozwiązania równań wielomianowych, które w zbiorze liczb rzeczywistych nie miały pierwiastków. Zaczniemy od równania kwadratowego:

Fakt 5.14

Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{C}$, gdzie $a \neq 0$ równanie $az^2 + bz + c = 0$ ma dwa pierwiastki:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad (5.12)$$

W przypadku, gdy $\Delta = 0$ powyższy wzór daje jeden (podwójny) pierwiastek.

Dowód. Rozważane równanie można przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

Stąd

$$z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{czyli} \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

□

Zauważmy, że w związku z tym, że $\sqrt{\Delta}$ jest niejednoznaczny (ma dwie wartości), powstaje problem, którą z nich należy wstawić do wzoru (5.12). Ponieważ jednak zgodnie z Faktem 5.25 pierwiastki kwadratowe z Δ to liczby przeciwne, zaś we wzorze (5.12) występuje $\pm\sqrt{\Delta}$, więc wybór wartości nie ma wpływu na otrzymane pierwiastki.

Przykład 2

Rozwiązać równanie kwadratowe (w liczbach zespolonych):

$$iz^2 + (2i - 2)z - 1 = 0$$

Rozwiązanie. $\Delta = (2i - 2)^2 + 4i = -4i = 4(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$, więc $\sqrt{\Delta}$ to jedna z liczb:

$$2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$2(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Stąd:

$$z_1 = \frac{-(2i - 2) - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2i} = (-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + i(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$z_2 = \frac{-(2i - 2) + \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2i} = (-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + i(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Definicja 5.15

Wielomian $W(z)$ o współczynnikach zespolonych nazywamy *podzielnym* przez wielomian $P(z)$ (co oznaczamy $P(z)|W(z)$), jeśli istnieje taki wielomian $A(z)$ o współczynnikach zespolonych, że $W(z) = P(z) \cdot A(z)$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 5.16: Twierdzenie Bezouta

Dany jest wielomian $W(z)$ o współczynnikach zespolonych oraz liczba zespolona a . Wówczas $W(a) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(z - a) | W(z)$.

Dowód. Znany ze szkoły algorytm dzielenia wielomianów pozwala wykonać dzielenie z resztą dowolnych dwóch wielomianów o współczynnikach zespolonych, przy czym reszta z dzielenia jest wielomianem stopnia mniejszego niż dzielnik. Wykonując dzielenie wielomianów $W(z) : (z - a)$ otrzymujemy iloraz $A(z)$ i resztę $R(z)$, czyli:

$$W(z) = A(z) \cdot (z - a) + R(z)$$

Ponieważ stopień wielomianu $R(z)$ (reszty) jest mniejszy od stopnia wielomianu $z - a$ (który wynosi 1), więc wielomian $R(z) = r$ jest wielomianem stałym. Wobec tego dla dowolnej wartości z zachodzi równość:

$$W(z) = A(z) \cdot (z - a) + r$$

gdzie a i r to pewne ustalone liczby zespolone. Podstawiając $z = a$ otrzymujemy:

$$W(a) = r$$

czyli wartość wielomianu W w punkcie a jest równa reszcie z dzielenia $W(z)$ przez $(z - a)$. Stąd $W(a) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(z)$ dzieli się bez reszty przez $(z - a)$. $\square$

Wniosek 5.17

Jeśli $a_1, \dots, a_n$ są (parami różnymi) pierwiastkami wielomianu W o współczynnikach zespolonych, to:

$$W(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n) \cdot P(z)$$

dla pewnego wielomianu P .

Dowód. Prowadzimy indukcję względem n . Dla $n = 1$ jest to bezpośredni wniosek z Twierdzenia Bezouta. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla $n = k$ i rozważmy wielomian W mający pierwiastki $a_1, \dots, a_{k+1}$. Z założenia indukcyjnego:

$$W(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_k) \cdot P(z)$$

dla pewnego wielomianu P . Podstawiając $z = a_{k+1}$ i korzystając z faktu, że jest to pierwiastek wielomianu W otrzymujemy:

$$0 = W(a_{k+1}) = (a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2) \cdots (a_{k+1} - a_k) \cdot P(a_{k+1})$$

Ponieważ $a_1, \dots, a_{k+1}$ są parami różne, więc $P(a_{k+1}) = 0$, czyli zgodnie z Twierdzeniem Bezouta:

$$P(z) = (z - a_{k+1}) \cdot Q(z)$$

dla pewnego wielomianu Q . Stąd:

$$W(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_k)(z - a_{k+1}) \cdot Q(z)$$

$\square$

Powyższy wniosek stanowi motywację dla następującej definicji pierwiastka wielokrotnego:

Definicja 5.18

Niech liczba zespolona a będzie pierwiastkiem wielomianu zespolonego W . *Krotnością* pierwiastka a nazywamy taką liczbę k , że:

$$W(z) = (z - a)^k \cdot A(z) \quad (5.13)$$

gdzie a nie jest pierwiastkiem wielomianu A .

Zgodnie z Twierdzeniem Bezouta krotność każdego pierwiastka wielomianu wynosi przynajmniej 1.

Wniosek 5.19

Wielomian stopnia n o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami).

Dowód. Jeśli liczby $a_1, \dots, a_k$ są pierwiastkami wielomianu W , a ich krotności wynoszą, odpowiednio, $s_1, \dots, s_k$, to

$$W(x) = (x - a_1)^{s_1} (x - a_2)^{s_2} \cdots (x - a_k)^{s_k} \cdot A(x)$$

Porównując stopnie wielomianów po lewej i po prawej stronie równości otrzymujemy:

$$n = \deg W = s_1 + \cdots + s_k + \deg A \geq s_1 + \cdots + s_k$$

□

Poniższe twierdzenie to najważniejsze twierdzenie dotyczące liczb zespolonych (i głównym powodem zainteresowania liczbami zespolonymi). Dowód tego twierdzenia jest dość skomplikowany i wykracza poza zakres niniejszego skryptu.

Twierdzenie 5.20: Zasadnicze twierdzenie algebry

Wielomian stopnia n o współczynnikach zespolonych ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami). Innymi słowy, wielomian zespolony W można rozłożyć na iloczyn czynników liniowych, tzn.

$$W(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

gdzie $z_1, \dots, z_n$ to (niekoniecznie różne) pierwiastki wielomianu W .

W przypadku rozważania wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, ważną operacją okazuje się operacja sprzężenia liczby zespolonej:

Definicja 5.21

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + ib$ nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z} = a - ib$. Geometrycznie $\bar{z}$ to obraz z przez odbicie względem osi rzeczywistej.

Fakt 5.22

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzą następujące własności:

- 1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- 2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- 3) $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
- 4) $\overline{(z_1)^n} = \bar{z}_1^n$

Dowody tych prostych własności pozostawiamy czytelnikowi.

Fakt 5.23

Jeśli liczba zespolona $z_0 = a + bi$ jest pierwiastkiem wielomianu W o współczynnikach rzeczywistych, to liczba zespolona $\bar{z}_0 = a - bi$ też jest jego pierwiastkiem.

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, gdzie $a_0, \dots, a_n$ to liczby rzeczywiste. Zgodnie z założeniem:

$$0 = a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0$$

Sprzęgając obie strony równania i korzystając z Faktu 5.22 otrzymujemy:

$$0 = \overline{a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{a_n z_0^n} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = \overline{a_n} \cdot (\bar{z}_0)^n + \dots + \overline{a_1} \cdot \bar{z}_0 + \overline{a_0}$$

Ponieważ liczby a_i są rzeczywiste, więc $\bar{a}_i = a_i$, skąd:

$$0 = a_n (\bar{z}_0)^n + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = W(\bar{z}_0)$$

czyli $\bar{z}_0$ też jest pierwiastkiem wielomianu W . □

Wniosek 5.24

Dowolny wielomian rzeczywisty można rozłożyć na iloczyn (rzeczywistych) czynników liniowych i kwadratowych.

Dowód. Prowadzimy dowód indukcyjny ze względu na stopień wielomianu. Wielomian stopnia 1 w oczywisty sposób spełnia tezę. Załóżmy, że wszystkie wielomiany stopnia k lub mniejszego rozkładają się na iloczyn wielomianów stopnia 1 i 2. Niech W będzie wielomianem stopnia $k+1$ (o współczynnikach rzeczywistych). Zgodnie z Zasadniczym Twierdzeniem Algebry ma on pierwiastek zespolony $z = a + bi$.

Jeśli $b = 0$ (tzn. pierwiastek z jest liczbą rzeczywistą), to zgodnie z Twierdzeniem Bezouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x - a)$, czyli:

$$W(x) = (x - a) \cdot A(x)$$

gdzie A jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia k , a zatem zgodnie z założeniem indukcyjnym jest iloczynem wielomianów stopnia 1 i 2 o współczynnikach rzeczywistych. Stąd tę samą własność ma wielomian W .

Jeśli $b \neq 0$ (tzn. pierwiastek $z = a + ib$ nie jest liczbą rzeczywistą), to zgodnie z Faktem 5.23 liczba $\bar{z} = a - ib$ też jest pierwiastkiem wielomianu W . Stąd, zgodnie z Twierdzeniem Bezouta:

$$W(x) = (x - (a + ib))(x - (a - ib)) \cdot A(x)$$

gdzie A jest wielomianem o współczynnikach zespolonych (gdyż powstaje z dzielenia $W(x)$ przez wielomian o współczynnikach zespolonych). Ponieważ jednak po wymnożeniu czynników liniowych powyższa równość przyjmuje postać:

$$W(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \cdot A(x)$$

więc okazuje się, że wielomian A jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych (gdyż powstaje z dzielenia $W(x)$ przez wielomian o współczynnikach rzeczywistych). Zgodnie z założeniem indukcyjnym A jest iloczynem wielomianów stopnia 1 i 2 o współczynnikach rzeczywistych, a zatem tę samą własność ma wielomian W . $\square$

W przypadku wielomianów o współczynnikach **całkowitych** znajdowanie pierwiastków może ułatwić następujący fakt:

Fakt 5.25

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Jeśli $W\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, gdzie p i q to liczby całkowite względnie pierwsze, to:

$$q|a_n \quad \text{oraz} \quad p|a_0$$

Dowód.

$$0 = W\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0$$

więc (mnożąc stronami przez q^n):

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

Lewa strona równości jest podzielna przez p oraz wszystkie składniki po prawej stronie inne niż $a_0 q^n$ są podzielne przez p . Stąd również składnik $a_0 q^n$ dzieli się przez p , co wobec względnej pierwszości p i q daje $p|a_0$. Podobnie dowodzimy, że $q|a_n$. $\square$

Przykład 3

Rozłożyć wielomian $W(z) = z^3 - 2z^2 + 5z - 4$ na:

- 1) iloczyn wielomianów zespolonych pierwszego stopnia,
- 2) iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego lub drugiego.

Rozwiązanie. Korzystając z Faktu 5.25 wyznaczamy pierwiastek wymierny $z = 1$ (wystarczy sprawdzić liczby $\pm 4, \pm 2, \pm 1$). Wykonując dzielenie wielomianów otrzymujemy:

$$W(z) = (z - 1)(z^2 - z + 4)$$

Czynnik kwadratowy jest nierozkładalny nad liczbami rzeczywistymi, natomiast nad liczbami zespolonymi otrzymujemy rozkład:

$$W(z) = (z - 1)\left(z - \frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right)$$

Przykład 4

Rozłożyć wielomian $W(z) = z^4 + 2z^3 - 6z^2 + 10z + 25$ na

- 1) iloczyn wielomianów zespolonych pierwszego stopnia,
- 2) iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego lub drugiego.

wiedząc, że liczba $1 + 2i$ jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Rozwiązanie. Ponieważ W jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, więc zgodnie z Faktem 5.25 skoro $1 + 2i$ jest jego pierwiastkiem, to $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$ też jest jego pierwiastkiem. Wobec tego W dzieli się przez wielomian $(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i)) = z^2 - 2z + 5$. Wykonując dzielenie otrzymujemy:

$$W(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 4z + 5)$$

Żaden z czynników kwadratowych nie ma pierwiastków rzeczywistych, natomiast nad liczbami zespolonymi otrzymujemy rozkład:

$$W(z) = (z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i))(z - (-2 + i))(z - (-2 - i))$$

Przykład 5

Obliczyć $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{50}$.

Rozwiązanie. Wyliczamy wielomian charakterystyczny macierzy:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Równanie $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, ale ma pierwiastki zespolone:

$$\Delta = 4 - 8 = -4, \quad \text{więc} \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Wyliczamy wektory własne dla $\lambda_1 = 1 + i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = (1 + i)x \\ x + y = (1 + i)y \end{cases} \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} y = -ix \\ -ix = y \end{cases}$$

czyli wektory własne są postaci $\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$. Podobnie wyliczamy wektory własne $\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$ dla wartości własnej $\lambda_2 = 1 - i$. Zatem diagonalizacja macierzy wygląda następująco:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{50} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{pmatrix}^{50} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + i)^{50} & 0 \\ 0 & (1 - i)^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wykorzystując postać trygonometryczną obliczamy potęgi $(1+i)^{50}$ i $(1-i)^{50}$:

$$(1+i)^{50} = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{50} = (\sqrt{2})^{50} \left(\cos \frac{50\pi}{4} + i \sin \frac{50\pi}{4} \right) = 2^{25}i$$

$$(1-i)^{50} = \left(\sqrt{2} \left(\cos -\frac{\pi}{4} + i \sin -\frac{\pi}{4} \right) \right)^{50} = (\sqrt{2})^{50} \left(\cos -\frac{50\pi}{4} + i \sin -\frac{50\pi}{4} \right) = -2^{25}i$$

Zatem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{25}i & 0 \\ 0 & -2^{25}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2^{25} \\ 2^{25} & 0 \end{pmatrix}$$

W powyższym przykładzie nieprzypadkowo nierzeczywiste wartości własne były sprzężonymi liczbami rzeczywistymi λ i $\bar{\lambda}$, a odpowiadające im wektory własne były wektorami sprzężonymi v i $\bar{v}$ (wektorem sprzężonym do $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nazywamy wektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$), co pokazuje poniższy fakt.

Fakt 5.26

Jeśli macierz $A \in M_{2 \times 2}$ o wyrazach **rzeczywistych** ma nierzeczywistą wartość własną λ , a przynależący do niej (zespoleony) niezerowy wektor to v , to liczba $\bar{\lambda}$ również jest wartością własną, a przynależący do niej wektor to $\bar{v}$.

Dowód. Zgodnie z założeniem:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Sprzęgając obie strony równania (i korzystając z własności sprzężenia opisanych w Fakcie 5.22) otrzymujemy:

$$\bar{A} \cdot \bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}$$

gdzie sprzężenie macierzy oznacza sprzężenie wszystkich jej wyrazów. Ponieważ macierz A ma wyrazy rzeczywiste, więc $\bar{A} = A$, czyli

$$A \cdot \bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}$$

a zatem $\bar{v}$ jest niezerowym (zespoleonym) wektorem własnym macierzy A dla (zespoleonej) wartości własnej $\bar{\lambda}$. $\square$

Wniosek 5.27

Jeśli A jest macierzą 2×2 o wyrazach rzeczywistych, to zachodzi jedna z poniższych sytuacji:

- 1) A ma 2 rzeczywiste wartości własne λ_1 i λ_2 i dla każdej z nich prostą wektorów własnych,
- 2) A ma 1 (rzeczywistą) wartość własną λ i prostą wektorów własnych,
- 3) A ma 1 (rzeczywistą) wartość własną λ i płaszczyznę wektorów własnych,
- 4) A ma 2 nierzeczywiste wartości własne λ i $\bar{\lambda}$.

W przypadkach (1), (3) i (4) macierz A jest diagonalizowalna (w sytuacji (4) przy użyciu liczb zespolonych). W przypadku (2) macierz A nie jest diagonalizowalna.

Dowód. Zgodnie z Wnioskiem 3.8 jeśli nie zachodzi żaden z przypadków (1)–(3), to macierz A nie ma rzeczywistych wartości własnych. Zgodnie z Zasadniczym Twierdzeniem Algebry wielomian

charakterystyczny χ_A (jak każdy wielomian) ma przynajmniej jeden pierwiastek zespolony λ . Ponieważ współczynniki wielomianu χ_A są rzeczywiste, więc zgodnie z Faktem 5.26 wielomian ten ma również pierwiastek zespolony $\bar{\lambda}$, czyli zachodzi przypadek (4).

Macierz A diagonalizuje się, jeśli ma dwa niewspółliniowe wektory własne (dla różnych wartości własnych lub, jeśli wartość własna jest tylko jedna, dla tej samej wartości własnej). Takie wektory istnieją w przypadkach (1), (3) i (4), natomiast nie istnieją w przypadku (2). $\square$

Rozdział 6

Wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

6.1 Wektory, proste i płaszczyzny

Definicja 6.1

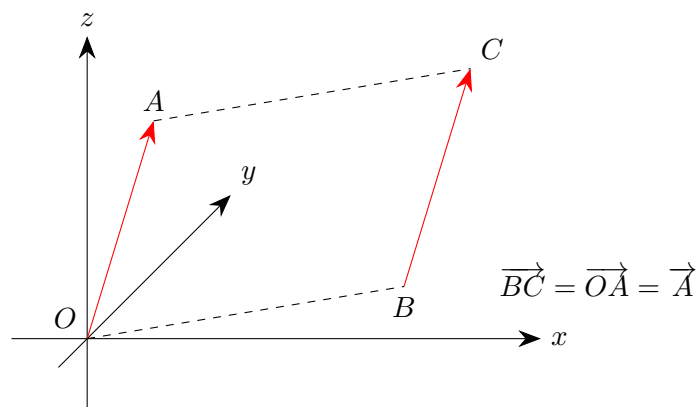
Parę uporządkowaną punktów przestrzeni trójwymiarowej (A, B) nazywamy *wektorem w $\mathbb{R}^3$ o początku A i końcu B* i oznaczamy $\overrightarrow{AB}$. Długością wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy długość odcinka AB , a jego kierunkiem – prostą AB (przy czym przyjmujemy, że proste równoległe wyznaczają ten sam kierunek). Wektor o ustalonej długości i kierunku może mieć dwa różne *zwroty*. Dwa wektory są równe, jeśli mają jednakowe długości, kierunki i zwroty¹.

Szczególnym przypadkiem jest wektor zerowy, tzn. wektor, którego koniec i początek są jednakowe. Wektor taki nie ma określonego kierunku, ani zwrotu, a jego długość to 0. Jest tylko jeden wektor zerowy.

Fakt 6.2

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, czyli jeden z tych wektorów powstaje przez przesunięcie równoległe drugiego.

W szczególności każdy wektor można przesunąć równoległe tak, by jego początkiem był punkt $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Taki wektor $\overrightarrow{OA}$ będziemy w skrócie oznaczać $\vec{A}$ lub A (podobnie jak na płaszczyźnie, początek układu współrzędnych będziemy uznawać za „domyślny” początek wektora oraz utożsamiać punkty $\mathbb{R}^3$ z wektorami w $\mathbb{R}^3$ o początku O).

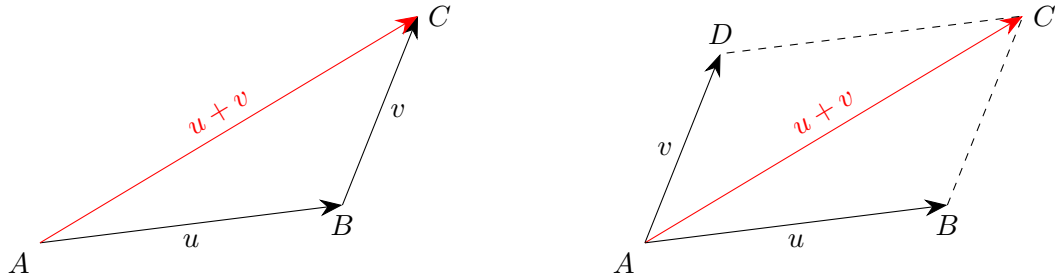


¹Powyższą definicję można precyzyjniej sformułować przy użyciu pojęć: relacja równoważności i klasa abstrakcji (poznawanych w ramach Wstępu do matematyki). *Kierunek* prostej to klasa abstrakcji relacji równoległości prostych (która to relacja jest relacją równoważności). *Wektor* to klasa abstrakcji opisanej w definicji relacji równoważności uporządkowanych par punktów.

Na zbiorze wektorów w $\mathbb{R}^3$ wprowadzamy, analogicznie jak na płaszczyźnie, działania dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez skalar.

Definicja 6.3

Suma wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{AC}$ (*reguła przykładania*). Sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ nazywamy przekątną $\overrightarrow{AC}$ równoległoboku $ABCD$ (*reguła równoległoboku*). Aby wyznaczyć sumę wektorów w pozostałych przypadkach należy te wektory przesunąć równolegle tak, by móc zastosować jedną z powyższych reguł dodawania.



Komentarz przy Definicji 1.3 mówiący, że wynik dodawania dwóch wektorów nie zależy od zastosowanej reguły dodawania pozostaje prawdziwy dla wektorów w $\mathbb{R}^3$ (jego uzasadnienie pozostaje bez zmian).

Definicja 6.4

Niech t będzie liczbą rzeczywistą, zaś u wektorem w $\mathbb{R}^3$. Wówczas $t \cdot u$ jest wektorem o długości $|t| \cdot |u|$, o kierunku wyznaczonym przez wektor u i o zwrocie zgodnym z u , gdy $t > 0$ lub przeciwnym do u , gdy $t < 0$. Jeśli $t = 0$, to $0 \cdot u = 0$. Wektor $(-1) \cdot u = u$ nazywamy *wektorem przeciwnym* do u i oznaczamy $-u$.

Definicja 6.5

Jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ są punktami płaszczyzny, to współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy (uporządkowaną) trójkę liczb:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$

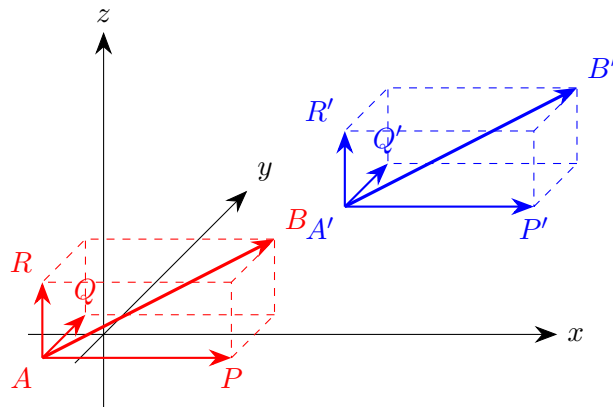
Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ interpretujemy jako przesunięcia w kierunkach osi x, y, z potrzebne dla przemieszczenia z punktu A do punktu B . Wartość bezwzględna współrzędnej podaje długość przesunięcia, natomiast znak współrzędnej rozróżnia pomiędzy przesunięciem w kierunku dodatnim a ujemnym (kierunek dodatni wyznaczają strzałki na osiach współrzędnych). Wektor zerowy ma współrzędne $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ponieważ wektor nie ma ustalonego początku ani końca (dwa wektory są równe, jeśli jeden z nich jest przesunięciem równoległym drugiego), więc aby powyższa definicja współrzędnych wektora miała sens, równe wektory powinny mieć jednakowe współrzędne. Stąd potrzeba udowodnienia następującego faktu:

Fakt 6.6

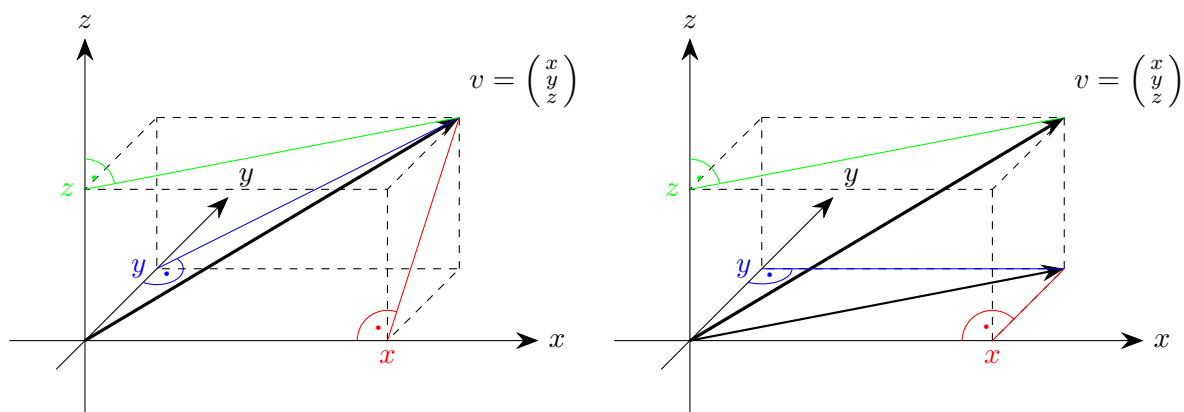
Dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne.

Dowód. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ oraz $A' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix}$. Na poniższym rysunku widać, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{A'P'}$ oraz $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{A'Q'}$ oraz $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{A'R'}$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 - x_0 = x'_1 - x'_0$ oraz $y_1 - y_0 = y'_1 - y'_0$ oraz $z_1 - z_0 = z'_1 - z'_0$, tzn. wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ mają równe współrzędne.



□

Współrzędne wektora v (o domyślnym początku O) są wyznaczone przez rzuty (prostokątne) punktu v na osie układu współrzędnych (pierwszy rysunek). Współrzędne v można też interpretować następująco: pierwsze dwie współrzędne to współrzędne rzutu (prostokątnego) punktu v na płaszczyznę Oxy , a trzecia współrzędna jest wyznaczona przez rzut punktu v na oś Oz (drugi rysunek).



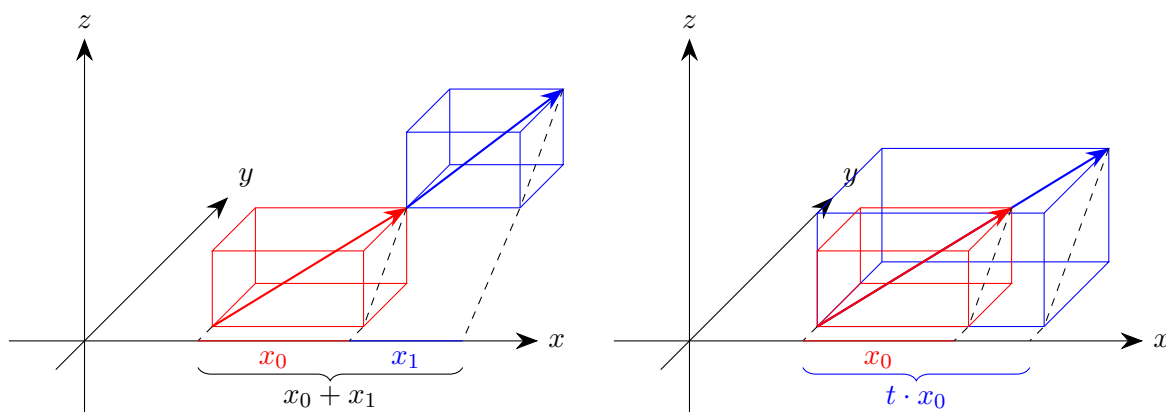
Fakt 6.7

Dodawanie wektorów oraz mnożenie wektorów przez skalar wyraża się we współrzędnych następująco:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ y_0 + y_1 \\ z_0 + z_1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_0 \\ t \cdot y_0 \\ t \cdot z_0 \end{pmatrix}$$

Dowód. Poniższy rysunek pokazuje uzasadnienie dla pierwszej współrzędnej (w sytuacji gdy $x_0, x_1 > 0$). Rozpatrzenie pozostałych przypadków pozostawiamy czytelnikowi.



□

Fakt 6.8

Dla dowolnego wektora $\overrightarrow{AB}$ zachodzi: $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Dowód. Zgodnie z regułą dodawania wektorów $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$. Pamiętając, że $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest domyślnym początkiem każdego wektora otrzymujemy:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -A + B = B - A$$

□

Prawa działań na wektorach w $\mathbb{R}^3$ są analogiczne do praw działań na wektorach na płaszczyźnie, a ich dowody są podobne do dowodu Faktu 1.12:

Fakt 6.9

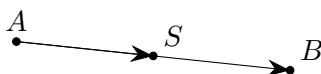
Dla dowolnych wektorów u, v, w oraz dowolnych skalarów s, t zachodzą następujące własności:

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1) $u + v = v + u$ | (przemienność +) |
| 2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ | (łączność +) |
| 3) $0 + u = u + 0 = u$ | (element neutralny +) |
| 4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ | (element przeciwny) |
| 5) $(s + t) \cdot u = s \cdot u + t \cdot u$ | (rozdzielność $\cdot$ względem +) |
| 6) $t \cdot (u + v) = t \cdot u + t \cdot v$ | (rozdzielność $\cdot$ względem +) |
| 7) $s \cdot (t \cdot v) = (s \cdot t) \cdot v$ | (łączność mnożenia skalarów) |
| 8) $1 \cdot u = u$ | |

Przykład 1

Wyznaczyć współrzędne środka odcinka AB , jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, czyli $S - A = \frac{1}{2}(B - A)$



Stąd dostajemy:

$$S = A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} \frac{x_0+x_1}{2} \\ \frac{y_0+y_1}{2} \\ \frac{z_0+z_1}{2} \end{pmatrix}$$

Fakt 6.10

Długość wektora $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ wynosi

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Odległość punktów $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ wynosi

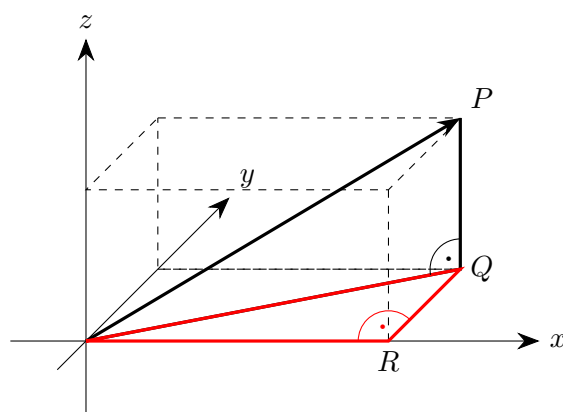
$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

Dowód. Oznaczmy $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Na mocy (dwukrotnie zastosowanego) Twierdzenia Pitagorasa:

$$|OP|^2 = |OQ|^2 + |PQ|^2 = (|OR|^2 + |RQ|^2) + |PQ|^2$$

stąd:

$$|P| = \sqrt{|OR|^2 + |RQ|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



W takim razie odległość punktów A i B wynosi:

$$|\vec{AB}| = |B - A| = \left| \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

□

Wniosek 6.11

Równanie sfery o środku w punkcie $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ i promieniu r ma postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Dowód. Sfera o środku $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ i promieniu r to zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ odległych o r od punktu $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, czyli spełniających warunek

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = r$$

Ponieważ obie strony równania są dodatnie, więc podnosząc równanie stronami do kwadratu otrzymujemy równoważną postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

□

Fakt 6.12: Nierówność trójkąta

Dla dowolnych wektorów u, v spełniony jest następujący warunek:

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są współliniowe i mają zgodne zwroty.

Dowód. Dowód Faktu 1.21 można w niezmiennionej postaci zastosować do wektorów w $\mathbb{R}^3$. $\square$

Definicja 6.13

Wektory u i v nazywamy *współliniowymi* (*równoległymi*) jeśli leżą na jednej prostej przechodzącej przez 0.

Wektory u, v i w nazywamy *współpłaszczyznowymi*, jeśli leżą na jednej płaszczyźnie przechodzącej przez 0.

Parę niewspółliniowych wektorów u, v lub trójkę niewspółpłaszczyznowych wektorów u, v, w nazywamy *wektorami liniowo niezależnymi*.

Definicja 6.14

Kombinacją liniową wektorów u i v nazywamy każdy wektor postaci $\alpha u + \beta v$ gdzie α i β są dowolnymi skalarami (nazywanymi *współczynnikami* tej kombinacji liniowej).

Kombinacją liniową wektorów u, v, w nazywamy każdy wektor postaci $\alpha u + \beta v + \gamma w$ gdzie α, β, γ są dowolnymi skalarami (nazywanymi *współczynnikami* tej kombinacji liniowej).

Definicja 6.15

Wersorami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy wektory $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fakt 6.16

Każdy wektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić jako kombinację liniową wersorów, przy czym współczynnikami tej kombinacji są współrzędne wektora:

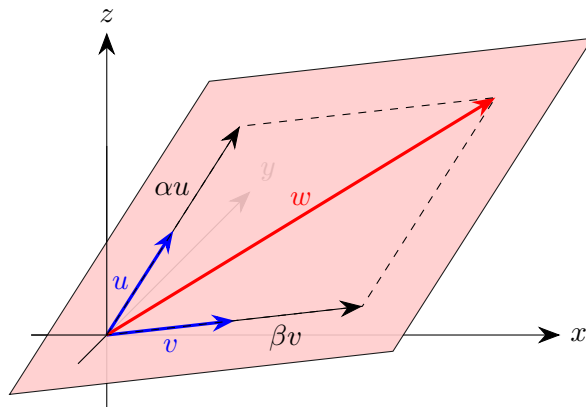
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$$

Fakt 6.17

- 1) Wektory u i v w $\mathbb{R}^3$ są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista t , że $u = tv$ lub $v = tu$.
- 2) Wektory u, v, w w $\mathbb{R}^3$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową dwóch pozostałych.

Dowód. (1) Jeśli oba wektory u i v są niezerowe, to $u = tv$ oraz $v = \frac{1}{t}u$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli $u = 0$, to $u = 0 \cdot v$ (i analogicznie $v = 0 \cdot u$ w sytuacji, gdy $v = 0$).

