

Algebra liniowa 2

lista 2 (wykład 9.03, ćwiczenia 11.03.2020)

Ćwiczenia

- Sprawdź, które z poniższych przekształceń są przekształceniami liniowymi:
 - $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x + 2y - 3z,$
 - $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x + 1,$
 - $F: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x], F(P)(x) = (x^2 + 1)P(x),$
 - $F: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], F(P)(x) = P(x) + x,$
 - $F: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, F(A) = A - A^T,$
 - $F: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$
 - $F: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, F(A) = \det A,$
 - $F: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, F(f) = f(2) + f(3),$
 - $F: C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}), F(f)(x) = f(x) \cdot \sin x,$
 - $F: C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}), F(f) = f' + f,$
 - $F: \{(a_n)_{n=1}^\infty, (a_n) \text{ zbieżny}\} \rightarrow \mathbb{R},$
 $F((a_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$
- Napisz macierz $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ przekształcenia liniowego F w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, jeśli:
 - $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x+y-z \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$
 - $F: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], F(P)(x) = xP'(x), \mathcal{B} = \mathcal{C} = (x^2, x, 1),$
 - $F: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, F(A) = A^T, \mathcal{B} = \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$
 - $F: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, F(A) = \text{tr} A, \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \mathcal{C} = (1).$
- Napisz macierze zamiany bazy $m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id)$ oraz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)$ dla następujących baz:
 - $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ oraz $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ dla $\mathbb{R}^3$,
 - $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$ oraz $\mathcal{B}' = (x^2 + 2x, x + 1, 1)$ dla $\mathbb{R}_2[x]$,
 - $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ oraz $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ dla $M_{2 \times 2}$
 - $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ oraz $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ dla $M_{2 \times 2}$.
- Napisz takie przekształcenie liniowe, którego jądrem jest przestrzeń:
 - $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\},$
 - $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\right\},$
 - $\{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = P(2) = 0\},$
 - $\{A \in M_{2 \times 2} : A = A^T\},$
 - $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : f(1) + f'(1) = 0\},$
 - $\{(a_n)_{n=1}^\infty : \lim a_n = 0\}.$

Zadania

- Dla każdego podpunktu ćwiczenia 1 zawierającego przekształcenie liniowe skończenie wymiarowej przestrzeni, napisz macierz tego przekształcenia w dowolnie wybranych bazach.
- Napisz macierze przekształceń liniowych z ćwiczenia 2 w następujących bazach:
 - $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$
 - $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = (x^2 + 2x, x + 1, 1),$
 - $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right),$
 - $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \mathcal{C}' = (1).$Porównaj otrzymane macierze z macierzami z ćwiczenia 2. Korzystając z wyników ćwiczenia 3 napisz i sprawdź (znany z wykładu) wzór na zamianę bazy przekształcenia liniowego.
- Przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazie $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ma macierz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Napisz macierz tego przekształcenia w bazie $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (tzn. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$).
- Korzystając z twierdzenia o indeksie znajdź wymiar każdej z przestrzeni z ćwiczenia 4.
- Korzystając z twierdzenia o indeksie oblicz wymiary następujących przestrzeni:
 - $\{P \in \mathbb{R}_5[x] : P(-x) = P(x)\},$
 - $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : \int_0^1 P(x)dx = P'(1) = 0\},$
 - $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : xP'''(x) + P''(x) = 0\},$
 - $\{A \in M_{2 \times 2} : A = 2 \cdot A^T\}.$
- Dla każdego z poniższych przekształceń liniowych znajdź przestrzenie $\ker F$ i $\text{Im} F$ oraz ich wymiary.
 - $F: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, gdzie $F(A) = A + A^T,$
 - $F: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, gdzie $F(P)(x) = xP'(x),$
 - $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix},$
 - $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $F(z) = z + \bar{z}.$
- Udowodnij, że jeśli $v_1, \dots, v_n \in V$ są l.z., a $F: V \rightarrow W$ jest liniowe, to $F(v_1), \dots, F(v_n)$ są l.z. Czy analogiczny fakt jest prawdziwy dla lnz?
- *Z twierdzenia Bezout'a wywnioskuj, że jeśli $P \in \mathbb{R}_7[x]$ i $P(1) = P(2) = \dots = P(8) = 0$, to P jest wielomianem zerowym. Definiując odpowiednie przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}_7[x] \rightarrow \mathbb{R}^8$ i używając twierdzenia o indeksie wywnioskuj stąd, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \dots, a_8$ istnieje (jedyne) wielomian P stopnia ≤ 7 taki że $P(1) = a_1, P(2) = a_2, \dots, P(8) = a_8$.