

Algebra liniowa 2

lista 1 (wykład 2.03., ćwiczenia 4.03.2020)

Ćwiczenia

- Wskaż bazę i wyznacz wymiar każdej z poniższych przestrzeni liniowych: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $M_{2 \times 2}$, $M_{3 \times 3}$, $M_{m \times n}$, $\mathbb{C}$.
- Wskaż kilka przykładów podprzestrzeni wymiaru 1 oraz wymiaru 2 każdej z następujących przestrzeni liniowych: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}_2[X]$ i $M_{2 \times 2}$.
- Podaj po kilka przykładów podprzestrzeni każdej z następujących przestrzeni liniowych: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $M_{n \times n}$, $C(\mathbb{R})$, $C^\infty(\mathbb{R})$, $C(0, 1)$.
- Oblicz wymiar każdej z następujących przestrzeni liniowych:
 - $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0 \right\}$,
 - $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0 \right\}$,
 - $\{P \in \mathbb{R}_2[X] : P'(2) = 0\}$,
 - $\{P \in \mathbb{R}_3[X] : P'(-1) = P(1) = 0\}$,
 - $\{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$,
 - $\{A \in M_{3 \times 3} : \text{tr} A = 0\}$,
 - $\{A \in M_{3 \times 3} : A = A^\top\}$,
 - $\{A \in M_{3 \times 3} : A \text{ jest diagonalna}\}$.
- Ustal, które ze zbiorów podanych w zadaniu 2 na liście 0 są przestrzeniami liniowymi. Które z nich są podprzestrzeniami przestrzeni podanych w zadaniu 1 na liście 0?

Zadania

- Wskaż jakąkolwiek bazę każdej z przestrzeni z ćwiczenia 4.
- Przedstaw podane ciągi w postaci kombinacji liniowej ciągów: $a_n = 1$ i $b_n = (-1)^n$, $c_n = n$.
 - $d_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ 1, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$
 - $f_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
 - $e_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$
 - $f_n = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$
- Uzasadnij, że każdy z poniższych układów wektorów generuje podaną przestrzeń. Z każdego z tych układów wybierz bazę, a następnie wyznacz współrzędne w tej bazie podanego wektora v .
 - $x^2 + x + 1, x^2 - x + 2, 2x + 1, x^2 + 1 \in \mathbb{R}_2[x]$ oraz $v = x^2 + 2x + 1$,
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ oraz $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ oraz $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \{A \in M_{2 \times 2} : A = A^T\}$ oraz $v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- Uzasadnij, że każdy z poniższych układów wektorów to układ lnz. Każdy z tych układów rozszerz do bazy, a następnie wyznacz współrzędne w tej bazie podanego wektora v .
 - $x^3 + 1, x^2 + 1 \in \mathbb{R}_3[x]$ oraz $v = x^3 + 2x^2 - x + 1$,
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$ oraz $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ oraz $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Sprawdź, które z poniższych zbiorów są lnz:
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$,
 - $1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3 \in \mathbb{R}[x]$,
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,
 - $\sin x, \cos x, \sin 2x \in C(\mathbb{R})$,
 - $\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x \in C(\mathbb{R})$.
- Sprawdź, które z poniższych zbiorów generują zadaną przestrzeń liniową:
 - $x^2 + x + 1, x + 2, x^2 + 1 \in \mathbb{R}_2[X]$,
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$,
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
- Niech A będzie macierzą 3×3 . Udowodnij, że $W = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$.
- Uzasadnij, że jeśli $n = 2$ lub $n = 3$, zaś A jest macierzą rozmiaru $n \times n$, to zbiór V_λ wektorów własnych macierzy A dla wartości własnej λ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^n$.
- Uzasadnij, że obraz przekształcenia liniowego (tzn. przekształcenia addytywnego i jednorodnego) $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^n$.
- Wskaż nieskończony zbiór lnz w każdej z przestrzeni: $\mathbb{R}[X]$, $C(\mathbb{R})$, $\{(a_n) : a_n \in \mathbb{R}\}$.
- Uzasadnij, że $\{(a_n) : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ dla każdego } n \text{ naturalnego}\}$ jest przestrzenią liniową. Jaki jest wymiar tej przestrzeni?