(2) Załóżmy, że wektory u i v nie są współliniowe. Wektor w leży na płaszczyźnie rozpiętej przez u i v wtedy i tylko wtedy, gdy $w = \alpha u + \beta v$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, co pokazuje poniższy rysunek:



Jeśli natomiast u i v są współliniowe, to $u = tv + 0w$ lub $v = tu + 0w$, a równocześnie wektory u, v, w leżą na jednej płaszczyźnie. $\square$

Wniosek 6.18

Dana jest płaszczyzna π w $\mathbb{R}^3$ przechodząca przez punkt P i dwa niewspółliniowe wektory u i v równoległe do π . Wówczas każdy punkt X płaszczyzny π jest postaci:

$$X = P + su + tv \quad (6.1)$$

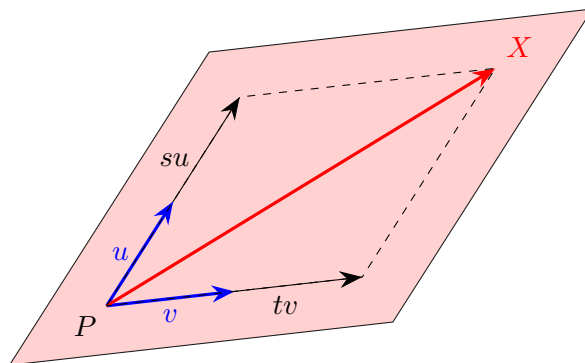
dla pewnych skalarów s i t . Wzór (6.1) to *równanie parametryczne płaszczyzny*.

Dowód. Niech X będzie dowolnym punktem płaszczyzny przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektorów u i v . Zgodnie z Faktem 6.17 wektor $\overrightarrow{PX}$ jest kombinacją liniową wektorów u i v , czyli dla pewnych skalarów s i t zachodzi:

$$X - P = \overrightarrow{PX} = su + tv$$

skąd

$$X = P + su + tv$$



$\square$

Przyjmując $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ możemy równanie parametryczne płaszczyzny potraktować jako układ 3 równań z 5 niewiadomymi (x, y, z, s, t) . Eliminując

(przy pomocy metody podstawiania) niewiadome s i t otrzymamy jedno równanie z trzema niewiadomymi, zwane równaniem ogólnym płaszczyzny, czyli:

Fakt 6.19

Zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ spełniających dla pewnych ustalonych liczb rzeczywistych A, B, C, D (gdzie przynajmniej jedna z liczb A, B, C jest niezerowa) równanie:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

jest płaszczyzną. Równanie to nazywamy *równaniem ogólnym płaszczyzny*.

Tym razem zamiast dowodu ogólnego przypadku, pokażemy przykład zastosowania opisanej powyżej metody zamiany postaci parametrycznej równania płaszczyzny na postać ogólną. Formalny dowód powyższego faktu przeprowadzony zostanie w Fakcie ?? (i będzie wykorzystywał iloczyn skalarny wektorów w $\mathbb{R}^3$).

Przykład 2

Dana jest płaszczyzna o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wyznacz równanie ogólne tej płaszczyzny.

Rozwiązanie. Zapisujemy równanie parametryczne w postaci układu 3 równań liniowych z 5 niewiadomymi (x, y, z, s, t) :

$$\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s + t \\ z = 1 + s \end{cases}$$

i przy pomocy metody podstawiania eliminujemy niewiadome s i t :

$$s = z - 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + (z - 1) + 2t \\ y = 2 + (z - 1) + t \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} x = z + 2t \\ t = y - z - 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x = z + 2(y - z - 1)$$

skąd otrzymujemy równanie ogólne płaszczyzny:

$$x - 2y + z + 2 = 0$$

Przykład 3

Dana jest płaszczyzna o równaniu ogólnym $2x + 3y - 4z - 1 = 0$. Wyznacz równanie parametryczne tej płaszczyzny.

Rozwiązanie. Potrzebujemy trzech (niewspółliniowych) punktów P, A, B tej płaszczyzny. Wówczas przyjmując $u = \overrightarrow{PA}$ i $v = \overrightarrow{PB}$ otrzymamy równanie parametryczne. Możemy przyjąć np. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wówczas $u = \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v = \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, skąd otrzymujemy parametryczne równanie płaszczyzny:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Fakt, że wybrane punkty P , A i B nie są współliniowe rozpoznajemy po tym, że wektory $\overrightarrow{PA}$ i $\overrightarrow{PB}$ nie są współliniowe.

Przykład 4

Opisz płaszczyznę przechodzącą przez punkty $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ przy pomocy:

- (a) równania parametrycznego,
- (b) równania ogólnego.

Rozwiązanie. (a) Szukana płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i jest równoległa do wektorów $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oraz $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, więc ma równanie parametryczne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Szukamy płaszczyzny o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ przechodzącej przez punkty P , Q , R , musimy zatem rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} A + 2B + D = 0 \\ A + B - C + D = 0 \\ 3A + B + 4C + D = 0 \end{cases}$$

Stąd (metodą podstawiania) otrzymujemy:

$$\begin{cases} A = -\frac{5}{9}D \\ B = -\frac{2}{9}D \\ C = \frac{2}{9}D \end{cases}$$

Równanie płaszczyzny jest niejednoznaczne (można je mnożyć stronami przez dowolną liczbę), więc możemy przyjąć np. $D = -9$, otrzymując równanie $5x + 2y - 2z - 9 = 0$.

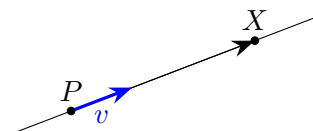
Fakt 6.20

Dana jest prosta w $\mathbb{R}^3$ przechodząca przez punkt P i równoległa do wektora v . Wówczas każdy punkt X tej prostej jest postaci:

$$X = P + tv$$

dla pewnego skalaru t . Postać tę nazywamy *równaniem parametrycznym* prostej, a wektor v – *wektorem kierunkowym* prostej.

Dowód. Niech X będzie dowolnym punktem prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektora v .



Wówczas wektory $\overrightarrow{PX}$ i v są współliniowe, czyli dla pewnego skalaru t zachodzi:

$$X - P = \overrightarrow{PX} = tv$$

skąd

$$X = P + tv$$

□

Przyjmując $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ możemy równanie parametryczne prostej potraktować jako układ 3 równań z 4 niewiadomymi (x, y, z, t) . Eliminując (przy pomocy metody podstawiania) niewiadomą t otrzymamy dwa równania z trzema niewiadomymi, czyli postać krawędziową prostej w $\mathbb{R}^3$.

Fakt 6.21

Prostą w $\mathbb{R}^3$ można przedstawić w postaci zbioru punktów spełniających układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Jeśli prosta przechodzi przez punkt $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ i ma wektor kierunkowy $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ taki, że $a, b, c \neq 0$, to powyższy układ równań można zapisać w postaci:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (6.3)$$

Przedstawienia (6.2) i (6.3) nazywamy *postaciami krawędziowymi* prostej.

Dowód. Prostą w $\mathbb{R}^3$ można przedstawić jako część wspólną dwóch przecinających się płaszczyzn, co daje przedstawienie w postaci (6.2).

Szczególną postać (6.3) postaci krawędziowej można otrzymać przekształcając równanie parametryczne prostej:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

do postaci:

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

skąd otrzymujemy (6.3).

□

Przykład 5

Znajdź przedstawienie parametryczne oraz krawędziowe wspólnej prostej płaszczyzn o równaniach $2x + 3y - z - 1 = 0$ i $x + y - 2z + 4 = 0$.

Rozwiązanie. Przedstawienie krawędziowe w postaci (6.3) to:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań metodą podstawiania (podstawiając $z = 2x + 3y - 1$) otrzymujemy

$$-3x - 3y + 6 = 0 \quad \text{czyli} \quad y = -x + 2$$

a zatem rozwiązanie jest postaci:

$$\begin{cases} x = x \\ y = -x + 2 \\ z = -x + 5 \end{cases}$$

co daje równanie parametryczne wspólnej prostej obu płaszczyzn:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

oraz postać krawędziową (6.3):

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{-1}$$

Przykład 6

Napisz równanie parametryczne i postać krawędziową prostej przechodzącej przez punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ i równoległej do wektora $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Równanie parametryczne prostej to:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a postać krawędziowa to:

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{-3}$$

Przykład 7

Wyznacz punkt przecięcia prostej o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i płaszczyzny o równaniu ogólnym $2x + 3y - z - 2 = 0$.

Rozwiązanie. Rozwiązujemy układ 4 równań z 4 niewiadomymi:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \\ 2x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

otrzymując jedyne rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

czyli punkt przecięcia to $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Przykład 8

Wyznacz punkt przecięcia prostej o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i płaszczyzny o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Rozwiązujemy układ 6 równań z 6 niewiadomymi. Zwracamy uwagę, że w tym celu musimy zmienić nazwę parametru z równania parametrycznego prostej dla uniknięcia kolizji oznaczeń:

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 1 + 2t' \\ x = 1 + s \\ y = -s + 3t \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = 9 \\ t' = 4 \\ s = 4 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

czyli punkt przecięcia to $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Przykład 9

Wyznacz punkt przecięcia prostej o postaci krawędziowej $\frac{x-2}{2} = y-1 = z+2$ i płaszczyzny o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Rozwiązujemy układ 5 równań z 5 niewiadomymi:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) = y-1 \\ y-1 = z+2 \\ x = 1 + 3s + 2t \\ y = 2 - s + 6t \\ z = -1 + 2s - 3t \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ s = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

czyli punkt przecięcia to $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Przykład 10

Ustal czy proste o równaniach parametrycznych $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ przecinają się.

Rozwiązanie. Musimy ustalić, czy poniższy układ 6 równań z 5 niewiadomymi ma rozwiązanie. Zwracamy uwagę, że dla uniknięcia kolizji oznaczeń musimy zmienić nazwę parametru w jednym z równań prostych:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \\ x = 3 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązując (metodą podstawiania) powyższy układ równań dochodzimy do sprzeczności, a zatem podane proste nie przecinają się.

Przykład 11

Ustal czy proste o przedstawieniach krawędziowych $x - 4 = y + 3 = \frac{z}{4}$ i $\frac{x+7}{6} = y + 4 = \frac{z+2}{3}$ przecinają się.

Rozwiązanie. Musimy ustalić, czy poniższy układ 4 równań z 3 niewiadomymi ma rozwiązanie.

$$\begin{cases} x - 4 = y + 3 \\ y + 3 = \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{6}(x + 7) = y + 4 \\ y + 4 = \frac{z + 2}{3} \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

czyli proste przecinają się w punkcie $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6.2 Iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy

Definicja 6.22

Iloczynem skalarnym wektorów u i v w $\mathbb{R}^3$ nazywamy liczbę:

$$u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v)$$

gdzie $\angle(u, v)$ oznacza miarę mniejszego z kątów utworzonych przez wektory u i v .

Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy (znany z poprzednich rozdziałów) wzór na kąt między dwoma wektorami:

Fakt 6.23

Jeśli φ jest kątem między niezerowymi wektorami $u, v \in \mathbb{R}^3$, to:

$$\cos \varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$$

W szczególności iloczyn skalarny $u \circ v$ jest dodatni, gdy kąt między u i v jest ostry, równy 0, gdy kąt jest prosty i ujemny, gdy kąt jest rozwarty.

Ponieważ $\cos \theta \in [-1, 1]$, więc jako kolejny wniosek z definicji otrzymujemy (również znaną z poprzednich rozdziałów) nierówność Schwarza:

Fakt 6.24: Nierówność Schwarza

Dla dowolnych wektorów $u, v \in \mathbb{R}^3$ zachodzi nierówność:

$$|u \circ v| \leq |u| \cdot |v|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są współliniowe.

Podobnie jak dla iloczynu skalarnego na płaszczyźnie, również iloczyn skalarny wektorów w $\mathbb{R}^3$ ma charakteryzację algebraiczną (analogiczną do Faktu 1.28). Tym razem dowód tej charakteryzacji jest trudniejszy i wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Fakt 6.25

Iloczynem skalarnym wektorów $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ jest liczba:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Podstawowe własności iloczynu skalarnego wektorów w $\mathbb{R}^3$ są takie jak dla iloczynu skalarnego na płaszczyźnie. Również poniższy dowód jest powtórzeniem dowodu Faktu 1.30.

Fakt 6.26

Dla dowolnych wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ oraz dowolnego skalaru t zachodzi:

- 1) $u \circ v = v \circ u$ (przemienność $\circ$)
- 2) $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$ (rozdzielność $\circ$ względem $+$)
 $(v + w) \circ u = v \circ u + w \circ u$
- 3) $(tu) \circ v = t(u \circ v)$ (łączność)
- 4) $u \circ u = |u|^2$
- 5) $u \circ v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \perp v$

Dowód. Bezpośrednio z Definicji 6.22 wynika (1). Własności (4) i (5) to dwa szczególne przypadki Definicji 6.22 (gdy $\theta = 0$ oraz gdy $\theta = \frac{\pi}{2}$). Podobnie jak na płaszczyźnie, przyjmujemy, że wektor zerowy jest prostopadły do każdego innego wektora.

Dla dowodu własności (2) i (3) skorzystamy z algebraicznej charakteryzacji iloczynu skalarnego (Fakt 6.25). Przyjmując $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ dostajemy:

$$\begin{aligned} u \circ (v + w) &= x_1 \cdot (x_2 + x_3) + y_1 \cdot (y_2 + y_3) + z_1 \cdot (z_2 + z_3) \\ &= (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3) = u \circ v + u \circ w \end{aligned}$$

Druga równość z punktu (2) wynika z przemienności iloczynu skalarnego (własność (1)). Własność (3) dowodzimy podobnie:

$$(tu) \circ v = (tx_1) \cdot x_2 + (ty_1) \cdot y_2 + (tz_1) \cdot z_2 = t \cdot (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2) = t \cdot (u \circ v)$$

□

Fakt 6.27

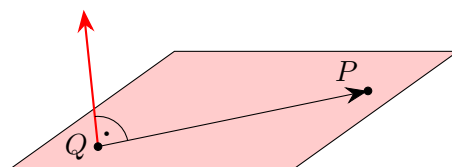
Jeśli przynajmniej jedna z liczb A, B, C jest niezerowa, to zbiór punktów spełniających równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (6.4)$$

jest płaszczyzną, a wektor $n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ jest wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny (nazywamy go *wektorem normalnym* tej płaszczyzny).

Dowód. Niech $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ będzie dowolnym punktem spełniającym równanie (6.4), tzn.

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad \text{czyli} \quad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$



Wówczas dla dowolnego punktu $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zachodzi:

$$\overrightarrow{QP} \circ n = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = Ax + By + Cz + D$$

czyli zbiór punktów $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ takich, że wektor $\overrightarrow{QP}$ jest prostopadły do wektora n jest opisywany równaniem:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

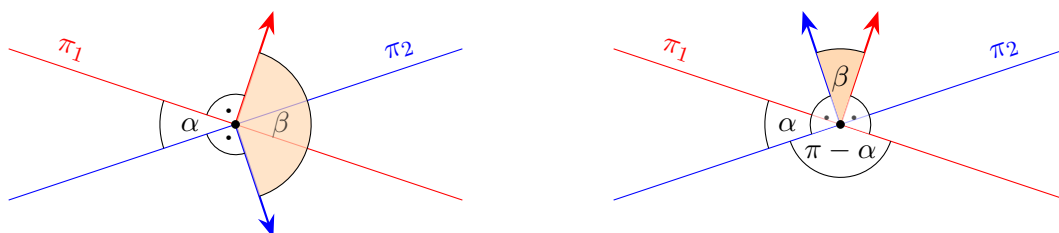
□

Fakt 6.28

Jeśli płaszczyzny π_1 i π_2 przecinają się, to tworzą dwie pary równych kątów dwuściennych o miarach α i $\pi - \alpha$. Wówczas kąt między wektorami normalnymi tych płaszczyzn wynosi α lub $\pi - \alpha$. W szczególności:

- płaszczyzny są równoległe $\iff$ ich wektory normalne są równoległe,
- płaszczyzny są prostopadłe $\iff$ ich wektory normalne są prostopadłe.

Dowód. Poniższy rysunek przedstawia przekrój przecinających się płaszczyzn płaszczyzną prostopadłą do wspólnej prostej.



Jak widać, jeśli mniejszy z kątów między płaszczyznami ma miarę α , to kąt β między ich wektorami normalnymi, w zależności od wzajemnego położenia tych wektorów, ma miarę

$$\beta = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha \quad \text{lub} \quad \beta = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \alpha$$

W szczególności:

- wektory normalne są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = 0$ lub $\beta = \pi$, a zatem $\alpha = 0$ lub $\alpha = \pi$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzny są równoległe;
- wektory normalne są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = \frac{\pi}{2}$, czyli $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tzn. płaszczyzny są prostopadłe.

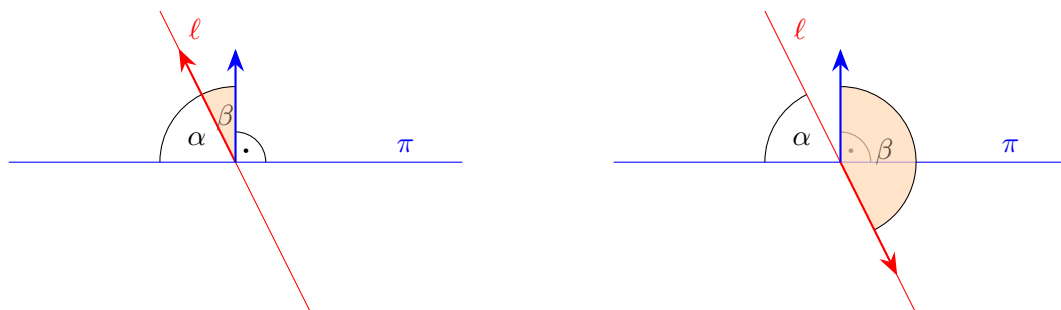
□

Fakt 6.29

Jeśli prosta ℓ przecina płaszczyznę π pod kątem ostrym α , to miara kąta między wektorem normalnym płaszczyzny π a wektorem kierunkowym prostej ℓ wynosi $\frac{\pi}{2} - \alpha$ lub $\frac{\pi}{2} + \alpha$. W szczególności:

- prosta ℓ jest równoległa do płaszczyzny $\pi \iff$ wektory kierunkowy prostej ℓ jest prostopadły do wektora normalnego płaszczyzny π ,
- prosta ℓ jest prostopadła do płaszczyzny $\pi \iff$ wektory kierunkowy prostej ℓ jest równoległy do wektora normalnego płaszczyzny π ,

Dowód. Poniższy rysunek przekrój płaszczyzny π płaszczyzną zawierającą prostą ℓ i prostopadłą do płaszczyzny π .



Jak widać, jeśli mniejszy z kątów między prostą ℓ a płaszczyzną π ma miarę α , to kąt β między wektorem kierunkowym prostej ℓ a wektorem normalnym płaszczyzny π , w zależności od wzajemnego położenia tych wektorów, ma miarę

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{lub} \quad \beta = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

W szczególności:

- prosta ℓ jest równoległa do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = 0$ lub $\beta = \pi$, a zatem $\alpha = \frac{\pi}{2}$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy wektor kierunkowy prostej ℓ jest prostopadły do wektora normalnego płaszczyzny π ;
- prosta ℓ jest prostopadła do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = \frac{\pi}{2}$, a zatem $\alpha = 0$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy wektor kierunkowy prostej ℓ jest równoległy do wektora normalnego płaszczyzny π .

□

Przykład 1

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i równoległej do płaszczyzny o równaniu $3x - 5y + 2z + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Płaszczyzny równoległe mają równoległe wektory normalne, szukana płaszczyzna ma więc równanie $3x - 5y + 2z + D = 0$. Podstawiając punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wyliczamy $D = -1$.

Przykład 2

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i prostopadłej do prostej o równaniu parametrycznym $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Płaszczyzna jest prostopadła do prostej, jeśli wektor kierunkowy prostej jest wektorem normalnym płaszczyzny. Stąd szukana płaszczyzna ma równanie $x + 6y + 2z + D = 0$. Podstawiając punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ wyliczamy $D = -13$.

Przykład 3

Wyznacz miarę kąta ostrego między płaszczyznami o równaniach $2x + 3y + z + 1 = 0$ i $3x + 4y - 5z + 2 = 0$.

Rozwiązanie. Płaszczyzny tworzą kąty o miarach α i $\pi - \alpha$ (jeden z nich jest ostry, a drugi rozwarty), gdzie α to miara kąta między ich wektorami normalnymi. Zatem:

$$\alpha = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} = \arccos \frac{13\sqrt{7}}{70}$$

Ponieważ $\cos \alpha > 0$, więc α jest szukany kąt ostry.

Przykład 4

Wyznacz miarę kąta między płaszczyzną o równaniu $3x + y - 2z + 4 = 0$ a prostą o równaniu parametrycznym $X = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Kąt β między wektorem normalnym płaszczyzny a wektorem kierunkowym prostej to:

$$\cos \beta = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{6}}{21}$$

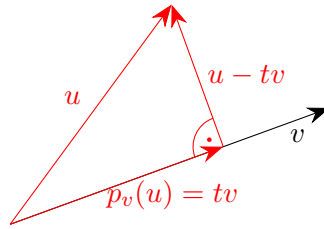
Ponieważ $\cos \beta > 0$, więc kąt β jest kątem ostrym, a zatem kąt między prostą a płaszczyzną to kąt $\frac{\pi}{2} - \beta$.

Fakt 6.30

Rzut prostopadły wektora u na wektor v jest wektorem

$$p_v(u) = \frac{u \circ v}{v \circ v} \cdot v = \frac{u \circ v}{|v|^2} \cdot v$$

Dowód. Rzut na wektor v jest wektorem postaci $p_v(u) = t \cdot v$, dla pewnego skalaru t .



Ponieważ $u - tv \perp v$, więc:

$$0 = (u - tv) \circ v = (u \circ v) - t(v \circ v) \quad \text{skąd} \quad t = \frac{u \circ v}{v \circ v}$$

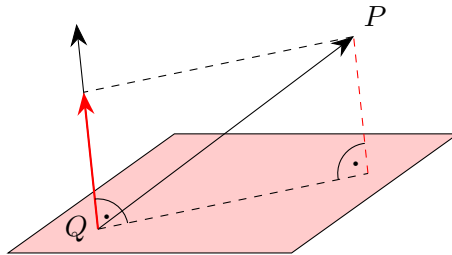
□

Fakt 6.31

Odległość punktu $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ od płaszczyzny π o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Dowód. Weźmy dowolny punkt $Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ na płaszczyźnie π . Odległość punktu P od płaszczyzny π to długość rzutu wektora $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix}$ na wektor normalny $n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$:



$$\begin{aligned} d &= |p_n(\overrightarrow{QP})| = \left| \frac{\overrightarrow{QP} \circ n}{n \circ n} \cdot n \right| = \left| \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{A^2 + B^2 + C^2} \right| \cdot |n| \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|(Ax_0 + By_0 + Cz_0) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Punkt $Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ leży na płaszczyźnie π , czyli $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, skąd otrzymujemy $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$. Zatem:

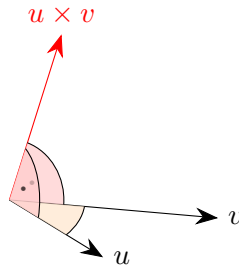
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6.5)$$

□

Na zbiorze wektorów $\mathbb{R}^3$ można wprowadzić dodatkowe działanie (nie mające swojego odpowiednika dla wektorów na płaszczyźnie) zwane *iloczynem wektorowym*.

Definicja 6.32

Iloczynem wektorowym wektorów $u, v \in \mathbb{R}^3$ (oznaczanym $u \times v$) nazywamy **wektor** o długości $|u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v)$, kierunku prostopadłym do obu wektorów u i v oraz zwrocie ustalonym zgodnie z „regułą prawej dłoni”.



W powyższej definicji kierunek i zwrot nie są dobrze określone w sytuacji, gdy $u = 0$ lub $v = 0$. Niemniej w tym przypadku $|0 \times v| = 0$ (lub $|u \times 0| = 0$), więc iloczyn wektorowy jest dobrze określony (jest wektorem zerowym).

Fakt 6.33

Pole równoległoboku rozpiętego w $\mathbb{R}^3$ przez wektory u i v wynosi $|u \times v|$. Pole trójkąta rozpiętego w $\mathbb{R}^3$ przez wektory u i v wynosi $\frac{1}{2}|u \times v|$.

Dowód. Pole trójkąta rozpiętego przez wektory u i v wynosi:

$$\frac{1}{2} \cdot |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v) = \frac{1}{2}|u \times v|$$

Pole równoległoboku jest 2 razy większe, więc wynosi $|u \times v|$. □

Fakt 6.34

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów w $\mathbb{R}^3$ we współrzędnych wyraża się następującym wzorem:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\det \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ z_0 & z_1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ z_0 & z_1 \end{pmatrix} \\ +\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 z_1 - y_1 z_0 \\ z_0 x_1 - z_1 x_0 \\ x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{pmatrix}$$

Dowód. Najpierw sprawdzimy, że kierunek wektora po prawej stronie równości jest zgodny z kierunkiem iloczynu wektorowego, czyli że wektor ten jest prostopadły do każdego z wektorów $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} y_0 z_1 - y_1 z_0 \\ z_0 x_1 - z_1 x_0 \\ x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = (y_0 z_1 - y_1 z_0)x_0 + (z_0 x_1 - z_1 x_0)y_0 + (x_0 y_1 - x_1 y_0)z_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} y_0 z_1 - y_1 z_0 \\ z_0 x_1 - z_1 x_0 \\ x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (y_0 z_1 - y_1 z_0)x_1 + (z_0 x_1 - z_1 x_0)y_1 + (x_0 y_1 - x_1 y_0)z_1 = 0$$

Następnie sprawdzimy, czy długość wektora po prawej stronie równości jest taka jak długość iloczynu wektorowego. W tym celu zauważmy, że oznaczając $\theta = \angle(u, v)$ otrzymujemy:

$$(|u \times v|)^2 + (u \circ v)^2 = (|u||v| \sin \theta)^2 + (|u||v| \cos \theta)^2 = |u|^2 |v|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = |u|^2 |v|^2$$

czyli

$$(|u \times v|)^2 = |u|^2 |v|^2 - (u \circ v)^2 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1)^2 =$$

$$\begin{aligned} (x_0y_1)^2 + (x_0z_1)^2 + (y_0x_1)^2 + (y_0z_1)^2 + (z_0x_1)^2 + (z_0y_1)^2 - 2(x_0x_1y_0y_1) - 2(y_0y_1z_0z_1) - 2(z_0z_1x_0x_1) \\ = (y_0z_1 - y_1z_0)^2 + (z_0x_1 - z_1x_0)^2 + (x_0y_1 - x_1y_0)^2 \end{aligned}$$

czyli długość zgadza się ze wzorem. Sprawdzenie zwrotu pomijamy, jako wykraczające poza ramy niniejszego skryptu. $\square$

Fakt 6.35

Dla dowolnych wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ oraz dowolnego skłara $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

- 1) $u \times v = -(v \times u)$ (antysymetryczność $\times$)
- 2) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$ (rozdzielność $\times$ względem $+$)
 $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
- 3) $(tu) \times v = u \times (tv) = t(u \times v)$
- 4) $u \times v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy u i v są współliniowe

Dowód. Zgodnie z Definicją 6.32 zamiana kolejności wektorów w iloczynie wektorowym zmienia zwrot na przeciwny, ale nie zmienia jego długości ani kierunku, stąd dostajemy własność (1).

Z tej samej definicji wynika również, że $u \times v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin \angle(u, v) = 0$, czyli wektory u i v są współliniowe (obejmuje to również przypadek, gdy jeden z wektorów jest zerowy), skąd dostajemy własność (4).

Dla dowodu własności (2) posłużymy się charakterystyczną algebraiczną iloczynu wektorowego z Faktu 6.34. Przyjmując $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ dostajemy:

$$u \times (v + w) = \begin{pmatrix} y_1(z_2 + z_3) - (y_2 + y_3)z_1 \\ z_1(x_2 + x_3) - (z_2 + z_3)x_1 \\ x_1(y_2 + y_3) - (x_2 + x_3)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1z_3 - y_3z_1 \\ z_1x_3 - z_3x_1 \\ x_1y_3 - x_3y_1 \end{pmatrix} = u \times v + u \times w$$

Dowód drugiej części własności (2) oraz dowód własności (3) przebiegają podobnie. $\square$

Iloczyn wektorowy pozwala łatwo wyznaczać wektor prostopadły do dwóch danych wektorów w $\mathbb{R}^3$, co ułatwia wyznaczanie wektora normalnego płaszczyzny.

Przykład 5

Zamień postać parametryczną $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ równania płaszczyzny na równanie ogólne.

Rozwiązanie. Szukana płaszczyzna jest równoległa do wektorów $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Stąd jej wektor normalny to wektor prostopadły do u i v , możemy więc przyjąć jako wektor normalny:

$$u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \\ -(1 \cdot 5 - 2 \cdot 3) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stąd równanie płaszczyzny to:

$$3x + y - 2z + D = 0$$

a korzystając z faktu, że do płaszczyzny należy punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, wyliczamy $D = -5$.

Przykład 6

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Szukana płaszczyzna jest równoległa do wektorów $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, wektor normalny tej płaszczyzny, to:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Stąd równanie płaszczyzny to:

$$-10x + 6y + 5z + D = 0$$

a korzystając z faktu, że do płaszczyzny należy punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, wyliczamy $D = -1$.

6.3 Wyznacznik i macierz odwrotna

Definicja 6.36

Wyznacznikiem trójki wektorów (u, v, w) w $\mathbb{R}^3$ (inaczej: macierzy 3×3 , której kolumnami są wektory u, v, w) nazywamy liczbę:

$$\det(u, v, w) = (u \times v) \circ w$$

Iloczyn $(u \times v) \circ w$ czasami nazywany jest *iloczynem mieszanym* wektorów.

Fakt 6.37

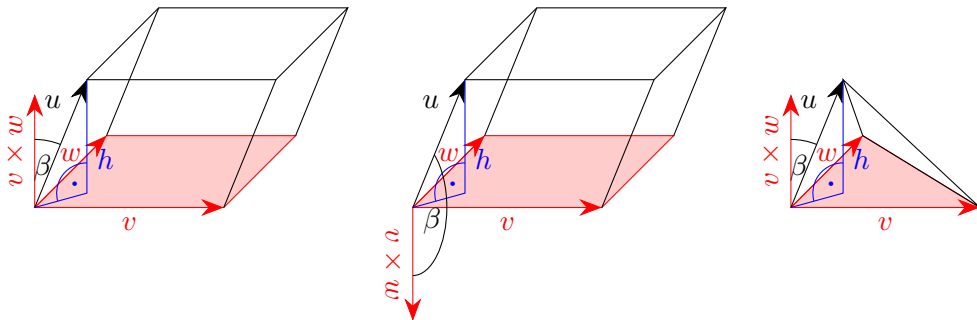
Objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory u, v, w wyraża się wzorem $|\det(u, v, w)|$. Objętość czworościanu rozpiętego przez te same wektory to $\frac{1}{6}|\det(u, v, w)|$

Dowód. Zauważmy, że pole równoległoboku będącego podstawą równoległościanu to $P = |v \times w|$, natomiast długość wysokości równoległościanu to $h = |u| \cdot \sin \alpha$, gdzie α to kąt nachylenia wektora u do płaszczyzny podstawy. Kąt między wektorem u , a wektorem $v \times w$ (normalnym do płaszczyzny podstawy) wynosi $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (pierwszy rysunek) lub $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ (drugi rysunek), skąd:

$$V = P \cdot h = |v \times w| \cdot |u| \sin \alpha = |v \times w| \cdot |u| \cdot \pm \cos \beta = \pm u \circ (v \times w) = \pm \det(u, v, w)$$

Objętość czworościanu obliczamy analogicznie, z tą różnicą, że pole podstawy to $\frac{1}{2}|v \times w|$, czyli:

$$V = \frac{1}{3}P \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|v \times w| \cdot |u| \sin \alpha = \frac{1}{6}|v \times w| \cdot |u| \cdot \pm \cos \beta = \pm \frac{1}{6}u \circ (v \times w) = \pm \frac{1}{6} \det(u, v, w)$$

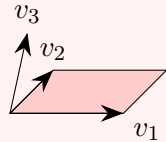


□

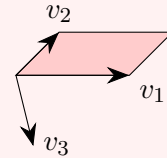
Powyższy fakt pokazuje geometryczną interpretację wartości bezwzględnej wyznacznika. Interpretacja znaku wyznacznika związana jest z pojęciem *orientacji* trójki wektorów.

Definicja 6.38

Trójkę wektorów (v_1, v_2, v_3) w $\mathbb{R}^3$ nazywamy *dodatnio zorientowaną*, jeśli v_3 leży w tej samej półprzestrzeni wyznaczonej przez wektory v_1 i v_2 , co wektor $v_1 \times v_2$, a *ujemnie zorientowaną*, jeśli v_3 leży w przeciwnej półprzestrzeni.



(v_1, v_2, v_3) dodatnio zorientowana



(v_1, v_2, v_3) ujemnie zorientowana

Nieformalnie, trójka wektorów (v_1, v_2, v_3) jest dodatnio zorientowana, jeśli wektory te można przedstawić przy pomocy trzech palców prawej ręki: kciuka (v_1), palca wskazującego (v_2) i palca środkowego (v_3). Przykładem trójki wektorów dodatnio zorientowanej jest trójka wersorów: (e_1, e_2, e_3) .

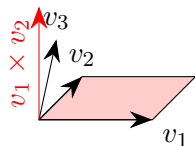
Fakt 6.39

Dane są wektory $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Wówczas:

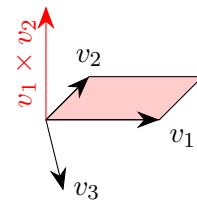
- $\det(v_1, v_2, v_3) > 0 \iff$ trójka wektorów (v_1, v_2, v_3) jest dodatnio zorientowana,
- $\det(v_1, v_2, v_3) < 0 \iff$ trójka wektorów (v_1, v_2, v_3) jest ujemnie zorientowana,
- $\det(v_1, v_2, v_3) = 0 \iff$ wektory v_1, v_2, v_3 są współpłaszczyznowe.

W szczególności macierz o dwóch jednakowych kolumnach (a nawet o dwóch współliniowych kolumnach) ma zerowy wyznacznik.

