

Algebra liniowa 2

lista 0 (ćwiczenia 26.02.2020)

1. Dla każdego z poniższych zbiorów zdefiniuj (w sensowny sposób) operację dodawania elementów oraz mnożenia elementów przez skalar (tzn. przez liczby rzeczywiste). Następnie ustal jaki element jest elementem neutralnym dodawania oraz jak wyznacza się element przeciwny do danego.

- (a) zbiór $C(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (b) zbiór $C^1(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dla których pochodna f' istnieje i jest ciągła,
- (c) zbiór $C^\infty(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dla których istnieją pochodne wszystkich rzędów,
- (d) zbiór $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów zmiennej x ,
- (e) zbiór wszystkich ciągów $(a_n)_{n=1}^\infty$ o wyrazach rzeczywistych,
- (f) zbiór $\mathbb{R}^n$ wszystkich układów n liczb rzeczywistych $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,
- (g) zbiór $M_{m \times n}$ wszystkich macierzy o rozmiarach $m \times n$ o wyrazach rzeczywistych.

2. Zbiór V nazywamy zamkniętym na dodawanie elementów, jeśli dla dowolnych $v, w \in V$ zachodzi $v + w \in V$ oraz zamkniętym na mnożenie elementów przez skalar, jeśli dla dowolnych $v \in V$, $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $tv \in V$. Ustal, które z poniższych zbiorów są zamknięte na dodawanie i mnożenie przez skalar (względem działań zdefiniowanych w poprzednim zadaniu):

- (a) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(7) = 0\}$,
- (b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(7) = 1\}$,
- (c) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(12) \geq f(-12)\}$,
- (d) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : f'(x) \geq 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}$,
- (e) $\{(a_n) : a_3 = -1\}$,
- (f) $\{(a_n) : a_4 = a_{40} = 0\}$,
- (g) $\{(a_n) : a_1 + a_3 + a_5 = 0\}$,
- (h) $\{(a_n) : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ dla każdego } n \geq 0\}$,
- (i) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z^2 = x^2 + 2y^2\right\}$,
- (j) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + 2z = 0\right\}$,
- (k) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 3y + z = 1\right\}$,
- (l) $\{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P = 3\}$ ($\deg P$ oznacza stopień wielomianu P),
- (m) $\{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq 3\}$,
- (n) $\{P \in \mathbb{R}[X] : P'(2) = 0\}$,
- (o) $\{P \in \mathbb{R}[X] : P'(2) = 3\}$,
- (p) $\{P \in \mathbb{R}[X] : P'(-1) + P(1) = 0\}$,
- (q) $\{P \in \mathbb{R}[X] : P'(1) + P'(-1) = 4\}$,
- (r) $\{P \in \mathbb{R}[X] : P(2) + P(0)^2 = 0\}$,
- (s) $\{A \in M_{3 \times 3} : \text{tr} A = 0\}$,
- (t) $\{A \in M_{3 \times 3} : \text{tr} A = 1\}$,
- (u) $\{A \in M_{3 \times 3} : \det A = 0\}$,
- (v) $\{A \in M_{3 \times 3} : A = A^T\}$.

3. Przedstaw:

- (a) wielomian $x^2 + 5x - 2$ w postaci kombinacji liniowej wielomianów $x^2 + 1$, $2x - 1$, $x^2 + x + 1$,
- (b) wielomian $x^3 + x^2 - 1$ w postaci kombinacji liniowej wielomianów $x^3 + x^2 + x + 1$, $x^2 + x + 1$, $x + 1$, 1 ,
- (c) macierz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- (d) macierz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- (e) ciąg $a_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ 1, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$ w postaci kombinacji liniowej ciągów $b_n = 1$ i $c_n = (-1)^n$,
- (f) funkcję $f(x) = \frac{2}{x(x+1)}$ w postaci kombinacji liniowej funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ i $h(x) = \frac{1}{x+1}$,
- (g) funkcję $f(x) = \frac{x+3}{x(x+1)}$ w postaci kombinacji liniowej funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ i $h(x) = \frac{1}{x+1}$.