Dowód. Jak widać na poniższych rysunkach, kąt między wektorami v_3 i $v_1 \times v_2$ jest ostry (lub zerowy), gdy trójka (v_1, v_2, v_3) jest dodatnio zorientowana i rozwarty, gdy trójka (v_1, v_2, v_3) jest ujemnie zorientowana. Stąd $\det(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3$ jest dodatnie przy dodatniej orientacji i ujemne przy ujemnej orientacji.



(v_1, v_2, v_3) dodatnio zorientowana



(v_1, v_2, v_3) ujemnie zorientowana

Zgodnie z Faktem 6.37 $\det(v_1, v_2, v_3) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy objętość równoległoscianu rozpiętego przez v_1, v_2 i v_3 wynosi 0, czyli wektory te leżą na jednej płaszczyźnie (równoległoscian degeneruje się). $\square$

Definicja 6.40

Znakowaną objętością równoległościanu rozpiętego przez wektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ będziemy nazywać objętość równoległościanu rozpiętego przez u, v, w ze znakiem $+$ lub $-$ w zależności od tego, czy trójka (u, v, w) jest dodatnio czy ujemnie zorientowana.

Fakt 6.41

Znakowana objętość równoległościanu rozpiętego przez trójkę wektorów (u, v, w) wynosi $\det(u, v, w)$.

Fakt 6.42

Zamiana kolejności dowolnych dwóch z wektorów zamienia orientację trójki wektorów na przeciwną.

Dowód. Nietrudno zauważyć, że cykliczna zamiana wektorów w trójce wektorów zachowuje orientację, tzn. trójki wektorów:

$$(v_1, v_2, v_3) \quad \text{oraz} \quad (v_3, v_1, v_2) \quad \text{oraz} \quad (v_2, v_3, v_1)$$

są jednakowo zorientowane i jednocześnie przeciwnie zorientowane niż każda z następujących trójek wektorów:

$$(v_2, v_1, v_3) \quad \text{oraz} \quad (v_3, v_2, v_1) \quad \text{oraz} \quad (v_1, v_3, v_2)$$

Łatwo stąd zobaczyć, że każda zamiana kolejności dwóch wektorów zmienia orientację całej trójki. $\square$

Wniosek 6.43

Zamiana miejscami dwóch kolumn macierzy $A \in M_{3 \times 3}$ zmienia wyznacznik tej macierzy na przeciwny.

Fakt 6.44

Dla dowolnej macierzy $A \in M_{3 \times 3}$ zachodzi $\det A = \det A^\top$.

Dowód. Oznaczmy

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad A^\top = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Wówczas zgodnie z Definicją 6.36 mamy:

$$\det A = a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 = \det A^\top$$

$\square$

Wniosek 6.45

Zamiana miejscami dwóch wierszy macierzy 3×3 zmienia wyznacznik tej macierzy na przeciwny. Macierz 3×3 o dwóch współliniowych wierszach (w szczególności o dwóch równych wierszach) ma zerowy wyznacznik.

Dowód. Zgodnie z Faktem 6.44 transpozycja macierzy nie zmienia wyznacznika. Ponieważ transpozycja macierzy zamienia kolumny na wiersze (a wiersze na kolumny), więc odpowiedniki Faktu 6.39 i Wniosku 6.43 zachodzą również dla wierszy. $\square$

Następująca własność wyznacznika będzie potrzebna do udowodnienia wzorów Cramera dla układów trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi:

Fakt 6.46

Dla dowolnych wektorów $u, v, w, u', v', w' \in \mathbb{R}^3$ oraz dowolnego skalaru $t \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące własności:

$$\det(u + u', v, w) = \det(u, v, w) + \det(u', v, w)$$

$$\det(u, v + v', w) = \det(u, v, w) + \det(u, v', w)$$

$$\det(u, v, w + w') = \det(u, v, w) + \det(u, v, w')$$

zwane *addytywnością względem pierwszej/drugiej/trzeciej kolumny* oraz

$$\det(tu, v, w) = t \det(u, v, w)$$

$$\det(u, tv, w) = t \det(u, v, w)$$

$$\det(u, v, tw) = t \det(u, v, w)$$

zwane *jednorodnością względem pierwszej/drugiej/trzeciej kolumny*.

Dowód. Zapisując wyznacznik w postaci iloczynu mieszanego ($\det(u, v, w) = (u \times v) \circ w$) nie-trudno zobaczyć, że addytywność wyznacznika względem każdej kolumny wynika z rozdzielności iloczynu wektorowego względem dodawania wektorów oraz rozdzielności iloczynu skalarnego względem dodawania wektorów:

$$((u + u') \times v) \circ w = ((u \times v) + (u' \times v)) \circ w = (u \times v) \circ w + (u' \times v) \circ w$$

$$(u \times (v + v')) \circ w = ((u \times v) + (u \times v')) \circ w = (u \times v) \circ w + (u \times v') \circ w$$

$$(u \times v) \circ (w + w') = (u \times v) \circ w + (u \times v) \circ w'$$

W podobny sposób (korzystając z własności iloczynu wektorowego i iloczynu skalarnego) dowodzimy jednorodności względem każdej kolumny:

$$((tu) \times v) \circ w = (t(u \times v)) \circ w = t \cdot (u \times v) \circ w$$

$$(u \times (tv)) \circ w = (t(u \times v)) \circ w = t \cdot (u \times v) \circ w$$

$$(u \times v) \circ (tw) = t \cdot (u \times v) \circ w$$

$\square$

Fakt 6.47

Dana jest macierz $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Oznaczmy przez A_i macierz 2×2 powstałą z M przez usunięcie wiersza i i kolumny zawierającej wyraz a_i , gdzie $i = 1, 2, 3$. Analogicznie określamy B_i oraz C_i . Wówczas:

$$\det M = +a_1 \det A_1 - a_2 \det A_2 + a_3 \det A_3$$

$$\det M = -b_1 \det B_1 + b_2 \det B_2 - b_3 \det B_3$$

$$\det M = +c_1 \det C_1 - c_2 \det C_2 + c_3 \det C_3$$

(wzory te nazywamy *rozwinięciem względem pierwszej/drugiej/trzeciej kolumny*) oraz

$$\det M = +a_1 \det A_1 - b_1 \det B_1 + c_1 \det C_1$$

$$\det M = -a_2 \det A_2 + b_2 \det B_2 - c_2 \det C_2$$

$$\det M = +a_3 \det A_3 - b_3 \det B_3 + c_3 \det C_3$$

(wzory te nazywamy *rozwinięciem względem pierwszego/drugiego/trzeciego wiersza*).

Zwróćmy uwagę, że znaki $+$ i $-$ pojawiające się w powyższych wzorach przy a_i , b_i , c_i zależą od położenia wyrazu macierzy w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Dowód. Oznaczmy $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Rozwinięcie względem trzeciej kolumny to bezpośrednie zastosowanie Definicji 6.36 i Faktu 6.34, jako że

$$\det(a, b, c) = (a \times b) \circ c = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3$$

Na mocy Wniosku 6.43 otrzymujemy rozwinięcie względem drugiej kolumny:

$$\det(a, b, c) = -\det(a, c, b) = -(a \times c) \circ b = -\begin{pmatrix} B_1 \\ -B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = -b_1 B_1 + b_2 B_2 - b_3 B_3$$

oraz rozwinięcie względem pierwszej kolumny:

$$\det(a, b, c) = -\det(b, a, c) = \det(b, c, a) = (b \times c) \circ a = \begin{pmatrix} A_1 \\ -A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3$$

Wzory na rozwinięcie względem wybranego wiersza wynikają z Faktu 6.44. $\square$

Przykład 1

Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że najoptymalniejszym (tzn. wymagającym najmniejszej ilości rachunków) sposobem wyliczania wyznacznika jest rozwinięcie względem wiersza lub kolumny zawierającej możliwie dużą liczbę zer. W związku z tym pierwszy wyznacznik wyliczamy rozwijając względem drugiej kolumny:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 = 12$$

drugi wyznacznik wyliczamy rozwijając względem trzeciego wiersza:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -4 \cdot (-14) = 56$$

a trzeci – rozwijając względem drugiego wiersza:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 5 = 4$$

Czwarta macierz ma dwa współliniowe wiersze, zaś piąta macierz ma dwie współliniowe (nawet równe) kolumny, więc obie te macierze mają (zgodnie z Faktem ??) wyznacznik równy 0.

Fakt 6.48

Płaszczyzna o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ dzieli przestrzeń $\mathbb{R}^3$ na dwie półprzestrzenie. Jedna z tych półprzestrzeni składa się z punktów spełniających warunek:

$$Ax + By + Cz + D \geq 0$$

a druga z półprzestrzeni składa się z punktów spełniających warunek:

$$Ax + By + Cz + D \leq 0$$

Płaszczyznę graniczną zaliczamy do obu półprzestrzeni.

Dowód. Załóżmy, że $A, C \neq 0$ (przypadek gdy jeden ze współczynników jest zerowy pozostawiamy do rozpatrzenia czytelnikowi). Do płaszczyzny o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ należy punkt $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -D/C \end{pmatrix}$, a wektory $u = \begin{pmatrix} B/A \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -A/C \end{pmatrix}$ to niewspółliniowe wektory równoległe do tej płaszczyzny (łatwo sprawdzić, że są prostopadłe do wektora normalnego płaszczyzny). Jedna z półprzestrzeni składa się z takich punktów $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, że trójka $(u, v, \overrightarrow{PX})$ jest dodatnio zorientowana, a druga z takich punktów X , że trójka $(u, v, \overrightarrow{PX})$ jest ujemnie zorientowana.

Wobec tego, zgodnie z Faktem 6.39 nierówność opisująca jedną półprzestrzeń to:

$$\det(u, v, \overrightarrow{PX}) > 0 \quad \text{czyli} \quad \det \begin{pmatrix} B/A & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 0 & -A/C & z + D/C \end{pmatrix} > 0$$

a więc (wyliczając wyznacznik) otrzymujemy:

$$Ax + By + Cz + D > 0$$

W podobny sposób pokazujemy, że druga półprzestrzeń jest opisywana przez nierówność:

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + z + \frac{D}{C} > 0 \quad \text{czyli} \quad Ax + By + Cz + D < 0$$

Ponieważ płaszczyznę graniczną (o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$) zaliczamy do obu półprzestrzeni, więc ostre nierówności zamieniamy na słabe. $\square$

Przykład 2

Czy punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny o równaniu $2x + y - 4z - 1 = 0$?
Rozwiązanie. Współrzędne pierwszego punktu spełniają nierówność $2x + y - 4z - 1 < 0$, zaś współrzędne drugiego punktu spełniają nierówność $2x + y - 4z - 1 > 0$, czyli punkty te leżą po przeciwnych stronach podanej płaszczyzny.

Definicja 6.49

Znakowaną odległością punktu $P \in \mathbb{R}^3$ od płaszczyzny π będziemy nazywać odległość punktu P od płaszczyzny π ze znakiem $+$ lub $-$ w zależności od tego, po której stronie płaszczyzny π znajduje się punkt P .

Podobnie jak w przypadku znakowanej odległości punktu na płaszczyźnie od prostej, definicja ta jest trochę niejednoznaczna. Podobnie jak poprzednio, niejednoznaczność ta nie będzie miała znaczenia w praktycznych zastosowaniach.

Wniosek 6.50

Znakowana odległość punktu $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ od płaszczyzny o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ wynosi:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wyznaczniki macierzy 3×3 pomogą nam w rozwiązywaniu układów 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi, podobnie jak wyznaczniki macierzy 2×2 pomagały w rozwiązywaniu układów 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi. Zaczniemy od analizy możliwych zbiorów rozwiązań pojedynczego równania liniowego z trzema niewiadomymi.

Fakt 6.51

Zbiór rozwiązań pojedynczego równania liniowego z niewiadomymi x, y, z :

$$ax + by + cz = p$$

jest jednym z następujących zbiorów:

- płaszczyzną, gdy przynajmniej jeden z parametrów a, b, c jest niezerowy,
- całą przestrzenią, gdy $a = b = c = p = 0$,
- zbiorem pustym, gdy $a = b = c = 0$, ale $p \neq 0$.

Dowód. Jeśli przynajmniej jeden z parametrów a, b, c jest niezerowy, to zgodnie z Faktem 6.27 otrzymujemy równanie płaszczyzny. Jeśli $a = b = c = 0$, to równanie ma postać $0 = p$ i jest równaniem sprzecznym (gdy $p \neq 0$) lub tożsamościowym (gdy $p = 0$). $\square$

Fakt 6.52

Zbiór rozwiązań układu trzech równań liniowych z niewiadomymi x, y, z :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases}$$

jest punktem, prostą, płaszczyzną, całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$ lub zbiorem pustym.

Dowód. Jeśli wszystkie trzy równania układu to równania płaszczyzn, to otrzymujemy:

- płaszczyznę, jeśli wszystkie trzy płaszczyzny się pokrywają,
- zbiór pusty, jeśli wśród tych płaszczyzn są dwie różne płaszczyzny równoległe,
- prostą, punkt lub zbiór pusty w przeciwnym wypadku (dwie różne nierównoległe płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej, a prosta ta albo należy do trzeciej płaszczyzny, albo przecina ją w jednym punkcie, albo jest do niej równoległa).

Jeśli wśród równań układu jest równanie spreczne, to cały układ jest spreczny. Jeśli jest jedno równanie tożsamościowe, to otrzymujemy część wspólną dwóch płaszczyzn (czyli zbiór pusty, prostą lub płaszczyznę). Jeśli są dwa równania tożsamościowe, to otrzymujemy równanie płaszczyzny, zaś jeśli wszystkie trzy równania są tożsamościowe, to rozwiązaniem jest każdy punkt $\mathbb{R}^3$. $\square$

Fakt 6.53: Wzory Cramera

Dany jest następujący układ równań z niewiadomymi x, y, z :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases}$$

Wyznacznik $D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ nazywamy *wyznacznikiem głównym* układu.

Jeśli $D \neq 0$, to powyższy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, zadane wzorem:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \\ z = \frac{D_z}{D} \end{cases}$$

gdzie

$$D_x = \det \begin{pmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad D_z = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

Powyższy układ możemy zapisać w wersji macierzowej:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

gdzie macierz 3×3 po lewej stronie to macierz główna układu.

Dowód. Oznaczmy:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Układ równań można zapisać w postaci wektorowej:

$$x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c = p$$

skąd, traktując lewą i prawą stronę równości jako pierwszą kolumnę macierzy, dostajemy (pamiętamy, że a, b, c, p to wektory, zaś x, y, z to skalary):

$$\det(x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c, b, c) = \det(p, b, c)$$

co z uwagi na addytywność i jednorodność wyznacznika względem pierwszej kolumny (Fakt 6.46) możemy przekształcić do postaci:

$$\det(xa, b, c) + \det(yb, b, c) + \det(zc, b, c) = \det(p, b, c)$$

$$x \cdot \det(a, b, c) + y \cdot \det(b, b, c) + z \cdot \det(c, b, c) = \det(p, b, c)$$

Ponieważ wyznacznik macierzy o dwóch jednakowych kolumnach jest równy zero (Fakt 6.39), więc

$$x \cdot \det(a, b, c) = \det(p, b, c), \quad \text{czyli} \quad x = \frac{\det(p, b, c)}{\det(a, b, c)} = \frac{D_x}{D}$$

o ile $D \neq 0$. Podobnie dowodzimy, że:

$$y = \frac{\det(a, p, c)}{\det(a, b, c)} = \frac{D_y}{D} \quad \text{oraz} \quad z = \frac{\det(a, b, p)}{\det(a, b, c)} = \frac{D_z}{D}$$

□

Fakt 6.54

Jeśli w $\mathbb{R}^3$ dane są trzy liniowo niezależne wektory u, v, w , to każdy wektor p można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej tych wektorów, tzn. istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, dla których:

$$p = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

Dowód. Jeśli współrzędne wektorów oznaczmy:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

to rozważane równanie można zapisać w postaci układu trzech równań liniowych z niewiadomymi α, β i γ :

$$\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = p_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = p_2 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = p_3 \end{cases}$$

Wyznacznik główny tego układu to $\det(u, v, w)$, który na mocy Faktu 7.7 jest niezerowy (bo wektory u, v, w są niewspółpłaszczyznowe). Wobec tego, zgodnie z Faktem 6.53, układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie. □

Rozdział 7

Przekształcenia przestrzeni $\mathbb{R}^3$

7.1 Przekształcenia liniowe i afiniczne

Definicja 7.1

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ nazywamy *przekształceniem afinicznym* jeśli jest zadane wzorem:

$$F(X) = A \cdot X + v$$

oraz *przekształceniem liniowym* jeśli jest zadane wzorem:

$$F(X) = A \cdot X$$

gdzie A jest macierzą rozmiaru $l \times k$, a v jest wektorem z $\mathbb{R}^l$.

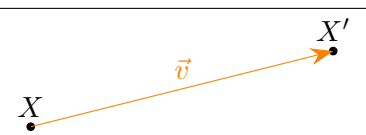
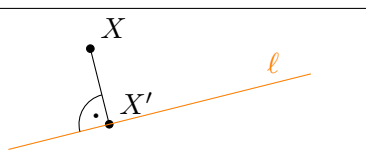
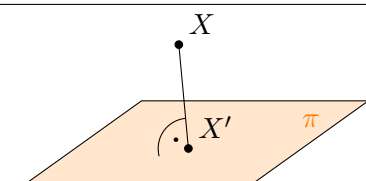
Mnożenie oznacza mnożenie macierzy, które dla macierzy dowolnych rozmiarów zostało określone w Definicji 2.9. W niniejszym rozdziale wymiary k i l przestrzeni $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{R}^l$ będą równe 1, 2 lub 3.

Oczywisty związek między przekształceniami afinicznymi a liniowymi jest następujący:

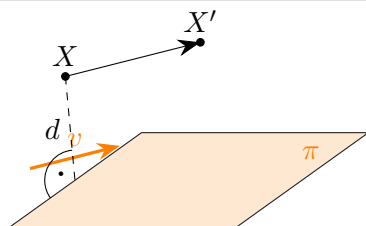
Fakt 7.2

Przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy $F(0) = 0$.

Rozdział zaczniemy od zapoznania się z przykładami przekształceń afinicznych $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, stanowiących trójwymiarowe uogólnienia przekształceń płaszczyzny poznanych w Rozdziale 2.1.

1	<i>Translacja (przesunięcie) o wektor v</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{XX'} = v$	
2	<i>Rzut (prostokątny) na prostą ℓ</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na prostej ℓ, że: $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$	
3	<i>Rzut (prostokątny) na płaszczyznę π</i> to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na płaszczyźnie π, że: $\overrightarrow{XX'} \perp \pi$	

4	Odbicie (symetria) względem prostej ℓ to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$ oraz środek odcinka XX' leży na prostej ℓ.	
5	Odbicie (symetria) względem płaszczyzny π to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} \perp \pi$ oraz X i X' znajdują się w równych odległościach od płaszczyzny π i po przeciwnych jej stronach.	
6	Powinowactwo prostopadłe o skali $k \neq 0$ względem prostej ℓ to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{XX'} = k \cdot \overrightarrow{XX}$ gdzie $\overline{X}$ jest rzutem (prostokątnym) punktu X na prostą ℓ.	
7	Powinowactwo prostopadłe o skali $k \neq 0$ względem płaszczyzny π to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{XX'} = k \cdot \overrightarrow{XX}$ gdzie $\overline{X}$ jest rzutem (prostokątnym) punktu X na płaszczyznę π.	
8	Obrót o kąt θ wokół prostej ℓ to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overline{XX'} = \overline{XX}$ oraz kąt $\angle X\overline{X}X'$ ma miarę θ, gdzie $\overline{X}$ jest rzutem (prostokątnym) punktu X na prostą ℓ. Istnieją dwa obroty wokół ℓ o kąt θ różniące się wybranym kierunkiem obrotu.	
9	Jednokładność o środku S i skali $k \neq 0$ to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$	
10	Odbicie względem punktu S (symetria środkowa o środku S) to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że punkt S jest środkiem odcinka XX'.	
11	Rzut ukośny na płaszczyznę π w kierunku wektora v to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na płaszczyźnie π, że: $\overrightarrow{XX'} \parallel v$	

12	Powinowactwo ścinające o płaszczyźnie π i wektorze v (gdzie v jest wektorem równoległym do płaszczyzny π) to przekształcenie, które dowolny punkt X przeprowadza na taki punkt X', że: $\overrightarrow{XX'} = d(X) \cdot v$ gdzie $d(X)$ to znakowana odległość punktu X od płaszczyzny π.	
----	---	---

Przekształceniami afinicznymi $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ są również:

- *przekształcenie identycznościowe*, czyli przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zdefiniowane wzorem: $F(X) = X$ (każdy punkt przechodzi na siebie),
- *przekształcenie stałe*, czyli przekształcenie, przy którym każdy punkt ma taki sam obraz, np. $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zdefiniowane wzorem: $G(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- *przekształcenie zerowe* (szczególny przypadek przekształcenia stałego), czyli przekształcenie $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zdefiniowane wzorem $H(X) = 0$.

Wśród przekształceń afinicznych $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ można wyróżnić szczególną klasę przekształceń zwanych izometriami:

Definicja 7.3

Izometria $\mathbb{R}^3$ to przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, które zachowuje odległości, tzn. dla dowolnych $A, B \in \mathbb{R}^3$ zachodzi

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}|$$

Izometria liniowa $\mathbb{R}^3$ to izometria $\mathbb{R}^3$, która jest równocześnie przekształceniem liniowym. Macierz izometrii liniowej nazywamy *macierzą izometrii*.

Fakt, że izometrie to szczególne przykłady przekształceń afinicznych nie jest prostym wnioskiem z definicji, ale twierdzeniem, którego dowód wykracza poza ramy niniejszego skryptu:

Twierdzenie 7.4

Każda izometria $\mathbb{R}^3$ jest przekształceniem afinicznym.

Wniosek 7.5

Izometria F przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy $F(0) = 0$.

Dowód. Każda izometria F przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest przekształceniem afinicznym, a zatem jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy $F(0) = 0$. $\square$

Fakt 7.6

Jeśli F jest izometrią $\mathbb{R}^3$, to dowolna figura jest przystająca do swojego obrazu przez przekształcenie F . W szczególności izometria $\mathbb{R}^3$ zachowuje kąty między odcinkami, pola figur płaskich oraz objętości.

Dowód. Izometria $\mathbb{R}^3$ zachowuje odległości punktów, czyli w szczególności zachowuje długości boków dowolnego trójkąta. Ponieważ dwa trójkąty o odpowiednich bokach jednakowej długości są przystające (cecha przystawania bbb), więc ich odpowiednie kąty są tej samej miary. Oznacza to,

że izometria zachowuje miary kątów. Przekształcenie zachowujące długości odcinków oraz miary kątów przeprowadza dowolny wielokąt na wielokąt do niego przystający (fakt ten prawdziwy jest również dla dowolnej figury, aczkolwiek jego dowód jest znacznie trudniejszy). W szczególności, obrazem każdej figury płaskiej przez izometrię jest figura o tym samym polu. Przekształcenie zachowujące długości odcinków i miary kątów przeprowadza dowolny wielościan na wielościan do niego przystający (fakt ten jest prawdziwy dla dowolnej figury). W szczególności obrazem każdej figury jest figura o tej samej objętości. $\square$

Przykład 1

Napisz wzór translacji T_v o wektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

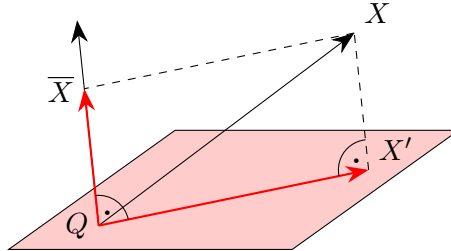
Rozwiązanie.

$$T_v \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \\ z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Przykład 2

Napisz wzór rzutu P_π na płaszczyznę π o równaniu $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Rozwiązanie. Wybierzmy jakikolwiek punkt na płaszczyźnie π , np. $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dla dowolnego punktu X oznaczmy przez X' jego rzut na płaszczyznę π oraz przez $\bar{X}$ jego rzut na prostą prostopadłą do płaszczyzny π , przechodzącą przez Q .



Wektor $\overrightarrow{Q\bar{X}}$ jest rzutem wektora $\overrightarrow{QX}$ na wektor $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ normalny do płaszczyzny π . Wobec tego:

$$\overrightarrow{Q\bar{X}} = p_n(\overrightarrow{QX}) = \frac{(X - Q) \circ n}{n \circ n} \cdot n = \frac{2x + 3y - (z - 4)}{14} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4x + 6y - 2z + 8 \\ 6x + 9y - 3z + 12 \\ -2x - 3y + z - 4 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $\overrightarrow{QX} = \overrightarrow{QX'} + \overrightarrow{Q\bar{X}}$, więc

$$\begin{aligned} X' = Q + \overrightarrow{QX'} &= Q + \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{Q\bar{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4x + 6y - 2z + 8 \\ 6x + 9y - 3z + 12 \\ -2x - 3y + z - 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10x - 6y + 2z - 8 \\ -6x + 5y + 3z - 12 \\ 2x + 3y + 13z + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{13}{14} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Przykład 3

Napisz wzór odbicia S_π względem płaszczyzny π o równaniu $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu X przez odbicie jako X'' , natomiast przez X' oznaczmy rzut (prostokątny) X na płaszczyznę π , wyznaczony w poprzednim przykładzie. Wówczas X' jest środkiem odcinka XX'' , czyli:

$$\frac{1}{2}(X + X'') = X'$$

skąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} X'' = 2X' - X &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 10x - 6y + 2z - 8 \\ -6x + 5y + 3z - 12 \\ 2x + 3y + 13z + 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3x - 6y + 2z - 8 \\ -6x - 2y + 3z - 12 \\ 2x + 3y + 6z + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} \\ -\frac{12}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Przykład 4

Napisz wzór powinowactwa prostokątnego F o skali $k = 2$ względem płaszczyzny π o równaniu $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu X przez powinowactwo jako X'' , natomiast przez X' oznaczmy rzut (prostokątny) X na płaszczyznę π , wyznaczony w poprzednim przykładzie. Wówczas:

$$\overrightarrow{X'X''} = 2 \cdot \overrightarrow{X'X} \quad \text{czyli} \quad X'' - X' = 2(X - X')$$

skąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} X'' = 2X - X' &= 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10x - 6y + 2z - 8 \\ -6x + 5y + 3z - 12 \\ 2x + 3y + 13z + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 18x + 6y - 2z + 8 \\ 6x + 23y - 3z + 12 \\ -2x - 3y + 15z - 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{23}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{15}{14} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Przykład 5

Napisz wzór rzutu P_ℓ na prostą ℓ o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Obrazem punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ jest taki punkt X' leżący na prostej ℓ , że $XX' \perp \ell$, czyli:

$$X' = \begin{pmatrix} 3t + 1 \\ 2t \\ t + 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} 3t + 1 - x \\ 2t - y \\ t + 1 - z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

czyli

$$3(3t + 1 - x) + 2(2t - y) + (t + 1 - z) = 0 \quad \text{skąd} \quad t = \frac{1}{14}(3x + 2y + z - 4)$$

zatem

$$X' = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -5x + 6y + 3z + 2 \\ 6x - 10y + 2z - 8 \\ 3x + 2y - 13z + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{14} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Przykład 6

Napisz wzór odbicia S_ℓ względem prostej ℓ o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ przez X'' , zaś przez X' rzut punktu X na prostą ℓ (wyznaczony w poprzednim przykładzie). Wówczas X' jest środkiem odcinka XX'' , czyli:

$$\frac{1}{2}(X + X'') = X'$$

skąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} X'' = 2X' - X &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5x + 6y + 3z + 2 \\ 6x - 10y + 2z - 8 \\ 3x + 2y - 13z + 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -12x + 6y + 3z + 2 \\ 6x - 17y + 2z - 8 \\ 3x + 2y - 20z + 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{17}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{20}{7} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Przykład 7

Napisz wzór symetrii środkowej o środku $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ przez X' . Punkt S jest środkiem odcinka XX' , więc:

$$S = \frac{1}{2}(X + X')$$

czyli

$$X' = 2S - X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x \\ 4 - y \\ 8 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Przykład 8

Napisz wzór jednokładności D_k^S o skali $k = 4$ i środku $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ przez X' . Wówczas:

$$\overrightarrow{SX'} = 4 \cdot \overrightarrow{SX} \quad \text{czyli} \quad X' - S = 4(X - S)$$

skąd

$$X' = 4X - 3S = 4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 6 \\ 4y - 3 \\ 4z - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Przykład 9

Napisz wzór rzutu ukośnego w kierunku wektora $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na płaszczyznę π o równaniu $2x + y + z + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ przez $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Szukamy takiego punktu X' leżącego na płaszczyźnie π , że $\overrightarrow{XX'} \parallel v$. Wobec tego mamy rozwiązać układ równań z niewiadomymi x', y', z' :

$$\begin{cases} 2x' + y' + z' + 1 = 0 \\ \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x' + y' + z' + 1 = 0 \\ x' - x = y' - y \\ x - x' = z - z' \\ y' - y = z' - z \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(2x - y - z - 1) \\ y' = \frac{1}{4}(-2x + 3y - z - 1) \\ z' = \frac{1}{4}(-2x - y + 3z - 1) \end{cases}$$

Przykład 10

Napisz wzór powinowactwa ścinającego o płaszczyźnie o równaniu $2x - y + 2z = 1$ i wektorze $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ przez X' . Wówczas:

$$\overrightarrow{XX'} = d(X) \cdot v$$

gdzie $d(X) = \frac{2x - y + 2z - 1}{3}$ to znakowana odległość punktu X od płaszczyzny. Zatem:

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{2x - y + 2z - 1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5x - y + 2z - 1 \\ 8x - y + 8z - 4 \\ 2x - y + 5z - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kolejne przykłady to przykłady przekształceń liniowych, dla których dziedzina i przeciwdziedzina mają różne wymiary (czyli macierz przekształcenia nie jest macierzą kwadratową).

Przykład 11

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ przypisuje każdemu punktowi X znakowaną odległość od płaszczyzny o równaniu $2x - 2y + z = 0$. Sprawdź, że F jest przekształceniem liniowym i podaj jego macierz.

Rozwiązanie.

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{2x - 2y + z}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

czyli F jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Przykład 12

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dane jest wzorem $F(X) = X \circ v$, gdzie $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że F jest przekształceniem liniowym i podaj jego macierz.

Rozwiązanie.

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x + 2y + z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

czyli F jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Przykład 13

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $F(X) = X \times v$, gdzie $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że F jest przekształceniem liniowym i podaj jego macierz.

Rozwiązanie.

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 2z \\ z - x \\ 2x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

czyli F jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Przykład 14

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $F\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że F jest przekształceniem liniowym i podaj jego macierz.

Rozwiązanie.

$$F\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} s + t \\ 3s \\ 4s + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

czyli F jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Przykład 15

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ przypisuje każdemu punktowi X parę liczb $\begin{pmatrix} d_1(X) \\ d_2(X) \end{pmatrix}$, gdzie $d_1(X)$ to znakowana odległość punktu X od płaszczyzny o równaniu $8x - y + 4z = 0$, a d_2 to znakowana odległość punktu X od płaszczyzny o równaniu $x + 2y + 2z = 0$. Sprawdź, że F jest przekształceniem liniowym i podaj jego macierz.

Rozwiązanie.

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(8x - y + 4z) \\ \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

czyli F jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Przykład 16

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ przypisuje każdemu wektorowi X znakowaną objętość czworoscianu rozpiętego przez trójkę wektorów (X, u, v) , gdzie $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że F jest przekształceniem liniowym i podaj jego macierz.

Rozwiązanie. Rozwijając wyznacznik względem pierwszego wiersza otrzymujemy:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(5x - 3y + z) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

czyli F jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

7.2 Macierz przekształcenia

Przedstawione w Rozdziale 2.2 definicje dodawania macierzy (Definicja 2.6), mnożenia macierzy przez skalar (Definicja 2.7) oraz mnożenia macierzy (Definicja 2.9) obejmują macierze wszelkich rozmiarów, w szczególności macierze 3×3 rozważane w niniejszym rozdziale. Również własności tych działań (Fakt 2.8 i Fakt 2.10) pozostają prawdziwe.

W związku z tym można udowodnić następujące własności przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$, analogiczne do poznanych własności przekształceń płaszczyzny.

Fakt 7.7

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wektorów u i v oraz dowolnego skalaru t zachodzą własności:

- 1) $F(u + v) = F(u) + F(v)$ (addytywność)
- 2) $F(t \cdot u) = t \cdot F(u)$ (jednorodność)

Własność $F(0) = 0$ (wymieniana w analogicznym Fakcie 2.11) została tu pominięta, gdyż stanowi szczególny przypadek własności (2) (dla $t = 0$).

Dowód. $\Rightarrow$ Niech $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym o macierzy $m(F) = A$. Wówczas własność (1) wynika z rozdzielności mnożenia macierzy względem dodawania:

$$F(u + v) = A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v = F(u) + F(v)$$

zaś własność (2) wynika z Faktu 2.10:

$$F(t \cdot u) = A \cdot (tu) = t \cdot (Au) = t \cdot F(u)$$

$\Leftarrow$ Załóżmy teraz, że przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest addytywne i jednorodne. Pokażemy

że jest ono liniowe. Oznaczmy obrazy wektorów przez:

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad F(e_3) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Wówczas z addytywności i jednorodności F wynika, że dla dowolnego wektora $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= F(xe_1 + ye_2 + ze_3) = F(xe_1) + F(ye_2) + F(ze_3) = xF(e_1) + yF(e_2) + zF(e_3) \\ &= x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

czyli F jest przekształceniem liniowym. $\square$

Przykład 1

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. O wektorach $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ wiadomo, że: $F(u+v+w) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(2u+v-w) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $F(u-v+2w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u)$, $F(v)$, $F(w)$.
Rozwiązanie. Korzystając z addytywności i jednorodności przekształcenia liniowego otrzymujemy układ trzech równań wektorowych z trzema niewiadomymi $F(u)$, $F(v)$, $F(w)$:

$$\begin{cases} F(u) + F(v) + F(w) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2F(u) + F(v) - F(w) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ F(u) - F(v) + 2F(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Rozwiązując metodą podstawiania dostajemy $F(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fakt 7.8

Jeśli $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, to:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = F(e_1) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = F(e_2) \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = F(e_3)$$

Dowód.

$$F(e_1) = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Podobnie obliczamy $F(e_2)$ i $F(e_3)$. $\square$

Przykład 2

Wyznacz macierze następujących przekształceń liniowych:

- (a) odbicie względem płaszczyzny o równaniu $x = y$,
- (b) odbicie względem prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- (c) obrót o kąt θ wokół osi Oz .

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 7.8 wystarczy wyznaczyć obrazy trzech wersorów. Wobec tego macierzami tymi są:

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zgodnie z Faktem 7.8, znajomość obrazów trzech wersorów jednoznacznie wyznacza przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Fakt ten można uogólnić, zamieniając trzy wersory na dowolne trzy liniowo niezależne wektory:

Fakt 7.9

Przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^3$ jest jednoznacznie wyznaczone przez obrazy dowolnych trzech **liniowo niezależnych** wektorów, tzn. jeśli dane są liniowo niezależne wektory u, v, w oraz dowolne wektory u', v', w' , to istnieje **dokładnie jedno** przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że

$$F(u) = u' \quad F(v) = v' \quad F(w) = w'$$

Dowód. Oznaczmy $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ oraz $u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$, $w' = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}$.

Szukamy macierzy $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ takiej, że:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Powyższy układ można zapisać jako układ 9 równań skalarnych z 9 niewiadomymi (a_i, b_i, c_i , gdzie $i = 1, 2, 3$), które można podzielić na 3 układy 3 równań z 3 niewiadomymi (i -ty układ będzie miał niewiadome a_i, b_i, c_i):

$$\begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 = u'_1 \\ a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3 = v'_1 \\ a_1 w_1 + b_1 w_2 + c_1 w_3 = w'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 = u'_2 \\ a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3 = v'_2 \\ a_2 w_1 + b_2 w_2 + c_2 w_3 = w'_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 = u'_3 \\ a_3 v_1 + b_3 v_2 + c_3 v_3 = v'_3 \\ a_3 w_1 + b_3 w_2 + c_3 w_3 = w'_3 \end{cases}$$

Wyznacznik główny każdego z tych układów jest taki sam i wynosi:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}^\top \right) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

jako że zgodnie z Faktem ?? transpozycja macierzy nie zmienia wyznacznika oraz zgodnie z założeniem wektory u, v, w są liniowo niezależne (nie leżą na jednej płaszczyźnie). Wobec tego, zgodnie ze wzorami Cramera (Fakt 6.53) każdy z układów ma jednoznaczne rozwiązanie. Stąd

istnieje dokładnie jedna macierz $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, czyli dokładnie jedno przekształcenie liniowe F spełniające warunki zadania. $\square$

Fakt 7.10

Niech $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem afinicznym. Wówczas każdy z poniższych zbiorów jest punktem lub prostą lub płaszczyzną lub $\mathbb{R}^3$ lub zbiorem pustym:

- zbiór punktów stałych F ,
- przeciwobraz $F^{-1}[v]$ dowolnie wybranego punktu v .

Dowód. Niech F będzie dane wzorem:

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Wówczas zbiór punktów stałych to zbiór rozwiązań układu równań (z niewiadomymi x, y, z):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} (a_1 - 1)x + b_1y + c_1z = -p_1 \\ (a_2 - 1)x + b_2y + c_2z = -p_2 \\ (a_3 - 1)x + b_3y + c_3z = -p_3 \end{cases}$$

Zgodnie z Faktem 6.53 zbiorem rozwiązań takiego układu jest punkt, prosta, płaszczyzna, $\mathbb{R}^3$ lub zbiór pusty.

Podobnie przedstawiamy przeciwobraz punktu v jako zbiór rozwiązań układu 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi, dochodząc do tej samej konkluzji. $\square$

Fakt 7.11

Każde przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest złożeniem przekształcenia liniowego i translacji.

Dowód. Przekształcenie F ma wzór $F(X) = AX + v$, gdzie A jest macierzą 3×3 , a v jest wektorem z $\mathbb{R}^3$. Wówczas $F = T_v \circ G$, gdzie $G(X) = AX$ jest przekształceniem liniowym. $\square$

Fakt 7.12

Dane są przekształcenia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- 1) Jeśli F i G są afiniczne, to $F \circ G$ oraz F^{-1} (o ile F jest odwracalne) też są afiniczne.
- 2) Jeśli F i G są liniowe, to $F \circ G$ oraz F^{-1} (o ile F jest odwracalne) też są liniowe.
- 3) Jeśli F i G są izometriami, to $F \circ G$ oraz F^{-1} (o ile F jest odwracalne) też są izometriami.
- 4) Jeśli F i G są izometriami liniowymi, to $F \circ G$ oraz F^{-1} (o ile F jest odwracalne) też są izometriami liniowymi.

Dowód. (1) Jeśli $F(X) = AX + v$ i $G(X) = BX + w$, to:

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = A(BX + w) + v = (AB)X + (Aw + v)$$

czyli $F \circ G$ jest przekształceniem afinicznym. Z kolei przekształcenie odwrotne do F istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest odwracalna, i dane jest wówczas wzorem $F^{-1}(X) = A^{-1}X - A^{-1}v$ (nietrudno sprawdzić, że złożenie F^{-1} i F jest przekształceniem identycznościowym).

Dowód (2) jest podobny. Dla dowodu (3) zauważmy, że skoro F i G zachowują odległości (jako izometrie), to $F \circ G$ i F^{-1} również. Własność (4) wynika z (2) i (3). $\square$

Fakt 7.13

Niech $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi. Wówczas:

$$m(F \circ G) = m(F) \cdot m(G)$$

$$m(F^{-1}) = (m(F))^{-1}$$

W szczególności F jest odwracalne $\iff m(F)$ jest macierzą odwracalną (tzn. $\det m(F) \neq 0$).

Dowód. Jeśli A i B są takimi macierzami, że $F(X) = AX$ i $G(X) = BX$, to

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = A \cdot BX = (AB)X, \quad \text{czyli} \quad m(F \circ G) = AB$$

Stąd:

$$I = m(\text{Id}) = m(F \circ F^{-1}) = m(F) \cdot m(F^{-1}), \quad \text{czyli} \quad m(F^{-1}) = (m(F))^{-1}$$

$\square$

Definicja 7.14

Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *zachowuje orientację*, jeśli dla dowolnej trójki liniowo niezależnych wektorów (u, v, w) , trójki (u, v, w) i $(F(u), F(v), F(w))$ mają jednokowe orientacje, a *zmienia orientację*, jeśli dla dowolnej trójki liniowo niezależnych wektorów (u, v, w) trójki (u, v, w) i $(F(u), F(v), F(w))$ mają przeciwne orientacje.

Fakt 7.15

Niech $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- 1) F skaluje objętości figur $|\det(m(F))|$ razy,
- 2) $\det(m(F)) > 0$, jeśli F zachowuje orientację oraz $\det(m(F)) < 0$, jeśli F zmienia orientację.

Wniosek 7.16

Wyznacznik macierzy izometrii to ± 1 .

Dowód. Izometria liniowa zachowuje objętości, więc wyznacznik jej macierzy A spełnia warunek $|\det A| = 1$. $\square$

Fakt 7.17

Niech A będzie macierzą 3×3 . Wówczas następujące warunki są równoważne:

- 1) A jest macierzą izometrii,
- 2) kolumny A są parami prostopadłymi wektorami długości 1,
- 3) wiersze A są parami prostopadłymi wektorami długości 1,
- 4) $A^{-1} = A^T$.

Fakt 7.18

Macierzą identycznościową 3×3 nazywamy macierz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Macierz ta ma tę własność, że:

$$AI = A \quad \text{oraz} \quad IA = A$$

dla dowolnej takiej macierzy A dla której dane działanie jest wykonalne.

Definicja 7.19

Macierz odwrótną do macierzy $P \in M_{3 \times 3}$ nazywamy taką macierz $P^{-1} \in M_{3 \times 3}$, że

$$P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I$$

Macierz, dla której istnieje macierz odwrotna nazywamy *macierzą odwracalną*.

Zwróćmy uwagę, że ze względu na nieprzemienność mnożenia macierzy definicja musi wymagać by iloczyn macierzy P i P^{-1} był macierzą identycznościową niezależnie od kolejności czynników.

Fakt 7.20

Dla dowolnych macierzy A i B rozmiaru 3×3 zachodzą następujące własności:

- 1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- 2) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ (o ile A jest odwracalna)

Dowód. Własność (1) można udowodnić przy pomocy żmudnego rachunku, który pomijamy. Własność (2) jest wnioskiem z własności (1), gdyż dla odwracalnej macierzy A zachodzi:

$$1 = \det I = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1})$$

skąd

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

□

Fakt 7.21

Dla dowolnych odwracalnych macierzy A i B rozmiaru 3×3 zachodzi: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Niech $P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Szukamy macierzy odwrotnej do P , tzn. macierzy $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$, dla której zachodzą równości:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Pierwsze z równań (7.1) można zapisać w postaci trzech równań wektorowych:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.2)$$

które można zapisać jako trzy układy 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_3 = 0 \\ a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 = 1 \\ a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_3 = 0 \\ a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 = 0 \\ a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 = 1 \end{cases}$$

Jeśli $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$, to zgodnie ze wzorami Cramera każdy z powyższych układów ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$x_1 = \frac{1}{\det P} \det \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \cdot A_1$$

$$x_2 = \frac{1}{\det P} \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\det P} \cdot B_1$$

$$x_3 = \frac{1}{\det P} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \cdot C_1$$

gdzie przez A_i , B_i , C_i oznaczamy wyznacznik macierzy 2×2 powstałej przez wykreślenie z macierzy A wiersza i kolumny zawierających, odpowiednio, wyraz a_i , b_i lub c_i . Analogicznie wyliczamy:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\det P} \cdot A_2 & y_2 &= \frac{1}{\det P} \cdot B_2 & y_3 &= \frac{1}{\det P} \cdot C_2 \\ z_1 &= \frac{1}{\det P} \cdot A_3 & z_2 &= \frac{1}{\det P} \cdot B_3 & z_3 &= \frac{1}{\det P} \cdot C_3 \end{aligned}$$

wobec czego szukaną macierzą odwrotną powinna być macierz:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} +A_1 & -B_1 & +C_1 \\ -A_2 & +B_2 & -C_2 \\ +A_3 & -B_3 & +C_3 \end{pmatrix}^T$$

Ponieważ mnożenie macierzy nie jest przemienne, więc musimy jeszcze sprawdzić, że znaleziona macierz spełnia również drugie z równań (7.1). Sprawdzenie tego pozostawiamy czytelnikowi.

Fakt 7.22

Macierz $P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det P \neq 0$, a macierzą do niej odwrotną jest macierz:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} +A_1 & -B_1 & +C_1 \\ -A_2 & +B_2 & -C_2 \\ +A_3 & -B_3 & +C_3 \end{pmatrix}^T$$

gdzie A_i , B_i , C_i oznaczają wyznacznik macierzy 2×2 powstałej przez wykreślenie z macierzy P wiersza i kolumny zawierającego, odpowiednio, wyraz a_i , b_i lub c_i .

Dowód. Przed sformułowaniem faktu wyprowadziliśmy powyższy wzór na macierz odwrotną. Pozostaje uzasadnić, że w przypadku, gdy $\det P = 0$, macierz P nie jest odwracalna. Ale jeśli macierz P jest odwracalna, to zachodzi $P \cdot P^{-1} = I$, co na mocy Faktu 7.20 pociąga:

$$\det P \cdot \det(P^{-1}) = 1$$

więc w przypadku $\det P = 0$, to otrzymujemy sprzeczność. □

Rozdział 8

Diagonalizacja macierzy 3×3

8.1 Wektory własne i wartości własne

Definicja 8.1

Wektor własny przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ to wektor X spełniający warunek:

$$F(X) = \lambda \cdot X$$

natomiast *wektor własny* macierzy A rozmiaru 3×3 , to wektor X spełniający warunek

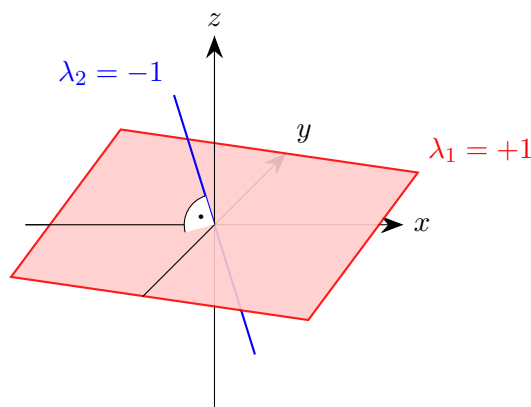
$$AX = \lambda X$$

dla pewnej liczby rzeczywistej λ . W obu przypadkach, jeśli $X \neq 0$, to liczbę λ nazywamy *wartością własną* przekształcenia F lub macierzy A , zaś X *wektorem własnym dla wartości własnej* λ . Wektor $X = 0$ jest wektorem własnym dla każdej wartości własnej λ .

Przykład 1

Wyznacz wartości i wektory własne odbicia S_π względem płaszczyzny π .

Rozwiązanie. Dla dowolnego wektora v_1 na płaszczyźnie π zachodzi $F(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1$, czyli $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia, a płaszczyzna π jest zbiorem wektorów własnych dla λ_1 .



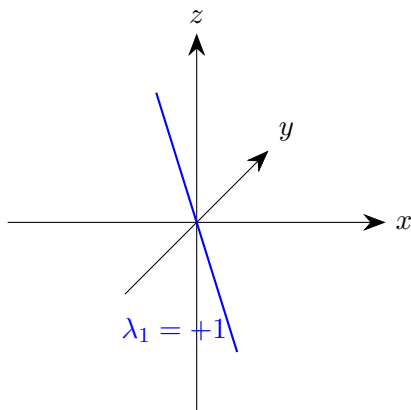
Dla dowolnego wektora v_2 prostopadłego do płaszczyzny π zachodzi $F(v_2) = -v_2 = (-1) \cdot v_2$, czyli $\lambda_2 = -1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta prostopadła do π przechodząca przez 0 jest zbiorem wektorów własnych dla λ_2 .

Jeśli wektor v_3 nie jest równoległy ani prostopadły do π , to wektory v_3 i $F(v_3)$ mają różne kierunki, przekształcenie nie ma zatem więcej wektorów ani wartości własnych.

Przykład 2

Wyznacz wartości i wektory własne obrotu wokół prostej ℓ (przechodzącej przez 0) o kąt θ (gdzie $\theta \neq 0$ i $\theta \neq \pi$).

Rozwiązanie. Każdy punkt prostej ℓ (czyli wektor równoległy do prostej ℓ) jest punktem stałym obrotu, stąd prosta ℓ to zbiór wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda = +1$. Obrót wokół ℓ zmienia natomiast kierunek każdego wektora nierównoległego do ℓ , więc przekształcenie nie ma więcej wektorów własnych, ani wartości własnych.

**Przykład 3**

Wyznacz wartości i wektory własne jednokładności o środku O i skali k .

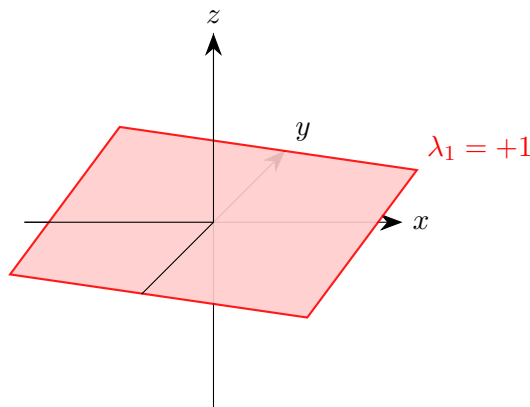
Rozwiązanie. Podobnie jak dla jednokładności na płaszczyźnie, każdy wektor jest wektorem własnym dla wartości własnej k , gdyż dla dowolnego wektora v zachodzi:

$$D_k(v) = k \cdot v$$

Przykład 4

Wyznacz wartości i wektory własne powinowactwa ścinającego o płaszczyźnie π i wektorze v .

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że poza punktami stałymi (czyli wektorami własnymi dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$) każdy wektor zmienia kierunek. Wobec tego jedynymi wektorami własnymi są punkty płaszczyzny π (dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$).



Jeśli mamy podaną macierz przekształcenia liniowego, to wyznaczanie wartości i wektorów

własnych można sprowadzić do rozwiązywania równań, jak to pokazuje poniższy fakt.

Fakt 8.2

- 1) Wartości własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ to pierwiastki *wielomianu charakterystycznego* $\chi_F(\lambda) = \det(m(F) - \lambda \text{Id})$ przekształcenia F , czyli rozwiązania równania:

$$\det(m(F) - \lambda \text{Id}) = 0$$

- 2) Wartości własne macierzy $A \in M_{3 \times 3}$ to pierwiastki *wielomianu charakterystycznego* $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ macierzy A , czyli rozwiązania równania:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dowód. Niech A będzie macierzą przekształcenia F , tzn. $F(X) = AX$. Warunek:

$$F(X) = \lambda X \quad (\text{w wersji macierzowej } A \cdot X = \lambda X)$$

można zapisać w postaci

$$(F - \lambda \text{Id})(X) = 0 \quad (\text{w wersji macierzowej } (A - \lambda I) \cdot X = 0)$$

Zatem λ jest wartością własną F wtedy i tylko wtedy, gdy równanie macierzowe

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0 \tag{8.1}$$

ma niezerowe rozwiązanie. Ponieważ wektor $X = 0$ jest rozwiązaniem (8.1) niezależnie od wartości λ , więc szukamy takich λ , dla których (8.1) ma przynajmniej dwa rozwiązania ($X = 0$ i rozwiązanie niezerowe). Równanie (8.1) to układ cramerowski 3×3 o macierzy głównej $(A - \lambda I)$, który zgodnie z Faktem 6.53 ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Wobec tego wartościami własnymi są pierwiastki λ równania $\det(A - \lambda I) = 0$. □

Przykład 5

Znajdź wszystkie wartości własne i wektory własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o wzorze:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Rozwiązanie. Tym razem, w odróżnieniu od poprzednich przykładów, wygodniej będzie zacząć od wyznaczenia wartości własnych. Zgodnie z Faktem 8.2 wartości własne przekształcenia F , to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$\begin{aligned} \chi_F(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 - (1-\lambda) + (2-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

czyli liczby $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Wyznamy teraz wektory własne dla wartości własnej

$\lambda_1 = 1$. Zgodnie z definicją, są to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 3x + y - z = x \\ x + 2y - z = y \\ x + z = z \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu to:

$$\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$$

czyli wektorami własnymi dla wartości własnej 1 są wektory postaci $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$. Analogicznie wyznaczamy wektory własne dla wartości własnej $\lambda_2 = 2$ otrzymując $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ oraz dla wartości własnej $\lambda_3 = 3$ otrzymując $\begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix}$. Tak więc badane przekształcenie ma 3 wartości własne, a dla każdej z nich prostą wektorów własnych.

Wniosek 8.3

Macierz $A \in M_{3 \times 3}$ (przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) ma co najwyżej 3 wartości własne.

Dowód. Wartości własne macierzy $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} a_1 - x & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - x \end{pmatrix}$$

$$= (a_1 - x)(b_2 - x)(c_3 - x) + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - (a_1 - x)c_2 b_3 - b_1 a_2 (c_3 - x) - c_1 (b_2 - x) a_3$$

który jest wielomianem stopnia 3. Ponieważ wielomian stopnia 3 ma co najwyżej 3 pierwiastki, więc macierz A ma co najwyżej 3 wartości własne. $\square$

Fakt 8.4

Niezerowy wektor własny macierzy $A \in M_{3 \times 3}$ o wyrazach rzeczywistych (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) przynależy tylko do jednej wartości własnej.

Dowód. Załóżmy (nie wprost), że X jest niezerowym wektorem własnym macierzy A dla dwóch różnych wartości własnych λ_1 i λ_2 . Oznacza to, że:

$$\begin{cases} AX = \lambda_1 X \\ AX = \lambda_2 X \end{cases}$$

Stąd

$$\lambda_1 X = \lambda_2 X \quad \text{czyli} \quad (\lambda_1 - \lambda_2)X = 0$$

skąd otrzymujemy sprzeczność, gdyż $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ oraz $X \neq 0$. $\square$

Fakt 8.5

Jeśli λ jest wartością własną macierzy $A \in M_{3 \times 3}$ o wyrazach rzeczywistych (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$), to zbiór wektorów własnych dla λ jest albo prostą (przechodzącą przez 0), albo płaszczyzną (przechodzącą przez 0), albo całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$.

Dowód. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Zbiór wektorów $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ własnych dla wartości własnej λ to zbiór rozwiązań następującego układu równań (z niewiadomymi x, y i z):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \lambda x \\ a_2x + b_2y + c_2z = \lambda y \\ a_3x + b_3y + c_3z = \lambda z \end{cases}$$

Po przekształceniu otrzymujemy układ cramerowski:

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + (b_2 - \lambda)y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + (c_3 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Zbiór rozwiązań takiego układu to (zgodnie z Faktem 6.52) zbiór pusty, punkt, prosta, płaszczyzna lub cała przestrzeń. Ponieważ $x = y = z = 0$ spełnia ten układ równań, a skoro λ jest wartością własną, to układ ma oprócz tego przynajmniej jedno niezerowe rozwiązanie, więc lista możliwych zbiorów rozwiązań to: prosta zawierająca punkt 0, płaszczyzna zawierająca punkt 0 oraz cała przestrzeń. $\square$

Fakt 8.6

Każdy wielomian zmiennej rzeczywistej stopnia nieparzystego (w szczególności wielomian trzeciego stopnia) ma przynajmniej jeden pierwiatek rzeczywisty.

Dowód. Zgodnie z Wnioskiem 5.24 wielomian rzeczywisty rozkłada się na iloczyn wielomianów (rzeczywistych) stopnia pierwszego i drugiego. W rozkładzie wielomianu W stopnia 3 musi być przynajmniej jeden czynnik stopnia pierwszego, czyli:

$$W(x) = (x - a) \cdot A(x)$$

co (zgodnie z Twierdzeniem Bezouta) oznacza, że a jest pierwiastkiem wielomianu W . $\square$

Wniosek 8.7

Macierz 3×3 o wyrazach rzeczywistych ma przynajmniej jedną rzeczywistą wartość własną.

Dowód. Jeśli macierz $A \in M_{3 \times 3}$ ma wyrazy rzeczywiste, to jej wielomian charakterystyczny $\chi_A(x)$ jest wielomianem stopnia 3 zmiennej rzeczywistej. Zgodnie z Faktem 8.6 taki wielomian ma przynajmniej jeden pierwiatek rzeczywisty, czyli macierz A ma przynajmniej jedną rzeczywistą wartość własną. $\square$

Fakt 8.8

Jeśli u, v, w są niezerowymi wektorami własnymi macierzy $A \in M_{3 \times 3}$ o wyrazach rzeczywistych (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) dla parami różnych wartości własnych λ, μ, ν , to wektor w nie leży na płaszczyźnie rozpiętej przez wektory u i v .

Dowód. Gdyby w leżał na płaszczyźnie rozpiętej przez u i v , to dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodziłoby:

$$w = \alpha u + \beta v \quad (8.2)$$

gdzie $\alpha, \beta \neq 0$, gdyż w nie może być współliniowe z u , ani z v (Fakt 8.4). Zatem:

$$F(w) = F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$$

co z uwagi na to, że u, v i w są wektorami własnymi daje:

$$\nu w = \alpha \lambda u + \beta \mu v \quad (8.3)$$

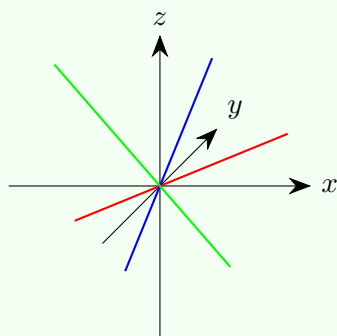
Łącząc równania (8.2) z (8.3) otrzymujemy:

$$\nu(\alpha u + \beta v) = \alpha \lambda u + \beta \mu v \quad \text{czyli} \quad \alpha(\nu - \lambda) \cdot u = \beta(\mu - \nu) \cdot v$$

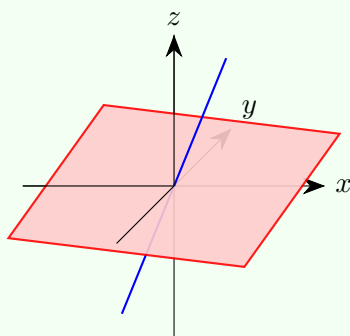
co oznacza, że u i v są współliniowe, wbrew Faktowi 8.4. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że w nie może leżeć na płaszczyźnie rozpiętej przez u i v . $\square$

Wniosek 8.9

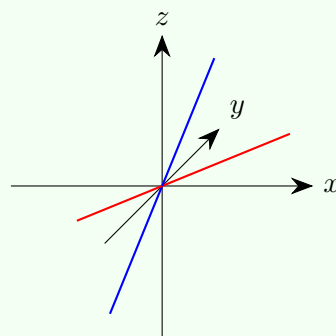
Zbiór wektorów własnych macierzy 3×3 o wyrazach rzeczywistych (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) jest jednym z poniższych zbiorów:



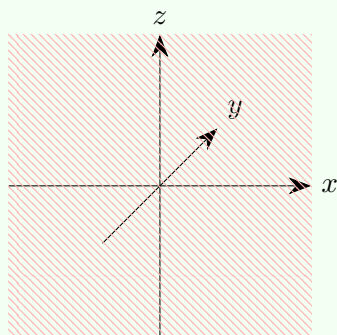
3 wartości własne



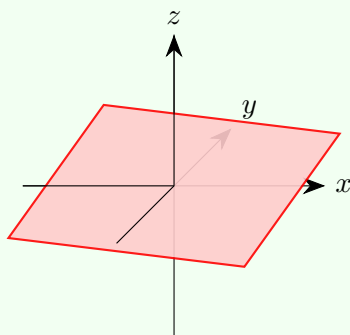
2 wartości własne



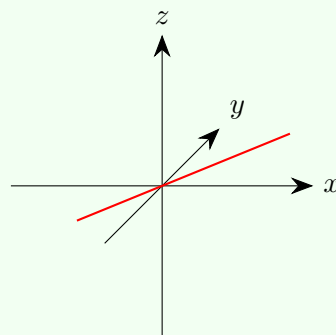
2 wartości własne



1 wartość własna



1 wartość własna



1 wartość własna

Dowód. Zgodnie z Wnioskiem 8.9 oraz Faktem 8.6 macierz 3×3 o wyrazach rzeczywistych ma 1, 2 lub 3 rzeczywiste wartości własne. Zbiór wektorów własnych dla każdej z tych wartości własnych to (zgodnie z Faktem 8.5) prosta przechodząca przez 0, płaszczyzna przechodząca przez 0 lub cała przestrzeń, przy czym zbiory wektorów własnych dla różnych wartości własnych nie mogą mieć punktów wspólnych inny niż punkt 0.

Wobec tego:

- jeśli macierz ma tylko 1 wartość własną λ_1 , to zbiór jej wektorów własnych dla λ_1 jest prostą przechodzącą przez 0, płaszczyzną przechodzącą przez 0 lub całą przestrzenią;
- jeśli macierz ma 2 wartości własne λ_1 i λ_2 , to zbiory wektorów własnych to dwie różne proste przechodzące przez 0 lub płaszczyzna przechodząca przez 0 i nie leżąca na niej prosta przechodząca przez 0 (w każdym innym przypadku zbiór wektorów własnych dla λ_1 i zbiór wektorów własnych dla λ_2 miałyby punkt wspólny inny niż 0);
- jeśli macierz ma 3 wartości własne λ_1 , λ_2 i λ_3 , to zbiory wektorów własnych to albo trzy proste, albo dwie proste i płaszczyzna (w każdym innym przypadku istniałby niezerowy wektor należący do dwóch różnych wartości własnych). Jeśli jednak dwa z tych zbiorów są prostymi, a trzeci płaszczyzną, to możemy znaleźć takie trzy niezerowe wektory własne u, v, w (po jednym z każdego z tych zbiorów), że w leży na płaszczyźnie rozpiętej przez u i v , wbrew Faktowi 8.8. W związku z tym każdy z trzech zbiorów jest prostą i proste te (zgodnie z Faktem 8.8) nie leżą na jednej płaszczyźnie.

Stąd możliwe są tylko sytuacje przedstawione na rysunkach. Przykłady z początku rozdziału pokazują, że każda z tych sytuacji faktycznie może mieć miejsce. $\square$

8.2 Diagonalizacja macierzy

Twierdzenie 8.10: Diagonalizacja macierzy

Jeśli A jest macierzą 3×3 , która ma trzy parami różne wartości własne λ, μ i ν , to

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{gdzie } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

przy czym $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ to wektory własne odpowiednio dla λ, μ i ν .

Dowód. Niech $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ będą niezerowymi wektorami własnymi odpowiednio dla wartości własnych λ, μ i ν macierzy A . Oznaczmy $P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$. Macierz AP jest macierzą 3×3 , a zgodnie z zasadami mnożenia macierzy, wektory:

$$AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}$$

$$AP \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \\ \mu v_3 \end{pmatrix}$$

$$AP \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu w_1 \\ \nu w_2 \\ \nu w_3 \end{pmatrix}$$

są odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią kolumną macierzy AP , wobec czego:

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & \mu v_1 & \nu w_1 \\ \lambda u_2 & \mu v_2 & \nu w_2 \\ \lambda u_3 & \mu v_3 & \nu w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = PD$$

Skoro $AP = PD$, a macierz P jest odwracalna (bo wektory u, v, w są niewspółpłaszczyznowe), to $A = PDP^{-1}$. $\square$

Fakt 8.11

Niech A będzie macierzą 3×3 , zaś D i P takimi macierzami 3×3 , że P jest odwracalna oraz $A = PDP^{-1}$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi wzór:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Dowód. Przeprowadźmy indukcję względem n . Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że dla pewnej wartości $n = k$ zachodzi $A^k = PD^kP^{-1}$. Wówczas dla $n = k + 1$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = PD^kP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^k(P^{-1} \cdot P)DP^{-1} \\ &= P(D^kID)P^{-1} = P(D^kD)P^{-1} = P(D^{k+1})P^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

Fakt 8.12

Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

Dowód powyższego faktu pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Przykład 1

Obliczyć $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{40}$.

Rozwiązanie. Wyznaczamy wielomian charakterystyczny $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8$ oraz wartości własne:

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 1$$

Każdej wartości własnej odpowiada cała prosta wektorów własnych. Wybieramy przykładowe (niezerowe) wektory własne:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i diagonalizujemy macierz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{200} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{40} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{40} & 2^{79} - 2^{39} & 2^{79} - 2^{39} \\ 0 & \frac{1}{3}(2^{81} + 1) & \frac{1}{3}(2^{81} - 2) \\ 0 & \frac{1}{3}(2^{80} - 1) & \frac{1}{3}(2^{80} + 2) \end{pmatrix}$$

Przykład 2

Ciąg (a_n) zadany jest następującą rekurencją:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 6 \\ a_{n+1} = 4a_n - 1a_{n-1} - 6a_{n-2}, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$$

Znajdź (zwarty) wzór na a_n .

Rozwiązanie. Rekurencję powyższą można zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obliczając potęgę macierzy dostajemy:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+2} - 2^{n+2} + (-1)^{n+2} \\ 3^{n+1} - 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \\ 3^n - 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

czyli $a_n = 3^n - 2^n + (-1)^n$.

Przykład 3

Wyznaczyć macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) odbicie S_π względem płaszczyzny π o równaniu $x + 2y + 3z = 0$,

(b) odbicie względem prostej ℓ danej układem równań $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{4}$.

Rozwiązanie. (a) Wartości własne odbicia S_π to $+1$ (wektory własne tworzą płaszczyznę $x + 2y + 3z = 0$) i -1 (wektory własne tworzą prostą $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$). Wobec tego możemy wybrać trzy liniowo niezależne (niewspółpłaszczyznowe) wektory własne, np. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 1 i $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej -1 . Wobec tego diagonalizacja macierzy wygląda następująco:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie 8.13: Twierdzenie spektralne dla $\mathbb{R}^3$

Symetryczna macierz A rozmiaru 3×3 diagonalizuje się bez użycia liczb zespolonych, tzn.

$$A = PDP^{-1}$$

i to w taki sposób, że kolumny macierzy P są wektorami prostopadłymi.

Dowód. Pokażemy twierdzenie w przypadku, gdy wielomian charakterystyczny A nie ma pierwiastków wielokrotnych (rzeczywistych ani nawet zespolonych). Przypadek pierwiastków wielokrotnych wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Jeśli wielomian charakterystyczny A ma pierwiastek nierzeczywisty λ , to ma również pierwiastek $\bar{\lambda}$. Niezerowe wektory własne dla λ i $\bar{\lambda}$ to odpowiednio $v = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 \end{pmatrix}$ i $\bar{v} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 \\ a_2 - ib_2 \\ a_3 - ib_3 \end{pmatrix}$.

Wówczas:

$$\lambda(v \circ \bar{v}) = (\lambda v) \circ \bar{v} = (Av) \circ \bar{v} = (Av)^\top \cdot \bar{v} = v^\top A^\top \bar{v} = v^\top A \bar{v}$$

$$\bar{\lambda}(v \circ \bar{v}) = v \circ (\bar{\lambda} \bar{v}) = v \circ (A \bar{v}) = v^\top A \bar{v}$$

Wobec tego

$$\lambda(v \circ \bar{v}) = \bar{\lambda}(v \circ \bar{v})$$

Ponieważ $v \circ \bar{v} = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2$ jest niezerową liczbą (bo v to niezerowy wektor), więc $\lambda = \bar{\lambda}$, czyli λ jest liczbą rzeczywistą, wbrew założeniu. Wobec tego A ma wyłącznie rzeczywiste wartości własne.

Niech teraz u i v będą wektorami własnymi dla różnych wartości własnych λ i μ . Zauważmy, że:

$$\lambda(u \circ v) = (\lambda u) \circ v = (\lambda u)^\top v = (Au)^\top v = u^\top A^\top v = u^\top Av$$

$$\mu(u \circ v) = u \circ (\mu v) = u^\top \cdot \mu v = u^\top Av$$

Zatem $\lambda(u \circ v) = \mu(u \circ v)$, co wobec $\lambda \neq \mu$ daje $u \circ v = 0$, czyli u i v są prostopadłe. □

Fakt 8.14

Jeśli A jest macierzą 3×3 , to A i $A^\top$ mają jednakowy wielomian charakterystyczny i jednakowe wartości własne.

Dowód. Rozważane wielomiany charakterystyczne to

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) \quad \text{oraz} \quad \chi_{A^\top}(x) = \det(A^\top - xI)$$

Zauważmy, że:

$$(A - xI)^\top = A^\top - xI^\top = A^\top - xI$$

Ponieważ transponowanie macierzy nie zmienia wyznacznika (Fakt 6.44), więc:

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \det(A - xI)^\top = \det(A^\top - xI) = \chi_{A^\top}(x)$$

□

Rozdział 9

Zamiana układu współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

9.1 Nowy układ współrzędnych

Definicja 9.1

*Układem współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ nazwiemy trzy proste (nazywane osiami x, y, z) nie leżące na jednej płaszczyźnie i przecinające się w jednym punkcie (nazywanym początkiem układu współrzędnych i oznaczanym O) oraz niezerowe wektory e'_1, e'_2, e'_3 równoległe, odpowiednio, do osi x, y, z , nazywane *wersorami* i wyznaczające jednostkę na każdej z osi.*

Współrzędnymi wektora (punktu) v w nazywamy takie liczby x', y' i z' , że:

$$v = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3$$

W przypadku równoczesnego posługiwania się współrzędnymi w dwóch różnych układach współrzędnych, będziemy stosować oznaczenia $[v]_{stary}$ i $[v]_{nowy}$, znane z Rozdziału 4.1. Podobnie jak w Rozdziale 4.1 będziemy rozważać jedynie sytuację, gdy początek układu współrzędnych O jest taki sam zarówno w nowym, jak i w starym układzie współrzędnym, tzn.

$$[O]_{stary} = [O]_{nowy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pozwala to pozostać przy dotychczasowej konwencji utożsamiania punktów i wektorów (tzn. $\overrightarrow{OA} = A$), gdyż początek układu współrzędnych (będący domyślnym początkiem wektora) nie zależy od wyboru układu.

Przykład 1

Dany jest nowy układ współrzędnych, którego wersorami są wektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz:

- (a) nowe współrzędne wektora $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (tzn. $[v]_{stary} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$),
- (b) stare współrzędne wektora w , takiego że $[w]_{nowy} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Szukamy nowych współrzędnych, tzn. takich x', y' i z' , że

$$v = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3$$

Oznacza to rozwiązywanie układu równań:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 1 = 2x' + y' + 3z' \\ 2 = x' + y' + z' \\ 0 = y' + 2z' \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $x' = 1$, $y' = 2$, $z' = -1$.

(b) Skoro nowe współrzędne wektora w to 4, 2 i 1, to:

$$w = 4e'_1 + 2e'_2 + e'_3 = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fakt 9.2

Jeśli e'_1 , e'_2 i e'_3 są wersorami nowego układu współrzędnych, to dla dowolnego wektora v zachodzi:

$$[v]_{\text{stary}} = P \cdot [v]_{\text{nowy}} \quad (9.1)$$

gdzie P jest macierzą, której kolumnami są stare współrzędne nowych wersorów, tzn.

$$P = ([e'_1]_{\text{stary}}, [e'_2]_{\text{stary}}, [e'_3]_{\text{stary}})$$

Macierz P nazywamy *macierzą zamiany współrzędnych*.

Dowód. Wektor v można zapisać w postaci kombinacji liniowej starych wersorów:

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad \text{czyli} \quad [v]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

oraz w postaci kombinacji liniowej nowych wersorów:

$$v = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3, \quad \text{czyli} \quad [v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Jeśli oznaczymy stare współrzędne nowych wersorów jak następuje:

$$[e'_1]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad e'_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

$$[e'_2]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad e'_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

$$[e'_3]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad e'_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

to

$$v = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 = x'(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) + y'(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) + z'(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)$$

$$= (x'a_1 + y'b_1 + z'c_1)e_1 + (x'a_2 + y'b_2 + z'c_2)e_2 + (x'a_3 + y'b_3 + z'c_3)e_3$$

Zatem stare współrzędne wektora v to:

$$[v]_{stary} = \begin{pmatrix} x'a_1 + y'b_1 + z'c_1 \\ x'a_2 + y'b_2 + z'c_2 \\ x'a_3 + y'b_3 + z'c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \cdot [v]_{nowy}$$

□

Rozważmy jeszcze raz Przykład 1, tym razem opierając jego rozwiązanie na wzorze (9.1)

Przykład 2

Dany jest nowy układ współrzędnych, którego wersorami są wektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz:

(a) nowe współrzędne wektora $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (tzn. $[v]_{stary} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$),

(b) stare współrzędne wektora w , takiego że $[w]_{nowy} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Wersory nowego układu współrzędnych to $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, co oznacza:

$$[e'_1]_{stary} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [e'_2]_{stary} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [e'_3]_{stary} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wobec tego macierz P z Faktu 9.2 ma postać:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Stąd, zgodnie z Faktem 9.2, otrzymujemy:

$$(a) [v]_{stary} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot [v]_{nowy}, \text{ skąd}$$

$$[v]_{nowy} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot [v]_{stary} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) [w]_{stary} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot [w]_{nowy} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Przykład 3

Wersorami nowego układu współrzędnych są wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wyznacz:

(a) w nowych współrzędnych równanie płaszczyzny, która w starych współrzędnych ma równanie $x + y + 2z + 3 = 0$,

(b) w starych współrzędnych równanie płaszczyzny, która w nowych współrzędnych ma równanie $2x' - y' + z' = 0$.

Rozwiązanie. (a) Zgodnie ze wzorem (9.1) mamy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = x' + y' + z' \\ y = x' - 2y' \\ z = x' + y' - z' \end{cases}$$

Stąd:

$$x + y + 2z + 3 = (x' + y' + z') + (x' - 2y') + 2(x' + y' - z') + 3 = 4x' + y' - z' + 3$$

czyli równanie płaszczyzny to $4x' + y' - z' + 3 = 0$.

(b) Wyznaczając z układu równań z punktu (a) współrzędne x' , y' , z' otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ y' = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Wobec tego:

$$2x' - y' + z' = 2(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z) - (\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z) + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z) = x + y$$

czyli równanie płaszczyzny to $x + y = 0$.

Jeśli zmieniamy układ współrzędnych, to zmianie ulegną również macierze przekształceń liniowych. Dla rozróżnienia macierzy przekształcenia liniowego F w starym i nowym układzie współrzędnych, będziemy je oznaczać, odpowiednio, $m_{stary}(F)$ i $m_{nowy}(F)$.

Definicja 9.3

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Macierzą F w starym układzie współrzędnych nazywamy macierz $m_{stary}(F)$ spełniającą dla dowolnego wektora X warunek:

$$[F(X)]_{stary} = m_{stary}(F) \cdot [X]_{stary}$$

Macierzą F w nowym układzie współrzędnych nazywamy macierz $m_{nowy}(F)$ spełniającą dla dowolnego wektora X warunek:

$$[F(X)]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [X]_{nowy}$$

Fakt 9.4

Jeśli $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w (nowym) układzie współrzędnych o wersorach e'_1 , e'_2 i e'_3 , to:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = [F(e'_1)]_{nowy} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = [F(e'_2)]_{nowy} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = [F(e'_3)]_{nowy}$$

(tzn. kolumny macierzy przekształcenia to nowe współrzędne obrazów nowych wersorów).

Dowód.

$$\begin{aligned} [F(e'_1)]_{\text{nowy}} &= m_{\text{nowy}}(F) \cdot [e'_1]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ [F(e'_2)]_{\text{nowy}} &= m_{\text{nowy}}(F) \cdot [e'_2]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ [F(e'_3)]_{\text{nowy}} &= m_{\text{nowy}}(F) \cdot [e'_3]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Operowanie macierzami przekształceń w nowych i starych współrzędnych bardzo upraszcza następujący fakt:

Fakt 9.5

Niech e'_1, e'_2 i e'_3 będą wersorami nowego układu współrzędnych, zaś P macierzą zamiany współrzędnych (tzn. $P = ([e'_1]_{\text{stary}}, [e'_2]_{\text{stary}}, [e'_3]_{\text{stary}})$). Wówczas dla dowolnego przekształcenia liniowego $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zachodzi wzór:

$$m_{\text{stary}}(F) = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot P^{-1} \quad (9.2)$$

Dowód. Zgodnie z Definicją 9.3 mamy:

$$[F(X)]_{\text{nowy}} = m_{\text{nowy}}(F) \cdot [X]_{\text{nowy}}$$

Zgodnie z Faktem 9.2 zastosowanym dla wektora X :

$$[X]_{\text{stary}} = P \cdot [X]_{\text{nowy}}, \quad \text{czyli} \quad P^{-1} \cdot [X]_{\text{stary}} = [X]_{\text{nowy}}$$

Zgodnie z Faktem 9.2 zastosowanym dla wektora $F(X)$:

$$[F(X)]_{\text{stary}} = P \cdot [F(X)]_{\text{nowy}}$$

Łącząc te wzory otrzymujemy:

$$[F(X)]_{\text{stary}} = P \cdot [F(X)]_{\text{nowy}} = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot [X]_{\text{nowy}} = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot P^{-1} \cdot [X]_{\text{stary}}$$

Porównując otrzymany wzór:

$$[F(X)]_{\text{stary}} = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot P^{-1} \cdot [X]_{\text{stary}}$$

z definicją:

$$[F(X)]_{\text{stary}} = m_{\text{stary}}(F) \cdot [X]_{\text{stary}}$$

dostajemy szukany wzór:

$$m_{\text{stary}}(F) = P \cdot m_{\text{nowy}}(F) \cdot P^{-1}$$

□

Przykład 4

Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w nowym układzie ma macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F w starym układzie.

(b) Przekształcenie liniowe $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w starym układzie ma macierz $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz G w nowym układzie.

Rozwiązanie. Macierz zamiany współrzędnych to $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 9.5:

$$\begin{aligned} m_{stary}(F) &= P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ 6 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oraz

$$m_{stary}(G) = P \cdot m_{nowy}(G) \cdot P^{-1}$$

skąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} m_{nowy}(G) &= P^{-1} \cdot m_{stary}(G) \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Przykład 5

Napisz macierz obrotu R o kąt 60° wokół prostej o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. W poprzednich rozdziałach wyprowadziliśmy wzór na obrót wokół osi Oz . Aby skorzystać z tego wzoru, wprowadzimy taki nowy układ współrzędnych, by rozważany obrót był obrotem wokół osi Oz' . Nowy układ współrzędnych musi być prostokątny (wersory muszą być parami prostopadłe) i nowe wersory muszą być tej samej długości. Przyjmujemy:

$$e'_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e'_1 = e'_2 \times e'_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wobec tego, zgodnie z Faktem 9.5, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} m_{stary}(R) &= P \cdot m_{nowy}(R) \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Zadania

0 UKŁADY RÓWNAŃ

Rozwiązanie układów równań metodą podstawiania.

ZADANIA

1. Rozwiąż wymienione poniżej układy 3 równań z 3 niewiadomymi metodą podstawiania.

$$(a) \begin{cases} x - 4y + 5z = 1 \\ x - 3y + 6z = 3 \\ -x + 7y - z = 6 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 5y + z = 1 \\ 3x + 8y + z = 2 \\ x + 5y - z = 4 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + 8y + 4z = 5 \end{cases}$$

2. Rozwiąż wymienione poniżej układy 4 równań z 4 niewiadomymi metodą podstawiania.

$$(a) \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 4 \\ x + 3y + 3z + 5t = 7 \\ -2x - y + 5z + 2t = 3 \\ -2x - 2y + 4z + 3t = 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x + y + 2z + t = 6 \\ x + y + z - t = 2 \\ 7x + y + 3z + 4t = 12 \\ 2x - y - z + 2t = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + 2z + t = 3 \\ x + 2y + 3z + 2t = 4 \\ x + 2y + 5z + 3t = 9 \\ -x + y + 2z + 3t = 5 \end{cases}$$

3. Pola powierzchni ścian pewnego prostopadłościanu są równe 24, 18 i 27. Znajdź wymiary tego prostopadłościanu.
4. Każdy wyraz pewnego pięciowyrazowego ciągu (poza wyrazami pierwszym i ostatnim) jest sumą wyrazu po nim następującego i wyrazu go poprzedzającego. Wiemy też, że suma wszystkich wyrazów ciągu wynosi 5 oraz że suma pierwszego, drugiego i ostatniego wyrazu wynosi 2. Znajdź ten ciąg.
5. Znajdź taki wielomian $W(x)$ stopnia drugiego, że $W(1) = 2$, $W(2) = 3$, $W(3) = 5$.
6. Znajdź równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
7. Korzystając z faktu, że środek odcinka o końcach $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ma współrzędne $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1+x_2) \\ \frac{1}{2}(y_1+y_2) \end{pmatrix}$, znajdź współrzędne wierzchołków pięciokąta, którego środki kolejnych boków są punktami $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
8. Kwadrat magiczny to tablica 3×3 wypełniona liczbami tak, że suma liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na każdej z obu przekątnych jest taka sama. Znajdź taki kwadrat magiczny, by w jego środkowym polu była liczba 5, w lewym górnym rogu – liczba 6, a w prawym górnym rogu – liczba 8.

1.1 POJĘCIE WEKTORA

Wektor na płaszczyźnie (definicja geometryczna). Współrzędne wektora (zapis kolumnowy). Dodawanie wektorów i mnożenie przez skalar. Wektor przeciwny i odejmowanie wektorów. Własności działań na wektorach. Współliniowość. Kombinacja liniowa dwóch wektorów. Wersory. Wektory w geometrii. Długość wektora. Równanie okręgu. Wzajemne położenie dwóch okręgów. Nierówność trójkąta.

ĆWICZENIA

- Przez punkt P na płaszczyźnie poprowadzono proste prostopadłe do osi układu współrzędnych. Znajdź współrzędne punktów przecięcia tych prostych z osiami, oraz odległości punktu P od każdej z osi, jeśli:
 - $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
 - $P = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$
 - $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Wyznacz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, jeśli $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Wiedząc, że $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ wyznacz współrzędne punktów B i C .
- Dane są wektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz współrzędne wektorów $-\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $2\vec{u} + 3\vec{v}$, $4\vec{u} - 3\vec{v}$.
- Znajdź taki wektor $\vec{v}$, że $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Wśród wektorów: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ wskaż wszystkie pary wektorów współliniowych.
- Znajdź długości wszystkich wektorów z poprzedniego ćwiczenia.
- Punkty $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ są wierzchołkami pewnego czworokąta. Oblicz długości boków i przekątnych tego czworokąta.
- Podaj przykład niezerowego wektora v , takiego że $|u + v| = |u| + |v|$, jeśli $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r , jeśli:
 - $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $r = 3$,
 - $S = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $r = 2$.
- Określ wzajemne położenie okręgów o środkach A_1 i A_2 i promieniach r_1 i r_2 , gdzie:
 - $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r_1 = 1$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $r_2 = 4$,
 - $A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r_1 = 8$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $r_2 = 3$,
 - $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $r_1 = 4$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $r_2 = 2$,
 - $A_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r_1 = 2$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $r_2 = 5$,

ZADANIA

- Dane są wektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Przedstaw każdy z wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$.
- Znajdź na osi Ox wszystkie punkty równooddalone od punktów $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Dane są punkty $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Znajdź taki punkt D na osi Ox , żeby:
 - odcinki AB i CD były równoległe,
 - odcinki AC i BD były równoległe.
- Znajdź takie wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, które spełniają układ równań:

$$\begin{cases} 3\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 2\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$. Znajdź współrzędne punktu P dzielącego odcinek AB :
- (a) w stosunku $1 : 3$, (b) w stosunku $1 : 4$, (c) w stosunku $3 : 5$.
6. Środkami boków pewnego trójkąta są punkty $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Znajdź współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
7. Znajdź środek i promień okręgu zadanego równaniem:
- (a) $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 0$, (b) $x^2 + x + y^2 + 2y = 4$, (c) $x^2 - 3x + y^2 + y = 0$.
8. O wektorach u i v wiemy, że $|u| = 2$ i $|v| = 5$. Jaka może być długość wektora $u + v$? Podaj wszystkie możliwości.
9. Uzasadnij, że dla dowolnych punktów płaszczyzny A, B, C, D, E spełniony jest warunek:
- (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
10. W równoległoboku $ABCD$ oznaczmy $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Wyznacz (przy pomocy $\vec{u}$ i $\vec{v}$) wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$.
11. Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka równoległoboku $ABCD$, jeśli znane są współrzędne następujących trzech jego wierzchołków:
- (a) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
12. Ustal, czy okręgi o średnicach AB i CD , gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ przecinają się.
13. *Oznaczmy przez K, L, M, N środki kolejnych boków czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że środek odcinka KM pokrywa się ze środkiem odcinka LN .
14. *Punkt P dzieli bok AB trójkąta ABC w stosunku $2 : 1$, zaś punkt S dzieli odcinek CP w stosunku $1 : 3$. Wyznacz współrzędne punktu S , jeśli $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
15. *Na płaszczyźnie dany jest prostokąt o bokach długości a i b . Uzasadnij, że dla dowolnego punktu P średnia kwadratów odległości P od wierzchołków prostokąta oraz kwadrat odległości P od środka prostokąta różnią się o pewną stałą, niezależną od wyboru punktu P .
16. *Uzasadnij pozostałe własności działań na wektorach z Faktu 1.12.

1.2 RÓWNANIE PROSTEJ

Równanie ogólne prostej. Równanie parametryczne prostej (postać wektorowa i we współrzędnych). Wektor kierunkowy prostej.

ĆWICZENIA

- Sprawdź, które z punktów $(\frac{1}{1})$, $(\frac{2}{3})$, $(\frac{-1}{2})$ leżą na prostej o równaniu:
 - $(\frac{x}{y}) = t(\frac{1}{1}) + (\frac{-2}{1})$,
 - $2x - 3y + 1 = 0$.
- Napisz trzy różne:
 - równania ogólne prostej o równaniu $3x - 2y + 7 = 0$,
 - równania parametryczne prostej o równaniu $(\frac{x}{y}) = t(\frac{3}{1}) + (\frac{1}{2})$.
- Zamień równanie ogólne podanej prostej na równanie parametryczne:
 - $2y - 5x + 3 = 0$,
 - $4x + 3y + 1 = 0$,
 - $-2x + y + 1 = 0$.
- Zamień równanie parametryczne podanej prostej na równanie ogólne:
 - $(\frac{x}{y}) = t(\frac{-1}{2}) + (\frac{1}{1})$,
 - $(\frac{x}{y}) = t(\frac{1}{2}) + (\frac{3}{1})$,
 - $(\frac{x}{y}) = t(\frac{1}{1}) + (\frac{-1}{2})$.
- Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(\frac{4}{5})$ i równoległej do wektora $(\frac{-1}{2})$:
 - w postaci parametrycznej,
 - w postaci ogólnej.
- Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(\frac{1}{2})$, która jest równoległa do prostej:
 - o równaniu $(\frac{x}{y}) = t(\frac{4}{1}) + (\frac{1}{1})$,
 - o równaniu $2x + 3y - 4 = 0$.
- Dane są punkty $P = (\frac{-1}{4})$ i $Q = (\frac{6}{-1})$. Napisz równanie prostej PQ :
 - w postaci parametrycznej,
 - w postaci ogólnej.
- Znajdź punkt przecięcia prostych:
 - $4x - y - 2 = 0$ i $x - 3y + 5 = 0$,
 - $3x + y + 1 = 0$ i $(\frac{x}{y}) = t(\frac{-2}{1}) + (\frac{1}{0})$,
 - $(\frac{x}{y}) = t(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{1})$ i $(\frac{x}{y}) = t(\frac{3}{1}) + (\frac{-1}{2})$.

ZADANIA

- Dany jest trójkąt ABC , gdzie $A = (\frac{1}{1})$, $B = (\frac{5}{2})$, $C = (\frac{-1}{3})$. Przez punkt C poprowadzono prostą równoległą do boku AB , a przez punkt B poprowadzono prostą równoległą do boku AC . Wyznacz punkt przecięcia tych prostych posługując się:
 - równaniami prostych w postaci ogólnej,
 - równaniami w postaci parametrycznej,
 - rachunkiem wektorowym.
- Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A = (\frac{1}{2})$, $B = (\frac{3}{1})$, $C = (\frac{4}{5})$, $D = (\frac{-1}{5})$. Wyznacz punkt przecięcia przekątnych tego czworokąta, posługując się równaniami prostych AC i BD :
 - w postaci ogólnej,
 - w postaci parametrycznej,
 - jednym w postaci parametrycznej, a drugim w postaci ogólnej.

3. Rozstrzygnij, czy wśród podanych poniżej punktów są trzy punkty leżące na jednej prostej oraz wskaż wszystkie takie trójki punktów: $(\frac{2}{1})$, $(\frac{0}{-5})$, $(\frac{0}{0})$, $(\frac{3}{4})$, $(\frac{6}{3})$.
4. Znajdź punkty przecięcia prostej o równaniu $x - 2y + 1 = 0$ z okręgiem o środku w punkcie $(\frac{1}{2})$ i promieniu 2.
5. *Wyznacz punkt przecięcia prostej o równaniu $3x + \alpha y - 1 = 0$ (gdzie α jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą) z prostą o równaniu $(\frac{x}{y}) = t(\frac{-1}{4}) + (\frac{1}{1})$.
6. *Uzasadnij, że współczynnik kierunkowy prostej, tzn. współczynnik a w równaniu $y = ax + b$ to tangens kąta nachylenia prostej do dodatniej półosi Ox .

1.3 ILOCZYN SKALARNY

Iloczyn skalarny (wzór geometryczny i algebraiczny). Postać biegunowa wektora. Nierówność Schwarza. Kąt między wektorami i między prostymi. Wektor normalny do prostej. Zastosowania iloczynu skalarnego (twierdzenie kosinusów, rzut prostopadły wektora na wektor, odległość punktu od prostej). Znakowana odległość od prostej.

ĆWICZENIA

1. Wyznacz cosinus kąta między każdą parą spośród wektorów: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ustal, który z tych kątów jest ostry, który prosty, a który rozwarty.
2. Zapisz wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ w postaci biegunowej, tzn w postaci $\begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ dla pewnych r i θ .
3. Znajdź wektor jednostkowy, który jest: (a) współliniowy, (b) prostopadły, do wektora $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ile jest takich wektorów?
4. Oblicz odległość (oraz znakowaną odległość) podanego punktu od prostej o podanym równaniu:

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $3x - 4y + 2 = 0$, (b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $-x + 5y + 1 = 0$, (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $2x - 5y + 3 = 0$.
5. Napisz równanie ogólne i parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, która jest: (a) prostopadła, (b) równoległa, do wektora $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
6. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, która jest: (a) prostopadła, (b) równoległa, do prostej o równaniu $5x - 4y + 3 = 0$.
7. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, która jest: (a) prostopadła, (b) równoległa, do prostej o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
8. Znajdź rzut wektora u na wektor v oraz rzut wektora v na wektor u , gdzie $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
9. Jeśli $|u| = 5$, zaś $|v| = 3$, to jakie wartości może przyjmować iloczyn skalarny $u \circ v$? Podaj wszystkie możliwości.

ZADANIA

1. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Wyznacz miary wszystkich kątów tego czworokąta. Ustal, które z tych kątów są ostre, które proste, a które rozwarte.
2. W trójkącie ABC dane są współrzędne wierzchołków $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Ustal, czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny, jeśli:

(a) $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, (b) $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, (c) $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Oblicz długości boków w znalezionym trójkącie prostokątnym i upewnij się, że spełniają one Twierdzenie Pitagorasa.
3. Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Wyznacz:

(a) równania ogólne prostych zawierających boki trójkąta ABC ,

(b) długości wysokości trójkąta ABC (przy pomocy wzoru na odległość punktu od prostej),

(c) równania ogólne prostych zawierających wysokości trójkąta ABC ,

(d) punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC .

4. W trójkącie z poprzedniego zadania wyznacz spodek każdej wysokości (tzn. koniec wysokości leżący na podstawie trójkąta) na dwa sposoby:
- (a) wyznaczając punkt przecięcia prostej zawierającej bok i prostej zawierającej wysokość,
 - (b) wykorzystując wzór na rzut wektora na wektor oraz rachunek wektorowy.
5. Wyznacz miarę kąta ostrego między prostymi:
- (a) $2x + 3y - 1 = 0$ i $2x - y + 5 = 0$,
 - (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
6. Oblicz odległość punktu $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ od prostej o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
7. Dany jest punkt $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz prosta o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Na tej prostej obrano punkt $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz rzut wektora $\overrightarrow{AP}$ na wektor kierunkowy prostej i wykorzystaj otrzymany wynik do znalezienia rzutu punktu P na tę prostą.
8. Ustal wzajemne położenie prostej o równaniu $3x - 4y + 1 = 0$ oraz okręgu o równaniu:
- (a) $x^2 + y^2 - 2y = 0$,
 - (b) $x^2 - 4x + y^2 + 2y = -1$,
 - (c) $x^2 - 6x + y^2 + 2y = -1$.
9. Wiedząc, że $u \circ v = 3$, $v \circ w = 4$, $u \circ w = 0$ oraz $|v| = 1$ i $|u| = 5$, oblicz:
- (a) $v \circ (u + v)$,
 - (b) $(u + v) \circ (u - v)$,
 - (c) $(u + w) \circ (u + v)$.
10. Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$, która przechodzi:
- (a) przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - (b) przez punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Ile jest takich stycznych? Wyznacz je wszystkie.
11. Znajdź wektor v tworzący jednakowe kąty z wektorami $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, a następnie wykorzystaj go do napisania równania prostej będącej dwusieczną kąta $\angle AOB$ (tzn. prostej tworzącej jednakowe kąty z ramionami kąta).
12. *Punkty $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ są końcami średnicy pewnego okręgu. Uzasadnij (przy pomocy iloczynu skalarnego), że dla dowolnego punktu $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ leżącego na tym okręgu, kąt $\angle ACB$ jest prosty.
13. *Uzasadnij, że dla dowolnych wektorów u i v zachodzą wzory:
- (a) $(u + v) \circ (u - v) = |u|^2 - |v|^2$
 - (b) $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$
- Zinterpretuj oba te wzory odwołując się do boków i przekątnych równoległoboku rozpiętego przez wektory u i v .

1.4 WYZNACZNIK

Wyznacznik pary wektorów. Pole trójkąta i równoległoboku. Orientacja pary wektorów. Pole dowolnego wielokąta jako suma wyznaczników. Znakowane pole. Nierówność półpłaszczyzny. Geometryczna interpretacja układu równań. Wzory Cramera. Rozkład wektora na kombinację liniową dwóch niewspółliniowych wektorów.

ĆWICZENIA

1. Oblicz wyznacznik pary wektorów $\det(u, v)$, jeśli:

$$(a) u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (b) u = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (c) u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Sprawdź, które z poniższych par wektorów mają dodatnią, a które ujemną orientację:

$$(a) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad (b) \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad (c) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad (d) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3. Oblicz pole (a) trójkąta, (b) równoległoboku rozpiętego przez wektory $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4. Wśród punktów $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wskaż wszystkie pary punktów leżących po przeciwnych stronach prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$.

5. Oblicz pole trójkąta ABC , gdzie $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Rozwiąż metodą wyznaczników następujące układy równań:

$$(a) \begin{cases} 7x - 5y = -1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -3x + 9y = 3 \end{cases}$$

ZADANIA

1. Rozstrzygnij, które z punktów $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ leżą „powyżej”, a które „poniżej” prostej o równaniu $2x + 3y - 4 = 0$.

2. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

3. Oblicz pole:

$$(a) \text{czworokąta } ABCD, \text{ gdzie } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ (b) \text{pięciokąta } ABCDE, \text{ gdzie } A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. Przedstaw wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, rozwiązując odpowiedni układ równań metodą wyznaczników.

5. Ustal przy pomocy wyznacznika, dla jakich wartości parametru a wektory $\begin{pmatrix} a+1 \\ a \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 8 \\ a+3 \end{pmatrix}$ są współliniowe.

6. Wyznacz wszystkie takie punkty, których odległość od prostej o równaniu $x - y + 3 = 0$ wynosi $\frac{\sqrt{2}}{2}$, zaś odległość od punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ wynosi $\sqrt{10}$.

7. Dane są wierzchołki $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ trójkąta ABC . Wyznacz wszystkie możliwe położenia wierzchołka C , jeśli pole trójkąta wynosi 3, a miara kąta α przy wierzchołku A spełnia warunek $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

2.1 PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE I AFINICZNE

Przekształcenia liniowe i afiniczne płaszczyzny. Przykłady: translacja, obrót, odbicie, rzut prostokątny, rzut ukośny, jednokładność, powinowactwo prostokątne, powinowactwo ścinające. Macierz przekształcenia liniowego.

ĆWICZENIA

- Ustal, kiedy następujące przekształcenie afiniczne jest przekształceniem liniowym:

(a) obrót	(b) odbicie	(c) jednokładność
(d) rzut (prostokątny)	(e) rzut ukośny	(f) powinowactwo prostokątne
(g) powinowactwo ścinające	(h) translacja	(i) symetria środkowa
- Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) przekształcenie zerowe,	(b) przekształcenie identycznościowe.
-----------------------------	---------------------------------------
- Napisz (korzystając z odpowiedniego wzoru) macierz obrotu wokół punktu O o kąt:

(a) 90°	(b) -90°	(c) -60°	(d) 180°	(e) 30°
----------------	-----------------	-----------------	-----------------	----------------

 Dla każdego obrotu zaznacz na rysunku obrazy punktów $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Napisz wzory następujących przekształceń afinicznych:

(a) translacja o wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,	(b) odbicie względem osi Ox ,
(c) odbicie względem osi Oy ,	(d) symetria środkowa względem punktu O ,
(e) jednokładność o środku O i skali -2 ,	(f) jednokładność o środku O i skali $\frac{1}{2}$,
(g) powinowactwo prostokątne o osi Ox i skali 2 ,	(h) powinowactwo prostokątne o osi Oy i skali 2 ,
(i) powinowactwo ścinające o osi Ox i wektorze $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,	(j) powinowactwo ścinające o osi Oy i wektorze $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

 W przypadku przekształceń liniowych, podaj macierz przekształcenia.
- Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) rzut (prostokątny) na prostą o równaniu $2x + y = 0$,
(b) odbicie względem prostej o równaniu $2x + y = 0$,
(c) powinowactwo prostokątne o skali -2 i osi o równaniu $2x + y = 0$,
(d) powinowactwo prostokątne o skali $\frac{1}{2}$ i osi o równaniu $2x + y = 0$,
(e) rzut ukośny na prostą o równaniu $2x + y = 0$ w kierunku wektora $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
(f) powinowactwo ścinające o osi będącej prostą o równaniu $2x + y = 0$ i wektorze $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- Znajdź obrazy punktów $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ przez każde z przekształceń z ćwiczenia 5.
- Jeśli rzut prostokątny na prostą ℓ potraktujemy jako szczególny przypadek rzutu ukośnego na prostą ℓ , to jaki wektor będzie kierunkiem rzutu?
- Uzasadnij, że każda z poniższych par składa się z dwóch równych (jednakowych) przekształceń płaszczyzny:

(a) obrót o kąt $-\theta$ wokół punktu S i obrót o kąt $2\pi - \theta$ wokół punktu S ,
(b) symetria środkowa o środku S i obrót o kąt π wokół punktu S ,
(c) jednokładność o skali 1 i identyczność.

ZADANIA

1. Napisz w postaci $R(X) = AX + v$ wzór obrotu wokół punktu $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ o kąt:

- (a) 90° (b) -90° (c) -60° (d) 180° (e) 30°

Porównaj otrzymane macierze A z macierzami obrotu o ten sam kąt wokół punktu O (otrzymanymi w ćwiczeniu 3). Dla każdego obrotu zaznacz na rysunku obrazy punktów $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

- | | |
|--|--|
| (a) translacja o wektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, | (b) odbicie względem prostej $y = 2$, |
| (c) odbicie względem prostej $x = 3$, | (d) symetria środkowa względem punktu $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, |
| (e) jednokładność o środku $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i skali -2 , | (f) jednokładność o środku $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i skali $\frac{1}{2}$, |
| (g) powinowactwo prostokątne o osi $y = 2$ i skali 2, | (h) powinowactwo prostokątne o osi $x = 3$ i skali 2, |
| (i) powinowactwo ścinające o osi $y = 2$ i wektorze $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, | (j) powinowactwo ścinające o osi $x = 3$ i wektorze $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. |

Porównaj otrzymane macierze A z macierzami z ćwiczenia 4.

3. Niech ℓ będzie prostą o równaniu $3x - y + 2 = 0$. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

- (a) rzut (prostokątny) na prostą ℓ
 (b) odbicie względem prostej ℓ ,
 (c) powinowactwo prostokątne o skali 4 i osi ℓ ,
 (d) powinowactwo prostokątne o skali $-\frac{1}{3}$ i osi ℓ ,

4. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzór rzutu ukośnego na prostą o równaniu $4x - 3y + 1 = 0$ w kierunku wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzór powinowactwa ścinającego o osi $3x + 4y - 1 = 0$ i wektorze $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6. Znajdź obrazy punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ przez każde z przekształceń z zadania 2.

7. Znajdź rzut (prostokątny) punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ na prostą o równaniu $x + y + 1 = 0$, a następnie punkt symetryczny do punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ względem tej prostej.

8. Uzasadnij, że każda z poniższych par składa się z dwóch równych (jednakowych) przekształceń płaszczyzny:

- (a) symetria środkowa o środku S i jednokładność o środku S i skali -1 ,
 (b) odbicie względem prostej ℓ i powinowactwo prostokątne o osi ℓ i skali -1 ,
 (c) powinowactwo prostokątne o skali 1 i identyczność

9. *Odbiciem z poślizgiem o osi ℓ i wektorze v (równoległym do ℓ) nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które każdy punkt płaszczyzny przesuwamy o wektor v , a następnie odbijamy względem prostej ℓ . Napisz wzór odbicia z poślizgiem o osi $x + y + 1 = 0$ i wektorze $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2.2 MACIERZE

Macierze. Dodawanie macierzy i mnożenie macierzy przez skalar. Mnożenie macierzy. Addytywność i jednorodność przekształcenia. Wyznaczanie macierzy przekształcenia liniowego na podstawie obrazów dwóch punktów. Punkty stałe przekształcenia.

ĆWICZENIA

1. Oblicz $2A + B$, $3C - B + A$, $A - C$, $A + B + C$, gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ustal, które pary poniższych macierzy można pomnożyć i wykonaj te mnożenia. Pamiętaj, że mnożenie macierzy nie jest przemienne.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (2 \quad 7 \quad 1) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (3 \quad -1) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Sprawdź, że macierz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ma tę własność, że dla dowolnej macierzy A rozmiaru 2×2 zachodzi $A \cdot I = I \cdot A = A$ oraz że dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $I \cdot v = v$.

4. Sprawdź, że dla dowolnego wektora X zachodzi warunek $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} X = aX$.

5. O przekształceniu liniowym $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ oraz $F(v) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u + v)$, $F(u - v)$ i $F(2u + 3v)$.

6. O przekształceniu liniowym $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(u + v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $F(u - v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u)$ i $F(v)$.

7. Znajdź macierz przekształcenia liniowego przeprowadzającego punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ odpowiednio na $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. Wyznacz (bez żadnych rachunków) obrazy wektorów oraz macierze następujących przekształceń liniowych:

- | | |
|---|---|
| (a) symetria środkowa względem O , | (b) odbicie względem osi Ox , |
| (c) odbicie względem osi Oy , | (d) obrót o -90° wokół O , |
| (e) jednokładność o środku O i skali 2, | (f) powinowactwo prostokątne o osi Ox i skali $\frac{1}{2}$. |

9. Ile jest takich przekształceń liniowych płaszczyzny, które punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ przekształcają odpowiednio na punkty $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$? Znajdź je wszystkie.

10. Ile jest takich przekształceń afinicznych płaszczyzny, które punkty $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ przeprowadzają odpowiednio na punkty $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$? Wyznacz wszystkie takie przekształcenia.

11. Wyznacz (bez żadnych obliczeń) wszystkie punkty stałe każdego z przekształceń z ćwiczeń 4–5 do rozdziału 2.1.

ZADANIA

- Macierz postaci $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ nazywamy *macierzą diagonalną*. Co się dzieje z wierszami lub kolumnami macierzy 2×2 , jeśli pomnożymy ją przez macierz diagonalną D :
 - z lewej strony,
 - z prawej strony.
- Sprawdź, że jeśli $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, to dla dowolnej macierzy B rozmiaru 2×2 zachodzi warunek $A \cdot B = B \cdot A$. Wytlumacz, powołując się na poprzednie zadanie.
- Co się dzieje z wierszami lub kolumnami macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, jeśli pomnożymy ją:
 - z lewej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 - z prawej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 - z lewej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
 - z prawej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Uzasadnij, że jeśli $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem liniowym, u i v dowolnymi wektorami, zaś α i β dowolnymi skalarami, to zachodzi wzór $F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$. W szczególności uzasadnij, że $F(u - v) = F(u) - F(v)$.
- O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(u + 2v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ oraz $F(u + v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u)$, $F(v)$ i $F(4u + 3v)$.
- Wyznacz obrazy wektorów oraz macierze następujących przekształceń liniowych:
 - symetria względem prostej $y + x = 0$,
 - rzut (prostopadły) na prostą $y = x$,
 - rzut ukośny w kierunku wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ na prostą $y = x$,
 - symetria względem prostej nachylonej do osi Ox pod kątem 15° .
- Dane jest przekształcenie liniowe F , takie że $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $F(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz $F(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix})$:
 - korzystając z addytywności i jednorodności F ,
 - rozwiązując układ równań.
- Znajdź przekształcenie liniowe, które punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ przeprowadza odpowiednio na $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Ile jest takich przekształceń afinicznych płaszczyzny, które punkty $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ przekształcają odpowiednio na punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? Wyznacz wszystkie takie przekształcenia.
- Wyznacz (bez żadnych obliczeń) wszystkie punkty stałe każdego z przekształceń z zadań 2 i 3 do rozdziału 2.1.
- Znajdź wszystkie punkty stałe każdego z poniższych przekształceń afinicznych:
 - $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,
 - $G(X) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,
 - $H(X) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} X$.

12. Podaj dużo przykładów przekształceń afinicznych oraz przekształceń liniowych, dla których zbiór punktów stałych jest:
- (a) punktem, (b) prostą, (c) płaszczyzną.
13. Znajdź taki punkt X , który jest przeprowadzany przez przekształcenie F na punkt $(\frac{5}{2})$, gdzie przekształcenie F jest zdefiniowane wzorem $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$.
14. Wzór pewnego obrotu ma postać: $F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt stały tego przekształcenia, a następnie podaj:
- (a) środek tego obrotu, (b) kąt tego obrotu.
15. Wzór pewnego odbicia ma postać: $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Znajdź punkty stałe tego przekształcenia, a następnie podaj oś odbicia.
16. *Uzasadnij, że obrót o kąt θ wokół punktu P ma wzór $F(X) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} X + v$ dla pewnego wektora v (zależnego od wyboru punktu P).

2.3 SKŁADANIE PRZEKSZTAŁCEŃ

Składanie przekształceń liniowych i afinicznych. Składanie przekształceń liniowych a mnożenie macierzy. Rozkład przekształcenia afinicznego na przekształcenie liniowe i translację.

ĆWICZENIA

1. Niech T_v oznacza translację o wektor $v = (\frac{4}{2})$, S_x i S_y odbicia względem osi, odpowiednio, Ox i Oy , S_ℓ symetrię względem prostej ℓ o równaniu $x = y$, S_O i S_A symetrie środkowe o środkach $O = (\frac{0}{0})$ i $A = (\frac{1}{1})$. Napisz wzory następujących przekształceń liniowych:

- (a) $T_v \circ T_v$ (b) $S_x \circ S_O$ oraz $S_O \circ S_x$
 (c) $T_v \circ S_x$ oraz $S_x \circ T_v$ (d) $S_O \circ T_v$ oraz $T_v \circ S_O$
 (e) $S_O \circ S_A$ oraz $S_A \circ S_O$

2. Niech R_θ oznacza obrót o kąt θ wokół punktu $O = (\frac{0}{0})$. Ustal (bez wykonywania rachunków) czym jest złożenie:

- (a) $R_{90^\circ} \circ R_{90^\circ}$ (b) $R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ}$ (c) $R_{30^\circ} \circ R_{-60^\circ}$

a następnie potwierdź to odpowiednim rachunkiem na macierzach.

3. Uzasadnij, że złożenie dwóch obrotów wokół tego samego punktu jest obrotem. Jaki jest kąt tego obrotu?

4. Znajdź macierze przekształceń liniowych $F \circ G$ i $G \circ F$ oraz $G \circ H$ i $H \circ G$, gdzie:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X, \quad G(X) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad H(X) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

5. Przedstaw przekształcenie F w postaci złożenia $T_v \circ G$, gdzie G jest przekształceniem liniowym, a T_v translacją, jeśli:

- (a) $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
 (c) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Przedstaw każde z następujących przekształceń afinicznych w postaci $T_v \circ F \circ T_{-v}$, gdzie T_v i T_{-v} to translacje o wektor, odpowiednio, v i $-v$, natomiast F to przekształcenie liniowe.

- (a) obrót wokół punktu $A = (\frac{1}{1})$ o kąt 90° ,
 (b) symetria środkowa względem punktu $B = (\frac{3}{1})$.

ZADANIA

1. Wyznacz wzory następujących złożenia przekształceń liniowych (gdzie S_ℓ oznacza odbicie względem prostej ℓ , P_ℓ – rzut na prostą ℓ , zaś R_θ – obrót o kąt θ wokół O). Napisz macierze tych złożenia.

- (a) $S_l \circ R_{90^\circ}$ oraz $R_{90^\circ} \circ S_l$, gdzie l jest prostą o równaniu $x + 2y = 0$
 (b) $S_l \circ P_k$ oraz $P_k \circ S_l$, gdzie l ma równanie $x + 2y = 0$, a k ma równanie $3x - 4y = 0$

2. Znajdź wzory przekształceń afinicznych $F \circ G$, $G \circ F$, $F \circ H$ i $H \circ F$, gdzie:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad H(X) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X$$

3. Przedstaw każde z przekształceń afinicznych z ćwiczenia 5 w postaci złożenia $G \circ T_u$, gdzie G jest przekształceniem liniowym, a T_u translacją.
4. Napisz wzór jednokładności D_1 o środku $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i skali k oraz jednokładności D_2 o środku $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i skali l , a następnie wzór złożenia $D_1 \circ D_2$. Czy złożenie tych jednokładności może być translacją?
5. Sprawdź, że złożenie symetrii środkowych o środkach A i B jest translacją o wektor $2\overrightarrow{AB}$ lub $2\overrightarrow{BA}$ (w zależności od kolejności złożień).
6. Napisz macierz odbicia S_y względem osi Oy oraz macierz odbicia S_ℓ względem prostej $x+y=0$, a następnie macierze przekształceń $S_y \circ S_\ell$ i $S_\ell \circ S_y$. Rozpoznaj jakimi przekształceniami są te złożenia.
7. Wskaż (możliwie dużo i możliwie różnorodnych) przykładów takich przekształceń afinicznych F , że $F \circ F = \text{Id}$.
8. Dla danego przekształcenia F znajdź takie przekształcenie G , że $F \circ G = \text{Id}$. Sprawdź, czy prawdą jest, że $G \circ F = \text{Id}$:
- (a) $F = R_\theta$ (obrot), (b) $F = S_\ell$ (odbicie), (c) $F = T_v$ (translacja).
9. Przekształć każde z następujących przekształceń afinicznych w postaci $T_v \circ F \circ T_{-v}$, gdzie T_v i T_{-v} to translacje o wektor, odpowiednio, v i $-v$, natomiast F to przekształcenie liniowe.
- (a) jednokładność o środku $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i skali 2,
 (b) odbicie względem prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$,
 (c) rzut (prostokątny) na prostą o równaniu $x + y + 1 = 0$,
 (d) powinowactwo prostokątne o osi $x + y + 1 = 0$ i skali 3.
10. *Podaj przykład dwóch obrotów R_1 i R_2 wokół różnych punktów o kąty inne niż 0 i π tak, aby $R_1 \circ R_2$ było translacją.
11. *Uzasadnij, że jeśli k i l są prostymi równoległymi, to $S_k \circ S_l$ jest translacją. Jaki będzie wektor tej translacji? Czy $S_k \circ S_l = S_l \circ S_k$?
12. *Uzasadnij, że jeśli k i l są prostymi przecinającymi się, to $S_k \circ S_l$ jest obrotem. Jaki będzie kąt tego obrotu? Czy $S_k \circ S_l = S_l \circ S_k$?

2.4 IZOMETRIE

Izometrie płaszczyzny. Izometrie liniowe. Macierz izometrii. Klasyfikacja izometrii liniowych. Geometryczna interpretacja wyznacznika przekształcenia liniowego. Przekształcenia zachowujące i zmieniające orientację.

ĆWICZENIA

1. Rozstrzygnij które z poniższych macierzy są macierzami izometrii:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ustal, które z izometrii z poprzedniego ćwiczenia zachowują, a które zmieniają orientację.

3. Podaj dużo przykładów przekształceń, które są:

- | | |
|--|--|
| (a) izometriami liniowymi, | (b) izometriami, które nie są liniowe, |
| (c) liniowe, ale nie są izometriami, | (d) afiniczne, ale nie są liniowe, |
| (e) afiniczne, ale nie są izometriami. | |

4. Czy jednokładność o skali ujemnej zachowuje czy zmienia orientację?

ZADANIA

1. Uzupełnij następujące macierze do macierzy izometrii (na wszystkie możliwe sposoby):

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

2. Rozstrzygnij, które z następujących macierzy izometrii są macierzami obrotu, a które macierzami symetrii. W przypadku obrotu ustal kąt obrotu, a w przypadku symetrii ustal oś symetrii.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Podaj przykład przekształcenia liniowego:

- (a) które zachowuje kąty, ale nie jest izometrią;
 (b) które zachowuje pola, ale nie jest izometrią;
 (c) które zachowuje pola i przeprowadza wektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na siebie, ale nie jest izometrią.

4. Znajdź wszystkie izometrie liniowe, które przeprowadzają punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ na punkt $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, a następnie napisz ich macierze.

5. Sprawdź, które z poniższych przekształceń zachowują pole i które zachowują orientację.

$$(a) F(X) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X, \quad (b) G(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X, \quad (c) H(X) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} X.$$

6. Dla każdego z przekształceń liniowych z zadania 5 narysuj obraz kwadratu rozpiętego przez wektory. Oblicz pole otrzymanego równoległoboku i porównaj z wyznacznikiem macierzy.

7. Korzystając z twierdzenia o klasyfikacji izometrii liniowych uzasadnij, że złożenie dwóch symetrii względem przecinających się prostych jest obrotem.
8. Uzasadnij, że złożenie dwóch przekształceń zmieniających orientację lub dwóch przekształceń zachowujących orientację jest przekształceniem zachowującym orientację. Jaka będzie odpowiedź w przypadku złożenia przekształcenia zachowującego orientację z przekształceniem zmieniającym orientację?
9. Czy powinowactwo prostokątne zachowuje czy zmienia orientację?
10. Uzasadnij, że:
 - (a) izometria liniowa płaszczyzny zachowująca orientację jest obrotem,
 - (b) izometria liniowa zmieniająca orientację jest odbiciem względem prostej.Czy podobne fakty są prawdziwe dla izometrii, która nie jest liniowa?
11. *Uzasadnij, że:
 - (a) złożenie izometrii jest izometrią,
 - (b) złożenie izometrii liniowych jest izometrią liniową.
12. *Dane jest izometria płaszczyzny o wzorze $F(X) = AX + v$. Znajdź taką translację T , że $T \circ F$ jest izometrią liniową oraz wywnioskuj stąd, że A jest macierzą izometrii.

2.5 PRZEKSZTAŁCENIA RÓŻNOWARTOŚCIOWE I „NA”

Przekształcenia liniowe $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Przekształcenia różnowartościowe i „na”. Obraz i przeciwobraz.

ĆWICZENIA

- Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:
 - $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana odległość X od prostej $2x - 3y = 0$,
 - $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowane pole trójkąta OAX , gdzie $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ X$,
 - $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $F(t) = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(t) = 2t$.
- Wyznacz obraz punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ przez przekształcenia (a)–(c) z ćwiczenia 1 oraz obraz punktu 4 przez przekształcenia (d)–(e) z ćwiczenia 1.
- Wyznacz przeciwobraz punktu 2 przez przekształcenia (a)–(c) i (e) z ćwiczenia 1 oraz przeciwobraz punktu $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ przez przekształcenie (d) z ćwiczenia 1.
- Podaj przykład przekształcenia liniowego F płaszczyzny oraz punktu płaszczyzny, którego przeciwobraz przez przekształcenie F jest:
 - zbiorem pustym,
 - punktem,
 - prostą,
 - płaszczyzną.
- Wyznacz obraz punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ przez następujące przekształcenia afiniczne płaszczyzny:
 - symetria środkowa względem punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - odbicie względem osi Ox ,
 - przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X$,
 - przekształcenie $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Wyznacz przeciwobrazy punktów $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ przez następujące przekształcenia afiniczne płaszczyzny:
 - rzut (prostokątny) na oś Ox ,
 - odbicie względem punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$,
 - przekształcenie $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- Sprawdź, które z poniższych przekształceń płaszczyzny są różnowartościowe, a które są „na”:
 - symetria względem punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
 - powinowactwo prostokątne względem prostej $x + y = 0$ o skali 2,
 - rzut ukośny wzdłuż wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ na prostą o równaniu $x + y = 0$,
 - przekształcenie zerowe.

ZADANIA

- Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:
 - $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana odległość X od prostej $ax + by = 0$,
 - $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowane pole trójkąta OAX , gdzie $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,
 - $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \circ X$,
 - $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $F(t) = t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$,
 - $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(t) = at$.
- Wyznacz obraz punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ przez przekształcenia (a)–(c) z zadania 1 oraz obraz punktu 2 przez przekształcenia (d)–(e) z zadania 1.
- Wyznacz przeciwobraz punktu 0 przez przekształcenia (a)–(c) i (e) z zadania 1.
- Wyznacz przeciwobraz punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ przez przekształcenie (d) z zadania 1, w zależności od wartości parametrów p i q .
- Wyznacz obraz punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ przez następujące przekształcenia afiniczne płaszczyzny:
 - symetria środkowa względem punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - odbicie względem osi Ox ,
 - przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X$,
 - przekształcenie $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Wyznacz przeciwobrazy punktów $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ przez następujące przekształcenia afiniczne płaszczyzny:
 - rzut (prostokątny) na prostą o równaniu $x + y - 2 = 0$,
 - odbicie względem prostej o równaniu $x = y$,
 - przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$,
 - przekształcenie $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wzorze $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Sprawdź, które z poniższych przekształceń są różnowartościowe, a które są „na”:
 - $R_\theta^P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będące obrotem wokół punktu P o kąt θ ,
 - $P_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będące rzutem (prostokątnym) na prostą ℓ ,
 - $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $F(X) = P$, gdzie P jest danym punktem,
 - $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowane pole trójkąta OAX , gdzie A jest danym punktem,
 - $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $F(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- *Uzasadnij, że jeśli przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ są różnowartościowe, to $F \circ G$ też jest różnowartościowe. Znajdź przykład pokazujący, że $F \circ G$ nie musi być różnowartościowe, jeśli tylko jedno z przekształceń F i G jest różnowartościowe.
- *Uzasadnij, że jeśli przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ są „na”, to $F \circ G$ też jest „na”. Znajdź przykład pokazujący, że $F \circ G$ nie musi być „na”, jeśli tylko jedno z przekształceń F i G jest „na”.

2.6 PRZEKSZTAŁCENIA ODWROTNE

Przekształcenie odwrotne. Macierz odwrotna. Transpozycja macierzy. Równania macierzowe.

ĆWICZENIA

1. Znajdź macierze odwrotne do podanych niżej macierzy i sprawdź (wykonując odpowiednie mnożenia), że faktycznie są one macierzami odwrotnymi:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Znajdź macierze transponowane do każdej z podanych niżej macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (3 \quad 1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Podaj kilka przykładów symetrycznych macierzy 2×2 , a następnie napisz ogólną postać symetrycznej macierzy 2×2 .

4. Oblicz AB^{-1} , $A^{-1}B$, $A^{-1}B^{-1}$ oraz $A^T B$ i AB^T , gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Rozwiąż następujące równania macierzowe:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. Rozstrzygnij czym są przekształcenia odwrotne do obrotu $R_{\pi/3}$, jednokładności $D_{\frac{1}{2}}$, jednokładności D_{-2} , symetrii $S_{x=y}$. Napisz macierz każdego z tych przekształceń oraz przekształcenia doń odwrotnego.

7. Napisz wzór przekształcenia odwrotnego do każdego z poniższych przekształceń liniowych:

$$(a) F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \quad (b) G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X \quad (c) H(X) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

8. Sprawdź, że każda z poniższych macierzy jest macierzą izometrii, a następnie wyznacz macierze do nich odwrotne:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ZADANIA

1. Ustal rozmiary macierzy A , B i C i rozwiąż poniższe równania macierzowe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Znajdź macierz 2×2 spełniającą następujące równanie:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Oblicz iloczyn $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, a następnie (bez wykonywania żadnych dodatkowych rachunków) podaj wynik mnożenia macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Napisz wzór przekształcenia liniowego, które przeprowadza punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ na punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, a punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zrób to na dwa sposoby:
- rozwiązując układ 4 równań z 4 niewiadomymi
 - rozwiązując jedno równanie macierzowe i korzystając z zadania 3

5. Znajdź takie przekształcenie afiniczne płaszczyzny, które jest odwrotne do przekształcenia:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Wyznacz (bez żadnych rachunków) przekształcenia odwrotne do następujących przekształceń afinicznych płaszczyzny lub uzasadnij, że przekształcenie odwrotne nie istnieje:
- translacja o wektor v ,
 - rzut (prostokątny) na prostą ℓ ,
 - odbicie względem prostej ℓ ,
 - symetria środkowa o środku S ,
 - obróć o kąt θ wokół punktu S ,
 - jednokładność o środku S i skali $k \neq 0$,
 - powinowactwo prostokątne o osi ℓ i skali $k \neq 0$,
 - powinowactwo ścinające o osi ℓ i wektorze v ,
 - przekształcenie stałe,
 - przekształcenie identycznościowe,
 - rzut ukośny na prostą ℓ w kierunku wektora v .

7. Udowodnij, że jeśli (różnowartościowe) przekształcenie liniowe F zmienia orientację, to przekształcenie odwrotne F^{-1} również.

8. Przekształcenie liniowe F zwiększa wszystkie pola 2 razy. Jak skaluje pola przekształcenie odwrotne F^{-1} ?

9. Zapisz każdą z poniższych liczb:

$$2x^2 + 4xy + y^2 \quad -x^2 + 7xy \quad 3x^2 - 8xy + y^2 \quad ax^2 + bxy + cy^2$$

jako iloczyn (w odpowiedniej kolejności) wektorów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top$ oraz macierzy symetrycznej.

10. Przeprowadź dowód faktu $(AB)^\top = B^\top \cdot A^\top$ dla macierzy 2×2 .

11. Uzasadnij, że jeśli X jest wektorem, a A macierzą symetryczną 2×2 , to $(X^\top A X)^\top = X^\top A X$.

12. Rozstrzygnij, czy macierz odwrotna do symetrycznej macierzy 2×2 zawsze jest macierzą symetryczną.

13. Czy iloczyn symetrycznych macierzy 2×2 jest zawsze macierzą symetryczną? Jeśli tak, podaj uzasadnienie. Jeśli nie, podaj kontrprzykład.

3.1 WARTOŚCI WŁASNE I WEKTORY WŁASNE

Wartości własne i wektory własne. Wielomian charakterystyczny. Wzory Viete'a.

ĆWICZENIA

1. Sprawdź, które z wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ są wektorami własnymi macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Wyznacz wielomiany charakterystyczne, wartości własne i wektory własne następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Wyznacz wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (zwanej macierzą diagonalną).
4. Znajdź (bezpośrednio z definicji) wszystkie wartości własne i wektory własne jednokładności o skali 5 i środku 0 oraz przekształcenia identycznościowego.
5. Dla jakich wartości parametru p macierz $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ma dwie wartości własne?
6. O każdej z poniższych macierzy wiadomo, że mają dwie wartości własne. Ustal jakie znaki mają te wartości własne (bez ich wyliczania).

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ZADANIA

1. Znajdź (bezpośrednio z definicji) wszystkie wartości własne i wektory własne przekształcenia zerowego oraz symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.
2. Znajdź (bezpośrednio z definicji) wszystkie wartości własne i wektory własne powinowactwa prostokątnego o skali $k \neq 0$ i osi ℓ .
3. Jakie wartości własne może mieć izometria liniowa? Podaj wszystkie możliwości i każdą zilustruj przykładem.
4. Uzasadnij, że przekształcenie liniowe, które ma wartość własną zero nie jest różnowartościowe.
5. Wyznacz wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (zwanej macierzą górnotrójkątną). Czym różni się przypadek $a \neq b$ od przypadku $a = b$?
6. Ustal liczbę wartości własnych macierzy $\begin{pmatrix} 1 & p \\ -p & 3 \end{pmatrix}$ w zależności od wartości parametru p .
7. Ustal jaki ślad i wyznacznik ma macierz o wielomianie charakterystycznym $\lambda^2 - 4\lambda + 5$, a następnie napisz macierz o takim wielomianie charakterystycznym.

8. Udowodnij (indukcyjnie), że dla dowolnych rzeczywistych a i b i dowolnego n naturalnego zachodzi wzór: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$
9. Udowodnij, że jeśli przekształcenie liniowe F spełnia warunek $F(u + v) = F(u - v)$ dla pewnych niezerowych wektorów u i v , to v jest wektorem własnym F . Dla jakiej wartości własnej?
10. Macierz A spełnia warunek $A^2 = A$. Jakie wartości własne może mieć ta macierz?
11. Przekształcenie liniowe F spełnia warunek $F \circ F = F$. Jakie wartości własne może mieć to przekształcenie? Podaj przynajmniej trzy przykłady przekształceń spełniających ten warunek. Zauważ związek tego zadania z poprzednim.
12. Uzasadnij, że jeżeli v jest (niezerowym) wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej λ , to v jest też wektorem własnym macierzy A^2 dla wartości własnej λ^2 .
13. Uzasadnij, że jeżeli v jest (niezerowym) wektorem własnym przekształcenia F dla wartości własnej λ , to v jest też wektorem własnym przekształcenia $F \circ F$ dla wartości własnej λ^2 . Zauważ związek tego zadania z poprzednim.
14. *Uzasadnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym spełniającym warunek $F \circ F = 0$, to F nie ma niezerowych wartości własnych.
15. *Niech v będzie (niezerowym) wektorem własnym zarówno dla przekształcenia liniowego F , jak i dla przekształcenia liniowego G . Uzasadnij, że v jest wektorem własnym dla przekształcenia $F \circ G$.
16. *Uzasadnij, że jeśli v jest (niezerowym) wektorem własnym dla przekształcenia liniowego F oraz dla G jest takim przekształceniem liniowym, że zachodzi warunek $G \circ F = F \circ G$, to $G(v)$ też jest wektorem własnym dla F .

3.2 DIAGONALIZACJA MACIERZY

Diagonalizacja macierzy. Zastosowania diagonalizacji (potęgowania macierzy, wyznaczanie macierzy przekształcenia liniowego, rozwiązywanie rekurencji liniowych). Twierdzenie spektralne.

ĆWICZENIA

1. Ustal, które z poniższych macierzy są diagonalizowalne i je zdiagonalizuj (tzn. zapisz w postaci PDP^{-1} , gdzie D jest macierzą diagonalną):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Oblicz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{10}$ oraz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{30}$.
3. Podaj trzy przykłady macierzy 2×2 , które mają wszystkie wyrazy dodatnie i o których można (bez żadnych rachunków) stwierdzić, że mają dwie wartości własne.
4. Napisz diagonalizację jakiegokolwiek macierzy, która ma wartości własne 2 i 1. Wyznacz w ten sposób macierz, która ma wartości własne 2 i 1.
5. Ustal dla jakiej wartości parametru b macierz górnotrójkątna $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ jest diagonalizowalna.

ZADANIA

1. Oblicz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{100}$ oraz $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^n$.
2. Znajdź macierz przekształcenia liniowego płaszczyzny, które ma wartości własne 2 i 3 oraz odpowiadające im wektory własne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wskazówka: napisz diagonalizację szukanej macierzy.
3. Podaj dwa przykłady macierzy, które mają tylko jedną wartość własną i nie są diagonalizowalne oraz dwa przykłady macierzy, które mają tylko jedną wartość własną, ale są diagonalizowalne.
4. Znajdź wartości i wektory własne, a następnie napisz macierz każdego z przekształceń:
 - (a) odbicie względem prostej o równaniu $2x + 5y = 0$,
 - (b) rzut prostopadły na prostą o równaniu $7x - 2y = 0$.
5. Znajdź wartości i wektory własne, a następnie napisz macierz rzutu ukośnego na prostą o równaniu $2x + 3y = 0$ wzdłuż wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
6. Korzystając z jednorodności uzasadnij, że jeśli v jest wektorem własnym przekształcenia liniowego F dla wartości własnej λ , to tv (gdzie t jest dowolnym skalarą) też jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ .
7. Korzystając z addytywności uzasadnij, że jeśli u i v są wektorami własnymi przekształcenia liniowego F dla wartości własnej λ , to $u + v$ też jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ .
8. Uzasadnij, że jeśli P i D to macierze 2×2 i P jest odwracalna, to $\det(PDP^{-1}) = \det D$.

9. Udowodnij, że jeśli A , D , P są macierzami 2×2 , macierz D jest diagonalna, a macierz P jest odwracalna, to zachodzą wzory:

$$(a) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \quad (b) (PDP^{-1})^T = (P^T)^{-1}DP^T, \quad (c) (PDP^T)^T = PDP^T.$$

10. Dla każdej z poniższych rekurencji liniowych:

(a) oblicz setny wyraz ciągu $(a_{100}, b_{100}, c_{100})$,

(b) zapisz wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n, b_n, c_n) .

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_1 = 5 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = 2 \\ b_1 = 5 \\ b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n \end{cases}$$

4.1 NOWY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

Nowy układ współrzędnych (prostokątny i nieprostokątny). Współrzędne wektora w starym i nowym układzie. Równanie prostej w starym i nowym układzie współrzędnych. Macierz przekształcenia w starych i nowych współrzędnych. Macierz przekształcenia w układzie wyznaczonym przez wektory własne.

ĆWICZENIA

1. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Narysuj nowy układ współrzędnych i zaznacz wektory v i w takie, że $[v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $[w]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Narysuj nowy układ współrzędnych (nie jest to układ prostokątny!) i zaznacz wektory e'_1 , e'_2 , $2e'_1 + 3e'_2$. Jakie są nowe współrzędne każdego z tych wektorów?
3. Wektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Jakie współrzędne mają wektory $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ w nowym układzie?
4. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź stare współrzędne wektorów v i w , dla których $[v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $[w]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
5. Ustal które z układów współrzędnych wprowadzonych w ćwiczeniach 1–4 są układami prostokątnymi.
6. Wersory nowego układu współrzędnych spełniają warunek: $e'_1 = -e_1$, $e'_2 = 2e_2$. Jakie są nowe współrzędne wektora v , dla którego $[v]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?
7. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Napisz w nowych współrzędnych równanie prostej, która w starych współrzędnych ma równanie $x + 2y = 0$.
8. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Napisz w starych współrzędnych równanie prostej, która w nowych współrzędnych ma równanie $3x' - y' = 0$.
9. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ma wartości własne $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -3$, a odpowiadające im wektory własne to (odpowiednio) $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Napisz macierz $m_{\text{nowy}}(F)$ przekształcenia F w nowym układzie współrzędnych, którego wersorami są v_1 i v_2 .

ZADANIA

1. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź stare współrzędne wektorów v i w , dla których $[v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ i $[w]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.
2. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź nowe współrzędne wektorów v i w , dla których $[v]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $[w]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź nowe współrzędne starych wersorów oraz stare współrzędne nowych wersorów.
4. Znajdź taki układ współrzędnych (tzn. wyznacz jego wersory), by wektory $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ w nowym układzie miały współrzędne $[v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[w]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. Znajdź taki prostokątny układ współrzędnych (tzn. wyznacz jego wersory), by wektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ miał nowe współrzędne $[v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Wersory nowego układu współrzędnych spełniają warunek: $e'_1 = 3e_1 - 2e_2$, $e'_2 = e_1 + 3e_2$. Jakie są nowe współrzędne wektora v , dla którego $[v]_{stary} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?
7. Wersory nowego układu współrzędnych spełniają warunek: $e_1 = e'_1 + 3e'_2$, $e_2 = e'_1 + e'_2$. Jakie są nowe współrzędne wektora v , dla którego $[v]_{stary} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?
8. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Wyznacz równanie każdej z poniższych prostych w nowych współrzędnych:
- (a) $3x + 2y = 0$ (b) $2x - 5y + 1 = 0$ (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
9. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Wyznacz w starym układzie współrzędnych równania prostych, które w nowych współrzędnych są zapisywane równaniami:
- (a) $2x' - 5y' = 0$ (b) $x' + y' + 1 = 0$ (c) $-3x' + 7y' - 1 = 0$
10. W nowym układzie współrzędnych macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest diagonalna. Co można powiedzieć o wersorach tego układu współrzędnych?
11. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w starych współrzędnych ma postać $m_{stary}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F w nowych współrzędnych.
12. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w nowych współrzędnych ma postać $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F w starych współrzędnych.

4.2 KRZYWE DRUGIEGO STOPNIA

Krzywe drugiego stopnia. Równanie elipsy i hiperboli. Równanie krzywej w nowym układzie współrzędnych.

ĆWICZENIA

1. Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych krzywe o następujących równaniach:

(a) $-x^2 + 2y^2 = 1$

(b) $x^2 + 2y^2 = 1$

(c) $x^2 - 2y^2 = 1$

2. Rozpoznaj krzywą opisaną poniższym równaniem oraz naszkicuj jej wykres:

(a) $2x^2 + 4y^2 = 1$

(b) $-\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$

(c) $x^2 - 4y^2 = 1$

3. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór opisany następującym równaniem:

(a) $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

(b) $2x^2 - 9y^2 + 4 = 0$

(c) $x^2 + 4y^2 + 1 = 0$

4. Czy istnieje macierz symetryczna, która nie ma żadnych wartości własnych?

5. Ustal znaki wartości własnych następujących macierzy symetrycznych:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Przedstaw w postaci X^TAX , gdzie A jest macierzą symetryczną, a $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ każdy z następujących wielomianów drugiego stopnia:

(a) $2x^2 - 4xy + 5y^2$

(b) $x^2 - 7y^2$

(c) $5x^2 - 7xy$

ZADANIA

1. Ustal czym jest zbiór punktów płaszczyzny opisany poniższymi równaniami. Spróbuj zminimalizować liczbę potrzebnych rachunków.

(a) $4x^2 + 3xy - 2y^2 = 1$

(b) $3x^2 - 2xy + y^2 = -2$

(c) $5x^2 - 4xy + y^2 = 4$

2. Sprawdź, że każde z poniższych równań jest równaniem elipsy, a następnie wyznacz długości półosi każdej z tych elips:

(a) $x^2 + xy + y^2 = 1$

(b) $2x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$

(c) $3x^2 - 3xy + y^2 = 1$

3. Rozpoznaj i narysuj krzywą opisaną równaniem:

(a) $-5x^2 + 24xy + 5y^2 = 1$

(b) $x^2 + xy + y^2 = 1$

(c) $-2x^2 + 12xy + 7y^2 = 1$

4. Czy istnieje macierz symetryczna 2×2 , która ma tylko jedną wartość własną? Co w takiej sytuacji można powiedzieć o zbiorze jej wektorów własnych?

5. Ustal jak wygląda zbiór punktów płaszczyzny opisany równaniem $Ax^2 + Cy^2 = 1$, gdy $A = 0$ lub $C = 0$.

6. Zdarzają się przypadki, że równanie drugiego stopnia zmiennych x i y (bez składników liniowych) opisuje niepusty zbiór inny niż elipsa i hiperbola. Rozstrzygnij czym jest zbiór punktów opisanych każdym z poniższych równań:

(a) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$

(b) $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

(c) $x^2 - y^2 = 0$

7. *Napisz równanie kwadratowe opisujące zbiór złożony z dwóch przecinających się prostych na płaszczyźnie: prostej $2x + y = 0$ i prostej $3x - 2y = 0$.
8. *Znajdź przekształcenie liniowe, które okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ przekształca na elipsę o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Posługując się wyznacznikiem tego przekształcenia wyprowadź wzór na pole obszaru ograniczonego tą elipsą.
9. *Krzywą drugiego stopnia, którą pominęliśmy w rozważaniach z uwagi na pominięcie składników liniowych jest parabola, czyli krzywa o równaniu $y = ax^2$. Napisz równanie paraboli $y = 2x^2$ w prostokątnym układzie współrzędnych o wersorach $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

5.1 LICZBY ZESPOLONE

Arytmetyka liczb zespolonych. Część rzeczywista i urojona. Przedstawienie trygonometryczne liczb zespolonej. Moduł i argument. Wzór de Moivre'a. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych. Postać wykładnicza liczby zespolonej.

ĆWICZENIA

1. Dane są liczby zespolone $z_1 = 2 + i$ oraz $z_2 = 3 - 2i$. Wykonaj następujące działania i wynik przedstaw w postaci $a + bi$.

(a) $z_1 z_2$ (b) z_1 / z_2 (c) z_2 / z_1 (d) z_1^{-1}
 (e) z_2^{-1} (f) z_1^2

2. Wyznacz część rzeczywistą i urojoną dla każdej z następujących liczb:

(a) $(2 + 3i)(1 - 5i)$ (b) $(1 - 2i)/(3 + i)$ (c) $(2 + 5i)^2$

3. Dla każdej z wymienionych poniżej liczb zespolonych znajdź moduł, argument, a następnie zapisz ją w postaci trygonometrycznej:

(a) $2i$
 (b) $-1 + i$
 (c) $4 - 4i$
 (d) $\sqrt{3} + i$
 (e) $-\sqrt{3} + i$

4. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczbę z oraz liczby $-z$, iz , $-z$, $z + (1 + i)$ dla każdej z następujących liczb:

(a) $z = 1 + i$ (b) $z = 2 + 3i$ (c) $z = 1 - 5i$ (d) $z = -3 + 2i$

Zauważ pewną prawidłowość.

5. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz następujące potęgi liczb zespolonych:

(a) $(1 - i)^{10}$ (b) $(-\sqrt{3} + i)^8$ (c) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^7$ (d) $(-\sqrt{3} + i)^{-1}$

6. Dla każdej z liczb 1 , i , -1 , $i + 1$, zaznacz na płaszczyźnie zespolonej (bez wyliczania części rzeczywistej i urojonej) wszystkie pierwiastki:

(a) stopnia 2 (b) stopnia 3 (c) stopnia 4

Zauważ pewną prawidłowość.

7. Korzystając z postaci trygonometrycznej wyznacz wszystkie pierwiastki:

(a) stopnia 2 z liczby $4i$ (b) stopnia 3 z liczby $8i$ (c) stopnia 4 z liczby -16

a następnie zaznacz je na płaszczyźnie zespolonej.

8. Zapisz wzór na iloczyn liczb zespolonych $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ i $(\cos \beta + i \sin \beta)$, a następnie porównaj części rzeczywiste i urojone lewej i prawej strony równości. Wyjaśnij jak można użyć tego wzoru do wyprowadzenia wzorów na $\cos(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha + \beta)$.

9. Zapisz wzór na iloraz liczb zespolonych $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ i $(\cos \beta + i \sin \beta)$ i (podobnie jak w poprzednim ćwiczeniu) użyj go do wyprowadzenia wzorów na $\cos(\alpha - \beta)$ i $\sin(\alpha - \beta)$.

ZADANIA

1. Uzasadnij następujące własności liczb zespolonych:
(a) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}z_1 + \operatorname{Re}z_2$ (b) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}z$
(c) $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}z_1 + \operatorname{Im}z_2$ (d) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}z$
2. Oblicz następujące potęgi liczb zespolonych:
(a) $(1 - i)^{40}$ (b) $(\sqrt{3} - i)^{10}$ (c) $(1 - i\sqrt{3})^{50}$
3. Wyznacz wszystkie pierwiastki:
(a) stopnia 3 z $2i$ (b) stopnia 3 z $-1 + i$ (c) stopnia 2 z $-4i$
4. Korzystając z postaci trygonometrycznej wyznacz wszystkie pierwiastki z 1:
(a) stopnia 2 (b) stopnia 3 (c) stopnia 4 (d) stopnia 6
a następnie zaznacz je na płaszczyźnie zespolonej.
5. Opisz geometrycznie przekształcenie $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ płaszczyzny zdefiniowane wzorem:
(a) $F(z) = iz$ (b) $F(z) = -z$ (c) $F(z) = z + (1 + i)$
6. Uzasadnij, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej t oraz dowolnej liczby zespolonej z zachodzi $|tz| = t \cdot |z|$ oraz $|-z| = |z|$.
7. Zapisz wzór na $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2$, a następnie porównaj części rzeczywiste i urojone lewej i prawej strony równości. Wyjaśnij jak w ten sposób można przypomnieć sobie wzory na $\cos(2\alpha)$ i $\sin(2\alpha)$.
8. W sposób podobny jak w poprzednim zadaniu wyprowadź (przy pomocy wzoru de Moivre'a) wzory na $\cos(3\alpha)$ i $\sin(3\alpha)$.
9. Udowodnij, że wszystkie pierwiastki stopnia n z 1 to liczby $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$, gdzie w jest pewnym pierwiastkiem z 1 (zwanym pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z 1).
10. Liczba $w \neq 1$ jest pierwiastkiem stopnia n z jedynki. Oblicz sumę następującego ciągu geometrycznego: $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}$.
11. *Udowodnij, że suma wszystkich pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z jest równa 0.

5.2 WIELOMIANY ZESPOLONE

Wielomiany zespolone. Zasadnicze twierdzenie algebry. Sprzężenie liczby zespolonej. Rozkład na czynniki wielomianów rzeczywistych i zespolonych. Macierze o zespolonych wartościach własnych.

ĆWICZENIA

- Rozwiąż następujące równania. Wynik zapisz w postaci $a + bi$.
 (a) $(1 + i)z + (2 + i) = (3 + 2i)$ (b) $(2 - i)z + (3 + 2i) = i$
- Rozwiąż następujące równania (w liczbach zespolonych). Wynik zapisz w postaci $a + bi$.
 (a) $z^2 + 2z + 2 = 0$ (b) $2z^2 - 3z + 2 = 0$
 (c) $z^2 + 4z + 8 = 0$ (d) $z^2 + iz - 1 = 0$
- Znajdź (zespolone) wartości własne i wektory własne następujących macierzy:
 (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Rozłóż na iloczyn czynników liniowych (zespolonych) następujące wielomiany:
 (a) $z^3 - 5z^2 + 8z - 6$ (b) $2z^3 - 9z^2 + 30z - 13$ (c) $z^3 + 7z^2 + 16z + 10$

ZADANIA

- Rozwiąż następujące układy równań:
 (a) $\begin{cases} (1 + i)z + iw = (1 + i) \\ iz + (1 - i)w = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} iz + (i - 2)w = (3 + i) \\ z + (2 + i)w = 1 \end{cases}$
- Przy pomocy diagonalizacji macierzy oblicz:
 (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{10}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{15}$
- Rozłóż na iloczyn zespolonych czynników liniowych oraz na iloczyn rzeczywistych czynników liniowych lub kwadratowych poniższe wielomiany, wiedząc, że podana liczba z_0 jest jednym z pierwiastków.
 (a) $z^4 - 2z^3 + 10z^2 + 6z + 65$, $z_0 = 2 + 3i$, (b) $z^4 + 4$, $z_0 = 1 + i$
- Udowodnij następujące własności sprzężenia liczby zespolonej:
 (a) $|\bar{z}| = |z|$ (b) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (c) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
 (d) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ (e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (f) $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
- Uzasadnij, że wzory $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$ oraz $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$ są prawdziwe również dla macierzy 2×2 , która ma zespolone wartości własne. Wykorzystaj te wzory do napisania macierzy o wyrazach rzeczywistych, których wartości własne są równe $\lambda_1 = 3 + 2i$ oraz $\lambda_2 = 3 - 2i$.
- Napisz macierz obrotu o kąt θ , a następnie wyznacz wartości i wektory własne tej macierzy. Jakie są moduły i argumenty tych wartości własnych?
- *Wykorzystaj diagonalizację macierzy o zespolonych wartościach własnych do wyprowadzenia zwanego wzoru ciągu zadanego rekurencją:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, \text{ gdy } n \geq 0 \end{cases}$$

6.1 WEKTORY, PROSTE I PŁASZCZYZNY

Wektory w $\mathbb{R}^3$. Równanie sfery. Liniowa niezależność. Kombinacja liniowa. Równanie parametryczne i ogólne płaszczyzny. Równanie parametryczne i postać krawędziowa prostej w $\mathbb{R}^3$.

ĆWICZENIA

- Wyznacz współrzędne punktu P , który dzieli odcinek AB , gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, w stosunku 2 : 1.
- Wyznacz promień i środek sfery o równaniu $x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 = 9$.
- Spośród podanych niżej wektorów wypisz:
 - wszystkie pary wektorów współliniowych
 - wszystkie trójki wektorów współpłaszczyznowych
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
- Przedstaw wektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Znajdź równanie parametryczne płaszczyzny o równaniu ogólnym $2x - 3y + z - 1 = 0$.
- Znajdź równanie ogólne płaszczyzny o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Znajdź równanie parametryczne prostej o postaci krawędziowej: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-7}{5}$.
- Znajdź postać krawędziową prostej o równaniu parametrycznym: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- Napisz równanie parametryczne oraz postać krawędziową prostej przechodzącej przez punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ i równoległej do wektora $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

ZADANIA

- Wyznacz współrzędne punktu P , który dzieli odcinek AB , gdzie $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, w stosunku 2 : 1.
- Uzasadnij, że środek odcinka łączącego środki krawędzi AB i CD czworościanu $ABCD$ pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego środki krawędzi AC i BD tego czworościanu.
- Napisz równanie sfery o średnicy AB , gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.
- O wektorach u i v w $\mathbb{R}^3$ wiadomo, że $|u| = 3$ oraz $|v| = 7$. Jaka może być długość wektora $u + v$? Podaj wszystkie możliwości.
- Napisz równanie ogólne i równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- Napisz równanie parametryczne i postać krawędziową wspólnej prostej płaszczyzn o równaniach $2x + y - z - 4 = 0$ i $3x + 3y - 2z - 9 = 0$.
- Napisz równanie parametryczne i postać krawędziową wspólnej prostej płaszczyzn o równaniach $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8. Przedstaw prostą przechodzącą przez punkty $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ w postaci krawędziowej oraz w postaci parametrycznej.
9. Znajdź punkt wspólny podanej płaszczyzny i podanej prostej:
- (a) $2x + 3y + z - 5 = 0$ oraz $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$,
 - (b) $x + y + z - 2 = 0$ oraz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
 - (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$,
 - (d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
10. Ustal, czy proste o równaniach $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ przecinają się i znajdź ich punkt przecięcia (jeśli istnieje).

6.2 ILOCZYN SKALARNY I ILOCZYN WEKTOROWY

Iloczyn skalarny. Kąt między wektorami. Wektor normalny płaszczyzny. Kąt między płaszczyznami oraz między płaszczyzną a prostą. Rzut wektora na wektor. Odległość punktu od płaszczyzny. Iloczyn wektorowy i jego własności. Pole równoległoboku w $\mathbb{R}^3$.

ĆWICZENIA

- Wyznacz miarę kąta między wektorami $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Wiedząc, że $|u| = 1$, $|v| = 2$ i $u \circ v = -1$ wyznacz $(u + 2v) \circ (u + v)$.
- Wyznacz rzut wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ na wektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Wyznacz odległość punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ od płaszczyzny o równaniu $2x - 3y + z + 1 = 0$.
- Oblicz pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Oblicz następujące iloczyny skalarne, wektorowe i mieszane.

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$
- Napisz równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i prostopadłej do wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Napisz równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i równoległej do wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ZADANIA

- O wektorach u, v, w wiadomo, że $|u| = 3$, $|v| = 2$, $|w| = 1$, $u \perp v$, $u \perp w$ oraz $\angle(v, w) = \pi/3$. Oblicz $u \circ (u + v + w)$ oraz $(u + v + w) \circ (u + v + w)$, a następnie wyznacz długość wektora $u + v + w$ oraz miarę kąta między wektorami u i $u + v + w$.
- Znajdź miarę kąta między przekątnymi ścian sześcianu wychodzącymi ze wspólnego wierzchołka.
- Znajdź rzut punktu $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na płaszczyznę o równaniu $x + 2y + z + 1 = 0$ oraz rzut tego punktu na prostą o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Wyznacz pole ściany ABC czworościanu $ABCD$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz (wykorzystując wzór na odległość punktu od płaszczyzny) długość wysokości czworościanu wychodzącej z wierzchołka D .
- Napisz równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Oblicz miarę kąta między płaszczyznami:

(a) $2x + 3y + z - 1 = 0$ i $5x - 2y + z - 2 = 0$,

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. Znajdź miarę kąta między prostą o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a płaszczyzną o równaniu $x + 2y + z = 0$.

8. Wskaż, które z działań:

$$u \times (v \times w), \quad u \circ (v \times w), \quad (u \circ v) \times w, \quad (u \circ v) \circ w$$

mają sens dla wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

9. Uprość każde z poniższych wyrażeń:

(a) $(u \times u) \times u$

(b) $(u \times v) \circ u$

(c) $(u+v) \times (u-v)$

(d) $(u+v) \circ (u-v)$

10. *Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, która jest równoległa do prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i przecina prostą o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pod kątem 30° .

6.3 WYZNACZNIK

Wyznacznik. Znakowana objętość równoległościanu i czworościanu. Orientacja trójki wektorów. Rozwinięcie wyznacznika względem dowolnego wiersza/kolumny. Nierówność półprzestrzeni. Znakowana odległość punktu od płaszczyzny. Wzory Cramera.

ĆWICZENIA

- Oblicz objętość równoległościanu oraz objętość czworościanu rozpiętego przez wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Sprawdź, która trójka wektorów jest zorientowana dodatnio, a która ujemnie:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Oblicz wyznacznik każdej z poniższych macierzy.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Oblicz wyznacznik macierzy diagonalnej $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

- Ustal czy punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny o równaniu $3x - 2y + z - 1 = 0$

- Rozwiąż metodą Cramera te spośród poniższych układów równań, które mają niezerowy wyznacznik główny:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + y + z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

ZADANIA

- Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz pole jego ściany ABC .
- Jak zmieni się wyznacznik macierzy 3×3 , gdy:
 - cyklicznie zamienimy jej kolumny,
 - cyklicznie zamienimy jej wiersze,
 - wszystkie wyrazy macierzy przemnożymy przez t ,
 - zmienimy znak wszystkich wyrazów macierzy.

- Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Oblicz wyznacznik macierzy górnotrójkątnej $\begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
5. Przedstaw wektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. Dowiedz się, na czym polega metoda obliczania wyznacznika 3×3 zwana *schemat Sarrusa* i sprawdź, że jest ona zgodna z przyjętą w tym skrypcie definicją wyznacznika.
7. Dla jakich wartości parametru p wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ p+1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p \\ p-2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ są liniowo niezależne?
8. Przedstaw wektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ p+1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p \\ p-2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, gdzie parametr p przyjmuje jedną z takich wartości, dla których powyższa trójka wektorów jest liniowo niezależna.
9. *Uzasadnij, że dodanie lub odjęcie dowolnej krotności jednej kolumny macierzy 3×3 od innej kolumny tej macierzy nie zmienia wyznacznika. Wykorzystaj tę własność do sprowadzenia macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ do macierzy górnotrójkątnej o tym samym wyznaczniku.
10. *Uzasadnij, że dodanie lub odjęcie dowolnej krotności jednego wiersza macierzy 3×3 od innego wiersza tej macierzy nie zmienia wyznacznika.

7.1 PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE I AFINICZNE

Przekształcenia afiniczne i liniowe $\mathbb{R}^3$. Izometrie $\mathbb{R}^3$. Przykłady przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

ĆWICZENIA

- Ustal, kiedy następujące przekształcenie afiniczne jest przekształceniem liniowym:

(a) obrót wokół prostej	(b) odbicie względem płaszczyzny
(c) odbicie względem prostej	(d) jednokładność
(e) rzut na płaszczyznę	(f) rzut na prostą
(g) translacja	(h) symetria środkowa
- Ustal, które z przekształceń z ćwiczenia 1 są izometriami. Kiedy są one izometriami liniowymi?
- Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:
 - przekształcenie zerowe,
 - przekształcenie identycznościowe,
 - jednokładność o skali 2 i środku O .
- Napisz wzory następujących przekształceń afinicznych:
 - translacja o wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,
 - odbicie względem osi Ox ,
 - odbicie względem osi Oy ,
 - odbicie względem płaszczyzny Oxy ,
 - odbicie względem płaszczyzny Oyz ,
 - symetria środkowa względem punktu O ,
 - jednokładność o środku O i skali -2 ,
 - jednokładność o środku O i skali $\frac{1}{2}$,
 - powinowactwo prostokątne o skali 2 względem płaszczyzny Oxz ,
 - powinowactwo ścinające o płaszczyźnie Oxy i wektorze $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

W przypadku przekształceń liniowych, podaj macierz przekształcenia.
- Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:
 - rzut (prostokątny) na płaszczyznę o równaniu $x + y + 3z = 0$,
 - odbicie względem płaszczyzny o równaniu $x + y + 3z = 0$,
 - powinowactwo prostokątne względem płaszczyzny o równaniu $x + y + 3z = 0$ i skali -2 ,
- Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:
 - rzut (prostokątny) na prostą o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - odbicie względem prostej o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

- (a) symetria środkowa o środku $S = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- (b) jednokładność o środku $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i skali $k = -3$.

8. Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:

- (a) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana odległość X od płaszczyzny $2x - 3y + 4z = 0$,
- (b) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X) = X \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,
- (c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $F(X) = X \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,
- (d) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- (e) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana objętość równoległoscianu rozpiętego przez wektory $(X, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

ZADANIA

1. Napisz macierz:

- (a) symetrii względem płaszczyzny $4x - 3y + 2z = 0$,
- (b) rzutu na płaszczyznę $4x - 3y + 2z = 0$,
- (c) symetrii względem prostej $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{2}$,
- (d) rzutu na prostą $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{2}$,

2. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

- (a) translacja o wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- (b) odbicie względem płaszczyzny $y = 3$,
- (c) odbicie względem prostej $x = y = 1$,
- (d) symetria środkowa względem punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- (e) jednokładność o środku $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i skali 3,
- (f) powinowactwo prostokątne względem płaszczyzny $y = 3$ i skali 4,
- (g) powinowactwo ścinające o płaszczyźnie $x = 2$ i wektorze $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Niech π będzie płaszczyzną o równaniu $2x - y + 2z + 1 = 0$. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

- (a) rzut (prostokątny) na płaszczyznę π ,
- (b) odbicie względem płaszczyzny π ,
- (c) powinowactwo prostokątne o skali -2 względem płaszczyzny π .

4. Niech ℓ będzie prostą o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

- (a) rzut (prostokątny) na prostą ℓ ,
- (b) odbicie względem prostej ℓ ,
- (c) powinowactwo prostokątne o skali -2 względem prostej ℓ .

5. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzór rzutu ukośnego na płaszczyznę o równaniu $x + y + z + 1 = 0$ w kierunku wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
6. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzór powinowactwa ścinającego o płaszczyźnie $2x - y + 2z - 1 = 0$ i wektorze $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
7. Znajdź rzut (prostokątny) punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ na płaszczyznę o równaniu $x + y + z + 1 = 0$, a następnie punkt symetryczny do punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ względem tej płaszczyzny.
8. Znajdź rzut (prostokątny) punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na prostą $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, a następnie punkt symetryczny do punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ względem tej prostej.
9. Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:
 - (a) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana odległość X od płaszczyzny $Ax + By + Cz = 0$,
 - (b) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X) = X \circ \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$,
 - (c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $F(X) = X \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$,
 - (d) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$,
 - (e) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $(X, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix})$.
10. Dla każdego z przekształceń z poprzedniego zadania ustal, czy jest ono:
 - (a) różnowartościowe,
 - (b) „na”
 - (c) odwracalne.

7.2 MACIERZE 3×3

Macierz przekształcenia liniowego. Addytywność i jednorodność przekształceń liniowych. Składanie przekształceń liniowych. Geometryczna interpretacja wyznacznika macierzy przekształcenia. Macierz izometrii. Macierz odwrotna.

ĆWICZENIA

- O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $F(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u+v)$, $F(u-v)$ i $F(4u+2v)$.
- Znajdź macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ przeprowadzającego punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ odpowiednio na punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Wyznacz (bez żadnych rachunków) obrazy wektorów oraz macierze następujących przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$:
 - symetria środkowa względem O ,
 - odbicie względem osi Oy ,
 - odbicie względem płaszczyzny Oxz ,
 - obrot o 90° wokół Ox ,
 - jednokładność o środku O i skali 2,
 - rzut na płaszczyznę Oyz .
- Wyznacz (bez żadnych obliczeń) wszystkie punkty stałe każdego z przekształceń z poprzedniego ćwiczenia oraz przekształcenia odwrotne do tych przekształceń (o ile istnieją).
- Znajdź macierze przekształceń liniowych $F \circ G$, $G \circ F$ oraz F^{-1} i G^{-1} , gdzie:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X, \quad G(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

- Ile jest takich przekształceń liniowych $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, które punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ przekształcają odpowiednio na punkty $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Znajdź je wszystkie.
- Znajdź macierz odwrotną (o ile istnieje) dla każdej z poniższych macierzy. Sprawdź (wykonując odpowiednie mnożenia), że faktycznie są one macierzami odwrotnymi:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Rozwiąż następujące równanie macierzowe:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Rozstrzygnij która z poniższych macierzy jest macierzą izometrii. Czy zachowuje ona, czy też zmienia orientację? Wyznacz macierz do niej odwrotną.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ZADANIA

- O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(3u + v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $F(u + v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u)$, $F(v)$ i $F(u + 2v)$.
- Wyznacz obrazy wektorów oraz macierze następujących przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$:
 - symetria względem płaszczyzny $y + z = 0$,
 - rzut (prostokątny) na płaszczyznę $y = x$,
 - symetria względem prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - rzut (prostokątny) na prostą $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - rzut ukośny w kierunku wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na płaszczyznę Oxy .
- Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ to obrót o 120° wokół prostej $x = y = z$. Znajdź obrazy wektorów przez F oraz napisz macierz F .
- Dane jest przekształcenie liniowe F , takie że $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Korzystając z addytywności i jednorodności F wyznacz $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ i $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
- Znajdź przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, które punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ przeprowadza odpowiednio na $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Spróbuj zrobić to rozwiązując jedno równanie macierzowe.
- Znajdź wszystkie punkty stałe przekształcenia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ danego wzorem:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Wyznacz macierze A i B spełniające poniższe równania macierzowe:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Sprawdź, które z poniższych przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$ zwiększają objętości, które zmniejszają objętości, które zachowują orientację i które zmieniają orientację.

$$(a) F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X, \quad (b) G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X, \quad (c) H(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} X.$$

- Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz punktu, którego przeciwobraz przez przekształcenie F jest:

$$(a) \text{ zbiorem pustym } (b) \text{ punktem, } \quad (c) \text{ prostą, } \quad (d) \text{ płaszczyzną, } \quad (e) \mathbb{R}^3.$$

10. Wyznacz (bez żadnych rachunków) przekształcenia odwrotne do następujących przekształceń afinicznych $\mathbb{R}^3$ lub uzasadnij, że przekształcenie odwrotne nie istnieje:

- | | |
|---|---|
| (a) translacja o wektor v , | (b) rzut (prostokątny) na płaszczyznę π , |
| (c) odbicie względem płaszczyzny π , | (d) symetria środkowa o środku S , |
| (e) obrót o kąt θ wokół prostej ℓ , | (f) rzut (prostokątny) na prostą ℓ , |
| (g) odbicie względem prostej ℓ , | (h) jednokładność o środku S i skali $k \neq 0$, |
| (i) przekształcenie stałe, | (j) przekształcenie identycznościowe. |

11. Znajdź takie przekształcenie afiniczne, które jest odwrotne do przekształcenia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o wzorze:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12. Wyznacz wzory przekształceń afinicznych $F \circ G$ oraz $G \circ F$, gdzie:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} X$$

13. Uzupełnij poniższą macierz do macierzy izometrii (na wszystkie możliwe sposoby):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

14. Wyznacz przeciwobrazy punktów $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ przez następujące przekształcenia afiniczne $\mathbb{R}^3$:

- (a) rzut (prostokątny) na płaszczyznę Oxy ,
 (b) rzut (prostokątny) na oś Ox ,

(c) przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$,

(d) przekształcenie $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o wzorze $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

8.1 WARTOŚCI WŁASNE I WEKTORY WŁASNE

Wartości własne i wektory własne. Wielomian charakterystyczny.

ĆWICZENIA

1. Sprawdź, które z wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ są wektorami własnymi macierzy $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Dla jakich wartości własnych?

2. Wyznacz wartości własne oraz wektory własne następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

3. Znajdź (bezpośrednio z definicji) wszystkie wartości własne i wektory własne symetrii środkowej o środku O , przekształcenia zerowego oraz przekształcenia identycznościowego.
4. Wyznacz wektory własne i wartości własne następujących przekształceń $\mathbb{R}^3$:
- (a) obrót wokół prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$,
- (b) rzut prostokątny na płaszczyznę o równaniu $x + y + z = 0$.
5. Wyznacz wektory własne i wartości własne następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ZADANIA

1. Wyznacz wektory własne i wartości własne następujących przekształceń $\mathbb{R}^3$:
- (a) symetria względem płaszczyzny o równaniu $2x + 3y - z = 0$,
- (b) powinowactwo prostokątne względem płaszczyzny o równaniu $2x + y + z = 0$ i skali -2 ,
- (c) rzut ukośny na płaszczyznę o równaniu $x + 2y - 4z = 0$ w kierunku wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Wyznacz wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ (zwanej macierzą górnotrójkątną).
3. Jakie (rzeczywiste) wartości własne może mieć izometria liniowa $\mathbb{R}^3$? Podaj wszystkie możliwości i każdą zilustruj przykładem.
4. Wyznacz zespolone wartości własne oraz zespolone wektory własne macierzy obrotu o kąt θ wokół osi Oz .
5. Uzasadnij, że wielomian charakterystyczny macierzy A rozmiaru 3×3 ma postać $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$, gdzie $a = \text{tr } A$ oraz $c = \det A$.

6. Wartościami własnymi macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ są λ_1 i λ_2 . Znajdź, wielomian charakterystyczny oraz wartości własne macierzy $B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$.
7. Macierz A rozmiaru 3×3 spełnia warunek $A^3 = A$. Jakie wartości własne rzeczywiste, a jakie wartości własne zespolone może mieć ta macierz?
8. Uzasadnij, że wielomian stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych nie może mieć podwójnego nierzeczywistego pierwiastka.
9. Uzasadnij, że jeżeli A to macierz 3×3 mająca jedną wartość własną λ , a zbiór wektorów dla tej wartości własnej to cała przestrzeń, to $A = \lambda I$.

8.2 DIAGONALIZACJA MACIERZY

Diagonalizacja macierzy. Zastosowania diagonalizacji (potęgowanie macierzy, wyznaczanie macierzy przekształcenia liniowego, rozwiązywanie rekurencji liniowych). Twierdzenie spektralne.

ĆWICZENIA

1. Zdiagonalizuj następujące macierze:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & -9 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & -7 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Oblicz następującą potęgę macierzy (gdzie a, b, c to parami różne liczby rzeczywiste):

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n$$

3. Znajdź macierz o wartościach własnych 1, 2, -1 i odpowiadających im wektorach własnych $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4. Wskaż kilka różnych przykładów macierzy, które diagonalizują się (i to bez użycia liczb zespolonych). Wykorzystaj twierdzenie spektralne.

ZADANIA

1. Oblicz następującą potęgę macierzy:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{10} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{10} \quad \begin{pmatrix} 7 & -7 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^{15}$$

2. Rozwiąż następującą rekurencję:

$$\begin{cases} a_0 = 2, & a_1 = -2, & a_2 = -4 \\ a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$$

3. Uzasadnij, że jeśli macierz ma trzy niewspółpłaszczyznowe wektory własne dla tej samej wartości własnej, to jest macierzą diagonalną.
4. Uzasadnij, że jeśli D jest macierzą diagonalną, której wyrazy na przekątnej są pierwiastkami stopnia $n \geq 1$, to macierz $A = PDP^{-1}$ spełnia warunek $A^n = I$.
5. Wykorzystując poprzednie zadanie, wskaż dużo przykładów takich macierzy A , że $A^2 = I$.
6. **Uzasadnij, że jeśli $A = PDP^{-1}$ jest diagonalizacją macierzy A o rozmiarach 3×3 , to $(QP)D(QP)^{-1}$ jest diagonalizacją macierzy QAQ^{-1} , gdzie Q jest dowolną macierzą 3×3 . Wywnioskuj stąd, że zespolone wartości własne dowolnego obrotu o kąt θ wokół prostej są takie same jak wyliczone w poprzednim zadaniu.

9.1 NOWY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

Nowy układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$. Macierz zamiany współrzędnych. Równania płaszczyzny i prostej w nowych i starych współrzędnych. Macierz przekształcenia w starych i nowych współrzędnych. Macierz obrotu wokół prostej w $\mathbb{R}^3$.

ĆWICZENIA

1. Zapisz w postaci X^TAX , gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, zaś A jest macierzą symetryczną, następujące wielomiany kwadratowe trzech zmiennych:
 - (a) $x^2 + 2xy - 3yz + 3y^2 + z^2$
 - (b) $3xy + 5yz - 2zx$
 - (c) $3x^2 + 4y^2 + 7z^2 + 2xy + 8yz + 6zx$
2. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Narysuj nowy układ współrzędnych (nie jest to układ prostokątny!) i zaznacz wektory e'_1 , e'_2 , e'_3 , $e'_1 + e'_2 + e'_3$. Jakie są nowe współrzędne ostatniego z tych wektorów? Jakie są jego stare współrzędne?
3. Wektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Jakie współrzędne mają wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ w tym nowym układzie?
4. Wektory $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź stare współrzędne wektorów v i w , dla których $[v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $[w]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

ZADANIA

1. Wprowadzając nowy układ współrzędnych napisz diagonalizację macierzy następujących przekształceń:
 - (a) symetrii względem płaszczyzny $2x + 3y - z = 0$,
 - (b) rzutu na płaszczyznę $2x + 3y - z = 0$,
 - (c) symetrii względem prostej $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$,
 - (d) rzutu na prostą $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$.
2. Napisz macierz obrotu o kąt 45° wokół prostej $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. Uwaga: są dwa takie przekształcenia (w zależności od kierunku obrotu). Znajdź macierze obydwu z nich.
3. Dane są punkty $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Napisz macierz przekształcenia liniowego F , dla którego $F(A) = B$, $F(B) = C$, $F(C) = A$. Wskazówka: wprowadź nowy układ współrzędnych, gdzie wersorami będą A , B i C .
4. Napisz macierz przekształcenia liniowego F , dla którego $F(u) = 2u$, $F(v) = w$, $F(w) = v$, gdzie $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wskazówka: wprowadź nowy układ współrzędnych.
5. Napisz macierz przekształcenia liniowego F , dla którego $F(u) = u + v$, $F(v) = w + 2u$, $F(w) = u + v + w$, gdzie $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wskazówka: wprowadź nowy układ współrzędnych.

6. Znajdź obrazy wektorów $2u + 3v - 2w$ i $4u - v - w$ przez przekształcenie F z poprzedniego zadania. Wskazówka: użyj macierzy przekształcenia w nowym układzie współrzędnych.
7. Jak należy dobrać nowy układ współrzędnych, aby dane przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w nowym układzie miało macierz diagonalną? Dla jakich przekształceń jest to możliwe?

Odpowiedzi

Rozdział 0 – Zadania

1. (a) $x = 0, y = z = 1$, (b) $x = -5, y = 2, z = 1$, (c) $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 2$

2. (a) $x = -1, y = 1, z = 0, t = 1$, (b) $x = 1, y = -1, z = 2, t = 0$, (c) $x = 0, y = -2, z = 2, t = 1$

3. $4 \times 4\frac{1}{2} \times 6$

4. 2, 7, 5, -2, -7

5. $W(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

6. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

Wskazówka: Zaczynij od przekształcenia układu 3 równań kwadratowych w układ składający się z 1 równania kwadratowego i 2 równań liniowych.

7. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

Rozdział 1.1 – Ćwiczenia

1. (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ oraz 3 i 7, (b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ oraz 4 i 2, (c) $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ oraz $|x|$ i $|y|$.

2. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. $-\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, 2\vec{u} + 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}, 4\vec{u} - 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}$

5. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i dowolny z pozostałych wektorów.

7. $|(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})| = \sqrt{5}, |(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix})| = 5, |(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})| = \sqrt{5}, |(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})| = 0, |(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix})| = 3\sqrt{5}, |(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})| = 1, |(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix})| = 2\sqrt{5}.$

8. $|AB| = \sqrt{5}, |BC| = \sqrt{17}, |CD| = 5, |DA| = \sqrt{13}, |AC| = 3\sqrt{2}, |BD| = 4\sqrt{2}.$

9. Dowolny wektor współliniowy z u i mający zwrot zgodny z u , np. $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$

10.(a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, (b) $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 4$

11.(a) styczne zewnętrznie, (b) rozłączne wewnętrznie, (c) przecinające się, (d) rozłączne zewnętrznie.

Rozdział 1.1 – Zadania

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.(a) $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $D = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

7.(a) $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ i 5, (b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\frac{\sqrt{21}}{2}$, (c) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

8. Dowolna liczba rzeczywista z przedziału $[3, 7]$.

9. *Wskazówka*: Zastosuj (wielokrotnie) regułę przykładania.

10. $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{BD} = \vec{v} - \vec{u}$, $\vec{CA} = -\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{DB} = \vec{u} - \vec{v}$.

11.(a) $D = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

12. Tak.

13. *Wskazówka*: Zastosuj (wielokrotnie) wzór na środek odcinka.

14. $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

15. *Wskazówka*: Wprowadź układ współrzędnych, gdzie środkiem będzie środek prostokąta, a boki będą równoległe do osi.

16.

Rozdział 1.2 – Ćwiczenia

1.(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.(a) np. $6x - 4y + 14 = 0$, $-3x + 2y - 7 = 0$, (b) np. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.(a) np. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) np. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) np. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.(a) $2x + y - 3 = 0$, (b) $2x - y - 5 = 0$, (c) $x - y + 3 = 0$,

5.(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, (b) $2x + y - 13 = 0$.

6.(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $2x + 3y - 8 = 0$.

7.(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $5x + 7y - 23 = 0$.

8.(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Rozdział 1.2 – Zadania

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

5. Punkt o współrzędnych $x = \frac{1-5\alpha}{3-4\alpha}$ i $y = \frac{11}{3-4\alpha}$ (w przypadku gdy $\alpha \neq \frac{3}{4}$). W przypadku gdy $\alpha = \frac{3}{4}$ proste te są różne i równoległe.

6. *Wskazówka:* Rozważ trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne są równoległe do osi układu współrzędnych.

Rozdział 1.3 – Ćwiczenia

1. $\angle(u, v) = 90^\circ$ (kąt prosty), $\angle(v, w) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ (kąt rozwarty), $\angle(w, u) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$ (kąt ostry).

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos 45^\circ \\ \sqrt{2} \sin 45^\circ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos 135^\circ \\ \sqrt{2} \sin 135^\circ \end{pmatrix}$,

3.(a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$, (a) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

4.(a) $\frac{4}{5}$ (znakowana: $-\frac{4}{5}$), (b) 0, (c) $\frac{10\sqrt{29}}{29}$ (znakowana: $+\frac{10\sqrt{29}}{29}$).

5.(a) $4x + y - 7 = 0$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $x - 4y + 11 = 0$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6.(a) $4x + 5y - 13 = 0$, (b) $5x - 4y - 6 = 0$.

7.(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8. $p_v(u) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $p_u(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. Każda liczba z przedziału $[-15, 15]$.

Rozdział 1.3 – Zadania

1. $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle CBA = \arccos \frac{2\sqrt{85}}{85}$ (kąt ostry), $\angle DCB = \arccos \frac{6\sqrt{85}}{85}$ (kąt ostry), $\angle ADC = \arccos(-\frac{4}{5})$ (kąt rozwarty),

2.(a) prostokątny (kąt prosty przy wierzchołku B), (b) ostrokątny, (c) rozwartokątny (kąt rozwarty przy wierzchołku C).

3.(a) $AB: x + 2y - 5 = 0$, $BC: 3x - y - 8 = 0$, $CA: 2x - 3y + 4 = 0$.

(b) $|AA'| = \frac{7\sqrt{10}}{10}$, $|BB'| = \frac{7\sqrt{13}}{13}$, $|CC'| = \frac{7\sqrt{5}}{5}$.

(c) $AA': x + 3y - 7 = 0$, $BB': 3x + 2y - 11 = 0$, $CC': 2x - y - 4 = 0$.

(d) $\begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$

4. $A' = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{10} \\ 1\frac{3}{10} \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} \frac{25}{13} \\ \frac{34}{13} \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} 2\frac{3}{5} \\ 1\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

5.(a) $\arccos \frac{\sqrt{65}}{65}$, (b) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$,

6.3

7. Rzut wektora to $\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. Rzut punktu na prostą to $\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$.

8.(a) prosta przecinająca okrąg, (b) prosta rozłączna z okręgiem, (c) prosta przecinająca okrąg.

9.(a) 4, (b) 24, (c) 32.

10.(a) $x + 2y - 3 = 0$, (b) $2x - y + 4 = 0$ lub $x + 2y - 3 = 0$.

11. Wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (lub jakakolwiek jego niezerowa wielokrotność), prosta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

12. *Wskazówka*: Oblicz iloczyn skalarny $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}$ i wykorzystaj równanie okręgu.

13. *Wskazówka*: Zastosuj własności z Faktu 1.30 (podobnie jak w dowodzie twierdzenia cosinusów).

(a) iloczyn skalarny wektorów wyznaczonych przez przekątne równoległoboku = różnica kwadratów długości boków,

(b) suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku = suma kwadratów długości czterech boków.

Rozdział 1.4 – Ćwiczenia

1.(a) -3, (b) 11, (c) -10.

2.(a) dodatnia, (b) ujemna, (c) dodatnia, (d) ujemna.

3.(a) $\frac{11}{2}$, (b) 11.

4. Po jednej stronie prostej leżą: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, a po drugiej stronie: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. $\frac{3}{2}$

6.(a) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, (b) $x = \frac{3}{2}$, $y = 3$, (c) układ sprzeczny.

Rozdział 1.4 – Zadania

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ powyżej, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ poniżej.

2. $\frac{1}{2}|ab - 3a - 2b|$

3.(a) 9, (b) 34.

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

5. $a = 1$ lub $a = 3.$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$

Rozdział 2.1 – Ćwiczenia

1. (a), (c), (i) gdy O jest środkiem obrotu/jednokładności/symetrii, (b), (d)–(g) gdy punkt O leży na osi, (h) gdy wektor translacji jest zerowy (tzn. translacja jest identycznością).

2. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. (a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$

4.

(a) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}$

(b) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, $m(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$, $m(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, $m(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$, $m(F) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(f) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$, $m(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(g) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $m(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(i) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(j) $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

5.

(a) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 1 \\ -4 & -2+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

6. (a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$,
(d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1+\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 1-\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ 1-\frac{6\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$

7. Wektor prostopadły do prostej ℓ (tzn. wektor normalny prostej).

8. *Wskazówka:* Zauważ, że dla dowolnego punktu X , jego obraz X' jest taki sam dla obu przekształceń.

Rozdział 2.1 – Zadania

1. (a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$

2.

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(e) $F(X) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(f) $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(g) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(h) $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(i) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(j) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

3.

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(b) $F(X) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(c) $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{9}{10} & \frac{13}{10} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

(d) $F(X) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{13}{15} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$

4. $F(X) = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ -\frac{9}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

6.

(a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

8. Wskazówka: Zauważ, że dla dowolnego punktu X , jego obraz X' jest taki sam dla obu przekształceń.

9. $F(X) = \begin{pmatrix} -y+1 \\ -x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Rozdział 2.2 – Ćwiczenia

1. $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $3C - B + A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $A - C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A + B + C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.

3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$

5. $F(u+v) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(u-v) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $F(2u+3v) = \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. $F(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

8.

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

9. Jedno: $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$.

10. Jedno: $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. Ćwiczenie 4:

- (a) brak (b) oś Ox (c) oś Oy (d) punkt O (e) punkt O
 (f) punkt O (g) oś Ox (h) oś Oy (i) oś Ox (j) oś Oy

Ćwiczenie 5: (a)–(d) i (f) prosta $2x + y = 0$, (e) prosta $x + 3y = 0$.

Rozdział 2.2 – Zadania

1. (a) pierwszy wiersz mnoży się przez a , drugi wiersz mnoży się przez b ,
 (b) pierwsza kolumna mnoży się przez a , druga kolumna mnoży się przez b .

2. Każdy wyraz macierzy jest mnożony przez a .

3.

- (a) do pierwszego wiersza dodawany jest drugi wiersz,
 (b) do drugiej kolumny dodawana jest pierwsza kolumna,
 (c) do drugiego wiersza dodawany jest pierwszy wiersz,
 (d) do pierwszej kolumny dodawana jest druga kolumna.

4. Wskazówka: Wykorzystaj addytywność oraz jednorodność przekształceń liniowych.

5. $F(u) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $F(4u + 3v) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

6.

- (a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,
 (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

7. $F\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X$

9. Jedno: $F(X) = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

10. Zadanie 2:

- (a) brak (b) prosta $y = 2$ (c) prosta $x = 3$ (d) punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
 (e) punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (f) punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (g) prosta $y = 2$ (h) prosta $x = 3$
 (i) prosta $y = 2$ (j) prosta $x = 3$

Zadanie 3: (a)–(d) prosta ℓ

11. (a) prosta o równaniu $x = -1$, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) prosta o równaniu $y = 2x$.

12.

- (a) obrót, jednokładność, symetria środkowa, przekształcenie stałe,
 (b) odbicie, powinowactwo prostokątne, rzut prostokątny, rzut ukośny, powinowactwo ścinające,
 (c) identyczność.

13. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

14. (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (punkt stały), (b) -90° .

15. $-2x + 4y + 5 = 0$ (oś odbicia to zbiór punktów stałych)

16. *Wskazówka:* Przeprowadź rachunek jak w Przykładzie 9 w Rozdziale 2.1 dla punkty $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i kąta θ .

Rozdział 2.3 – Ćwiczenia

1.

(a) $(T_v \circ T_v)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+8 \\ y+4 \end{pmatrix},$

(b) $(S_x \circ S_O)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (S_O \circ S_x)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix},$

(c) $(T_v \circ S_x)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+4 \\ -y+2 \end{pmatrix}$ oraz $(S_x \circ T_v)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+4 \\ -y-2 \end{pmatrix},$

(d) $(S_O \circ T_v)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x-4 \\ -x-2 \end{pmatrix}$ oraz $(T_v \circ S_O)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x+4 \\ -x+2 \end{pmatrix},$

(e) $(S_O \circ S_A)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$ oraz $(S_A \circ S_O)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+2 \end{pmatrix}.$

2. (a) R_{180° , (b) $R_{0^\circ} = \text{Id}$, (c) R_{-30° .

3. Suma (skierowanych) kątów składanych obrotów.

4. $m(F \circ G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $m(G \circ F) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $m(G \circ H) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $m(H \circ G) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

5. (a) $G(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

(b) $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$

(c) $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

6. (a) $T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \circ R_{90^\circ} \circ T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$, (b) $T_{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \circ S_O \circ T_{-\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}.$

Rozdział 2.3 – Zadania

1.

2. $(F \circ G)(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$(G \circ F)(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$

$(F \circ H)(X) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$

$(H \circ F)(X) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$

3. (a) $G(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$

(b) niemożliwe,

(c) $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X$, $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$

4. $D_1(X) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} X$, $D_2(X) = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1-l \\ 0 \end{pmatrix}$, $(D_1 \circ D_2)(X) = \begin{pmatrix} kl & 0 \\ 0 & kl \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-kl \\ 0 \end{pmatrix}$. Złożenie będzie translacją, jeśli $kl = 1$.

5. $S_A \circ S_B = T_{2\overrightarrow{BA}}$ oraz $S_B \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$

6. $S_y(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, $S_\ell(X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$, $(S_y \circ S_\ell)(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$ (obrot o -90°),
 $(S_\ell \circ S_y)(X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$ (obrot o 90°).

7. Odbicie względem dowolnej prostej, symetria środkowa o dowolnym środku, identyczność.

8. (a) $G = R_{-\theta}$, (b) $G = S_\ell$, (c) $G = T_{-v}$.

9. (a) $T_{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \circ F \circ T_{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}}$, gdzie F to jednokładność o środku O i skali 2,

(b) $T_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ F \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, gdzie F to odbicie względem prostej o równaniu $x + y = 0$,

(c) $T_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ F \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, gdzie F to rzut (prostokątny) na prostą o równaniu $x + y = 0$,

(d) $T_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ F \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, gdzie F to powinowactwo prostokątne o osi $x + y = 0$ i skali 3.

10. R_θ^A i $R_{-\theta}^B$ dla dowolnych A i B oraz θ .

11. Wektor prostopadły do obu prostych, o długości równej podwojonej odległości między prostymi i zwrocie od l do k (dla złożenia $S_k \circ S_l$) lub od k do l (dla złożenia $S_l \circ S_k$).

12. Podwojony kąt między prostymi, skierowany od l do k (dla złożenia $S_k \circ S_l$) lub od k do l (dla złożenia $S_l \circ S_k$).

Rozdział 2.4 – Ćwiczenia

1. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Zachowują orientację: $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zmienia orientację: $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$

3.

(a) obrót wokół 0, odbicie względem prostej przechodzącej przez 0, identyczność,

(b) obrót wokół punktu innego niż 0, odbicie względem prostej nie przechodzącej przez 0, translacja o niezerowy wektor,

(c) jednokładność o środku 0 i skali różnej od ± 1 , powinowactwo prostokątne o osi przechodzącej przez 0 i skali różnej od ± 1 , powinowactwo ścinające o osi przechodzącej przez 0, rzut (prostokątny lub ukośny) na prostą przechodzącą przez 0,

(d) obrót wokół punktu innego niż 0, odbicie względem prostej nie przechodzącej przez 0, translacja o niezerowy wektor, jednokładność o środku innym niż 0, powinowactwo prostokątne o osi nie przechodzącej przez 0, powinowactwo ścinające o osi nie przechodzącej przez 0, rzut (prostokątny lub ukośny) na prostą nie przechodzącą przez 0,

(e) jednokładność o skali różnej od ± 1 , powinowactwo prostokątne o skali różnej od ± 1 , powinowactwo ścinające, rzut (prostokątny lub ukośny).

4. Zachowuje orientację.

Rozdział 2.4 – Zadania

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$

2. (a) obrót o -45° ,

(b) odbicie względem prostej $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$,

(c) odbicie względem prostej $x - 2y = 0$,

- (d) odbicie względem prostej $x = y$,
 (e) obrót o 90° .

3.

- (a) jednokładność o skali różnej od ± 1 ,
 (b) dowolne przekształcenie o macierzy A , która nie jest macierzą izometrii, ale $\det A = \pm 1$,
 (c) przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

5. (a) zmienia pole i orientację, (b) zachowuje pole, zmienia orientację, (c) zachowuje pole i orientację.

6.

- (a) równoległobok rozpięty przez wektory $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
 (b) równoległobok rozpięty przez wektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,
 (c) równoległobok rozpięty przez wektory $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Pole równoległoboku jest zawsze równe wartości bezwzględnej wyznacznika macierzy.

7. Wskazówka: Ustal, czy to złożenie zachowuje orientację, czy ją zmienia.

8. Złożenie przekształcenia zachowującego orientację z przekształceniem zmieniającym orientację zmienia orientację.

9. Zachowuje, jeśli skala jest dodatnia, a zmienia, jeśli skala jest ujemna.

10. Wskazówka: Zastosuj twierdzenie o klasyfikacji izometrii liniowych płaszczyzny. Dla izometrii nieliniowych te fakty nie są prawdziwe.

11.

12. $T = T_{-v}$

Rozdział 2.5 – Ćwiczenia

1.

- (a) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{-3\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$
 (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

2.

- (a) $\frac{-7\sqrt{13}}{13}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) 11
 (d) $\begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix}$ (e) 8

3.

- (a) prosta $2x - 3y - 2\sqrt{13} = 0$ (b) prosta $2x + y - 4 = 0$ (c) prosta $2x + 3y - 2 = 0$
 (d) 2 (e) 1

4.

- (a) rzut na prostą i dowolny punkt nie leżący na tej prostej, przekształcenie zerowe i punkt różny od 0,
- (b) dowolne przekształcenie odwracalne i dowolny punkt,
- (c) rzut na prostą i dowolny punkt na tej prostej,
- (d) przekształcenie zerowe i punkt 0.

5.

- (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

6.

- (a) prosta $x = 1$ oraz zbiór pusty
- (b) punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (c) punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (d) zbiór pusty oraz prosta $x + y - 1 = 0$

7.

- (a) różnowartościowe i „na”
- (b) różnowartościowe i „na”
- (c) nie jest ani różnowartościowe, ani „na”
- (d) nie jest ani różnowartościowe, ani „na”

Rozdział 2.5 – Zadania

1.

- (a) $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$
- (b) $\left(\frac{1}{2}a_1 \frac{1}{2}a_2 \right)$
- (c) $(v_1 v_2)$
- (d) $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
- (e) (a)

2.

- (a) $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- (b) $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$
- (c) $v_1 + v_2$
- (d) $\begin{pmatrix} 2p \\ 2q \end{pmatrix}$
- (e) $2a$

3.

- (a) prosta $ax + by = 0$
- (b) prosta $X = t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- (c) prosta $X = t \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$
- (d) –
- (e) 0, jeśli $a \neq 0$ lub $\mathbb{R}^2$, jeśli $a = 0$

4. Punkt 0, jeśli $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz cała dziedzina $\mathbb{R}$, jeśli $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.

- (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

6.

- (a) prosta $x - y = 0$ oraz prosta $x - y - 2 = 0$
- (b) punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- (c) prosta $2x + 2y - 1 = 0$ oraz zbiór pusty
- (d) punkt $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ oraz punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7.

- (a) jest różnowartościowe i „na” (b) nie jest ani różnowartościowe, ani „na”
 (c) nie jest ani różnowartościowe, ani „na” (d) nie jest różnowartościowe, jest „na”
 (e) jest różnowartościowe, nie jest „na”

8.

9.

Rozdział 2.6 – Ćwiczenia

$$1. \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.

$$(a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ -\frac{17}{11} \end{pmatrix}$$

6.

$$(a) R_{-\pi/3}, m(R_{\pi/3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, m(R_{-\pi/3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(b) D_2, m(D_{\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, m(D_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) D_{-\frac{1}{2}}, m(D_{-2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, m(D_{-\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(d) S_{x=y}, m(S_{x=y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.

$$(a) F^{-1}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X \quad (b) G^{-1}(X) = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{1}{17} \end{pmatrix} X \quad (c) H^{-1}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} X$$

$$8. \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozdział 2.6 – Zadania

$$1. A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -14 & 5 \\ 9 & -3 \\ -23 & 8 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 3 \\ -\frac{9}{4} & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. $F(X) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} X$

5. $F^{-1}(X) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6.

- | | |
|---|---|
| (a) translacja o wektor $-v$, | (b) nie istnieje, |
| (c) odbicie względem prostej ℓ , | (d) symetria środkowa o środku S , |
| (e) obrót o kąt $-\theta$ wokół punktu S , | (f) jednokładność o środku S i skali $\frac{1}{k}$, |
| (g) powinowactwo prostokątne o osi ℓ i skali $\frac{1}{k}$, | (h) powinowactwo ścinające o osi ℓ i wektorze $-v$, |
| (i) nie istnieje, | (j) przekształcenie identycznościowe, |
| (k) nie istnieje. | |

7. *Wskazówka:* Ustal znak wyznacznika macierzy przekształcenia F^{-1} .

8. Zmniejsza 2 razy.

9. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

10.

11. *Wskazówka:* Użyj wzoru na transpozycję iloczynu macierzy.

12. Tak.

13. Nie.

Rozdział 3.1 – Ćwiczenia

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2.

- (a) $x^2 - 2$, $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}-1)x$ i $(-\sqrt{2}-1)x$,
- (b) $x^2 - 2x$, 0 i 2, $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$,
- (c) $x^2 - 4x + 3$, 1 i 3, $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$,
- (d) $x^2 - 4x + 4$, 2, $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$,
- (e) $x^2 - 6x + 9$, 3, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$,
- (f) $x^2 - 5x - 14$, -2 i 7, $\begin{pmatrix} x \\ -4x \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}.$

3. $(x-a)(x-b)$, a i b , $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$

4. 5 i każdy wektor oraz 1 i każdy wektor.

5. $p > -1$

6.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) obie dodatnie, | (b) jedna dodatnia, druga ujemna, |
| (c) jedna dodatnia, druga ujemna, | (d) jedna dodatnia, druga ujemna, |

Rozdział 3.1 – Zadania

1.0 i każdy wektor oraz -1 i każdy wektor.

2.1 i k oraz prosta ℓ i prosta prostopadła do ℓ .

3.+1 lub -1 .

4. *Wskazówka:* Jaką własność mają wektory własne dla wartości własnej 0?

5. $(x-a)(x-b)$, a i b , $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \frac{c}{b-a}y \\ y \end{pmatrix}$ gdy $a \neq b$

W przypadku $a = b$ jest jedna wartość własna $a = b$, dla której wektory własne to $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ (gdy $c \neq 0$) lub $\mathbb{R}^2$ (gdy $c = 0$).

6.2 wartości własne dla $p \in (-1, 1)$, 1 wartość własna dla $p \in \{-1, 1\}$, 0 wartości własnych dla $p \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

7. $\text{tr } A = 4$, $\det A = 5$

8.

9.0

10.0 lub 1

11.0 lub 1

12.

13. *Wskazówka:* Oblicz wartość $(F \circ F)(v)$.

14. *Wskazówka:* Oblicz wartość $F \circ F$ dla dowolnego niezerowego wektora własnego przekształcenia F .

15.

16.

Rozdział 3.2 – Ćwiczenia

1.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nie diagonalizuje się

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ nie diagonalizuje się

$$(f) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

2. $\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Dowolna macierz symetryczna.

4. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ dla dowolnej macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o niezerowym wyznaczniku.

5. Dla $b = 0$.

Rozdział 3.2 – Zadania

1. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{100}+1 & 3^{100}-1 \\ 3^{100}-1 & 3^{100}+1 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} \frac{8}{9} \cdot 7^n + \frac{1}{9}(-2)^n & \frac{2}{9} \cdot 7^n - \frac{2}{9}(-2)^n \\ \frac{4}{9} \cdot 7^n - \frac{4}{9}(-2)^n & \frac{1}{9} \cdot 7^n + \frac{8}{9}(-2)^n \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Nie są diagonalizowalne $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dla dowolnego a i dowolnego $b \neq 0$. Są diagonalizowalne $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dla dowolnego a .

4.

(a) wartość własna 1 dla wektorów własnych $\begin{pmatrix} 5t \\ -2t \end{pmatrix}$ oraz wartość własna -1 dla wektorów własnych $\begin{pmatrix} 2t \\ 5t \end{pmatrix}$; macierz $\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 21 & -20 \\ -20 & -21 \end{pmatrix}$

(b) wartość własna 1 dla wektorów własnych $\begin{pmatrix} 2t \\ 7t \end{pmatrix}$ oraz wartość własna 0 dla wektorów własnych $\begin{pmatrix} 7t \\ -2t \end{pmatrix}$; macierz $\frac{1}{53} \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 49 \end{pmatrix}$

5. Wartość własna 1 dla wektorów własnych $\begin{pmatrix} 3t \\ -2t \end{pmatrix}$ oraz wartość własna 0 dla wektorów własnych $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$. Macierz rzutu $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Wskazówka: Oblicz $F(tv)$.

7. Wskazówka: Oblicz $F(u+v)$.

8. Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na wyznacznik iloczynu macierzy.

9. Wskazówka: Skorzystaj z definicji macierzy odwrotnej oraz wzoru na transpozycję iloczynu macierzy.

10. $a_n = 3 \cdot 2^n + (-1)^n$, $b_n = 2^n + 3^n$, $c_n = 2^n - 1$.

Rozdział 4.1 – Ćwiczenia

1.

2. $[e'_1]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[e'_2]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[2e'_1 + 3e'_2]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. $[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. $[v]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $[w]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

5. Układy w ćwiczeniach 1, 3, 4 są prostokątne, a układ w ćwiczeniu 2 nie jest prostokątny.

6. $[v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$.

7. $5x' + 3y' = 0$

8. $2x + y = 0$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Rozdział 4.1 – Zadania

1. $[v]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $[w]_{\text{stary}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $[v]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$, $[w]_{\text{nowy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$3. [e_1]_{nowy} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, [e_2]_{nowy} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, [e'_1]_{stary} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [e'_2]_{stary} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. e'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ (ale nie jest to jedyne rozwiązanie).}$$

$$6. [v]_{nowy} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11}x - \frac{1}{11}y \\ \frac{2}{11}x + \frac{3}{11}y \end{pmatrix}$$

$$7. [v]_{nowy} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+y \end{pmatrix}$$

8.

$$(a) 5x' + 8y' = 0 \quad (b) -3x' - y' + 1 = 0 \quad (c) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9.

$$(a) 7x + 3y = 0 \quad (b) y + 1 = 0 \quad (c) 5x + 2y - 1 = 0$$

10. Wersory nowego układu to wektory własne F .

$$11. m_{nowy}(F) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 19 & -7 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$12. m_{stary}(F) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Rozdział 4.2 – Ćwiczenia

1.

$$(a) \text{ hiperbola} \quad (b) \text{ elipsa} \quad (c) \text{ hiperbola}$$

2.

$$(a) \text{ elipsa} \quad (b) \text{ hiperbola} \quad (c) \text{ hiperbola}$$

3.

$$(a) \text{ hiperbola} \quad (b) \text{ hiperbola} \quad (c) \text{ zbiór pusty}$$

4. Nie.

5.

$$(a) \text{ dwie dodatnie} \quad (b) \text{ dwie dodatnie} \\ (c) \text{ jedna dodatnia, druga ujemna} \quad (d) \text{ dwie dodatnie}$$

6.

$$(a) \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rozdział 4.2 – Zadania

1.

$$(a) \text{ hiperbola} \quad (b) \text{ zbiór pusty} \quad (c) \text{ elipsa}$$

2.

$$(a) \sqrt{2} \text{ i } \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (b) \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \text{ i } \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \quad (c) \sqrt{\frac{8+2\sqrt{13}}{3}} \text{ i } \sqrt{\frac{8-2\sqrt{13}}{3}}$$

3.(a) hiperbola o równaniu $13(x')^2 - 13(y')^2 = 1$ w układzie współrzędnych o wersorach

$$e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}.$$

(b) elipsa o równaniu $\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{3}{2}(y')^2 = 1$ w układzie współrzędnych o wersorach $e'_1 =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) hiperbola o równaniu $10(x')^2 - 5(y')^2 = 1$ w układzie współrzędnych o wersorach $e'_1 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

4. Tak. Jej zbiór wektorów własnych to $\mathbb{R}^2$.**5.** Jeśli $A = 0$ i $C \neq 0$ lub $A \neq 0$ i $C = 0$ to dwie proste równoległe. Jeśli $A = C = 0$ to zbiór pusty.**6.**

(a) prosta $x + y = 0$ (b) dwie proste równoległe $x + y = 1$ i $x + y = -1$ (c) dwie proste przecinające się $x + y = 0$ i $x - y = 0$

$$7. 6x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

8. Przekształcenie $F(X) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Pole elipsy to πab .

$$9. 18(x')^2 + 32(y')^2 + 48x'y' - 20x' + 15y' = 0$$

*Rozdział 5.1 – Ćwiczenia***1.**

$$(a) 8 - i \quad (b) \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i \quad (c) \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i \quad (d) \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$(e) \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i \quad (f) 3 + 4i$$

2.

$$(a) \operatorname{Re} z = 17, \operatorname{Im} z = -7 \quad (b) \operatorname{Re} z = \frac{1}{10}, \operatorname{Im} z = -\frac{7}{10} \quad (c) \operatorname{Re} z = -21, \operatorname{Im} z = 20$$

3.

$$(a) |2i| = 2, \arg(2i) = \frac{\pi}{2}, 2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$(b) |-1 + i| = \sqrt{2}, \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}, -1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$(c) |4 - 4i| = 4\sqrt{2}, \arg(4 - 4i) = -\frac{\pi}{4}, 4 - 4i = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$(d) |\sqrt{3} + i| = 2, \arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}, \sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

$$(e) |-\sqrt{3} + i| = 2, \arg(-\sqrt{3} + i) = \frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$$

4.**5.**

(a) $-32i$ (b) $128 + 128\sqrt{3}i$ (c) $64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}i$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

6.

7.

(a) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$

(c) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

8. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$

9. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$

Rozdział 5.1 – Zadania

1.

2.

(a) 2^{20} (b) $512 + 512\sqrt{3}i$ (c) $-2^{49} - 2^{49}\sqrt{3}i$

3.

(a) $\sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i), \sqrt[3]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i), -\sqrt[3]{2}i$

(b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1 + i), \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}((-1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i), \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}((-1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i)$

(c) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

4.

(a) $i, -i$

(b) $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(c) $1, i, -1, -i$

(d) $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5.

(a) obrót o $\frac{\pi}{2}$ wokół O

(b) symetria środkowa o środku O

(c) translacja o wektor $(\frac{1}{1})$

6.

7. $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$

8. $\cos(3\alpha) = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
 $\sin(3\alpha) = -\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$

9. *Wskazówka:* Przyjmij $w = (\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}).$

10.0

11. *Wskazówka:* Zastosuj dwa poprzednie zadania.

Rozdział 5.2 – Ćwiczenia

1.

(a) $z = 1$

(b) $z = -1 - i$

2.

(a) $z_1 = i, z_2 = -i$

(b) $z_1 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}, z_2 = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}$

(c) $z_1 = -2 + 2i, z_2 = -2 - 2i$

(d) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

3.

(a) $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i, v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) $\lambda_1 = 4 + 3i, \lambda_2 = 4 - 3i, v_1 = \begin{pmatrix} 1+3i \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 2 \end{pmatrix}.$

4.

(a) $(z - 3)(z + i - 1)(z - i - 1)$

(b) $2(z - \frac{1}{2})(z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i)$

(c) $(z + 1)(z + 3 - i)(z + 3 + i)$

Rozdział 5.2 – Zadania

1.

(a) $z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i, w = \frac{2}{3}$

(b) $z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}i, w = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

2.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -128 & 128 \\ -384 & 128 \end{pmatrix}$

3.

(a) $(z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i)(z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i)$

(b) $(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 - i)(z + 1 + i)$

4. Wskazówka: Podstaw $z_1 = a + bi$ oraz $z_2 = c + di$ i wylicz lewą i prawą stronę każdej równości.

5. Dowolna macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dla której $a + d = 6$ oraz $ad - bc = 13$.

6. $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta, \lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta; |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1; \arg \lambda_1 = \theta, \arg \lambda_2 = -\theta$.

7. $\operatorname{Re}[(1 + 2i)(1 - i)^n] = 2^{n/2}(\cos \frac{n\pi}{4} + 2 \sin \frac{n\pi}{4})$

Rozdział 6.1 – Ćwiczenia

1. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix}$

2. Środek $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, promień $\sqrt{14}$.

3.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

(b) dowolne trzy spośród wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$4.2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5. \text{np. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$6. x - 2y - 3z + 2 = 0$$

$$7. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$8. x + 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-2}$$

$$9. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ oraz } x - 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-8}{5}$$

Rozdział 6.1 – Zadania

$$1. P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_0 + \frac{2}{3}x_1 \\ \frac{1}{3}y_0 + \frac{2}{3}y_1 \\ \frac{1}{3}z_0 + \frac{2}{3}z_1 \end{pmatrix}$$

2. *Wskazówka:* Zastosuj (kilkukrotnie) wzór na środek odcinka.

$$3. (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 14$$

4. Dowolna liczba rzeczywista z przedziału $[4, 10]$.

$$5. x + 3y + z - 5 = 0 \text{ oraz np. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ oraz } x - 1 = y - 2 = \frac{z}{3}$$

$$7. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oraz } \frac{x-1}{2} = 1 - y = z - 1$$

$$8. \text{np. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ oraz } \frac{x-3}{2} = 2 - y = 1 - z$$

9.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Rozdział 6.2 – Ćwiczenia

$$1. \arccos \frac{2\sqrt{42}}{42}$$

$$2. 5$$

$$3. \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \frac{5\sqrt{14}}{7}$$

$$5. 5\sqrt{11}$$

$$6. \frac{1}{2}\sqrt{141}$$

7.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) 5

(c) 11

8. $x - y + 2z - 6 = 0$

9. $4x - 7y + 5z - 9 = 0$

Rozdział 6.2 – Zadania

1. $u \circ (u + v + w) = 9$, $(u + v + w) \circ (u + v + w) = 16$, $|u + v + w| = 4$, $\angle(u, u + v + w) = \arccos \frac{3}{4}$.

2. 60° . *Wskazówka:* Umieść sześciąt w dogodnym układzie współrzędnych.

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Pole $\frac{\sqrt{6}}{2}$, wysokość $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

5. $2x - 3y + 4z - 5 = 0$

6.

(a) $\arccos \frac{\sqrt{105}}{42}$,

(b) $\arccos \frac{8\sqrt{77}}{77}$.

7. $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$

8. Mają sens: $u \times (v \times w)$ oraz $u \circ (v \times w)$. Nie mają sensu: $(u \circ v) \times w$ oraz $(u \circ v) \circ w$.

9.

(a) 0

(b) 0

(c) $2v \times u$

(d) $|u|^2 - |v|^2$

10. $2x + y - z - 2 = 0$

Rozdział 6.3 – Ćwiczenia

1.

2.

3.

4. abc

5. Nie.

6.

Rozdział 6.3 – Zadania

1.

2.

(a) nie zmieni się,

(b) nie zmieni się,

(c) przemnoży się przez t^3 ,

(d) zmieni znak.

3.

4. abc

$$5. 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.

$$7. p \neq \pm \frac{3}{2}$$

$$8. \frac{3-2p}{9-4p^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ p+1 \end{pmatrix} - \frac{3p+1}{9-4p^2} \cdot \begin{pmatrix} p \\ p-2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{p^2+p-1}{9-4p^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

9. *Wskazówka:* Skorzystaj z addytywności i jednorodności względem każdej kolumny.

10. *Wskazówka:* Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz z faktu, że transpozycja macierzy nie zmienia wyznacznika.

Rozdział 7.1 – Ćwiczenia

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Rozdział 7.1 – Zadania

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

3.