

Algebra liniowa 2 – Lista 2

Zadanie 1 Dla każdego podpunktu ćwiczenia 1 zawierającego przekształcenie liniowe skończenie wymiarowej przestrzeni, napisz macierz tego przekształcenia w dowolnie wybranych bazach.

(a) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x + 2y - 3z.$

Dla $\mathbb{R}^3$ wybieramy bazę standardową $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, a dla $\mathbb{R}$ bazę $\mathcal{B} = (1)$. Wówczas:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(F) = ([F(e_1)]_{\mathcal{B}}, [F(e_2)]_{\mathcal{B}}, [F(e_3)]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) $F : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x], F(P)(x) = (x^2 + 1)P(x).$

Dla $\mathbb{R}_2[x]$ wybieramy bazę $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, a dla $\mathbb{R}_4[x]$ bazę $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^4)$. Wówczas:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = ([F(b_1)]_{\mathcal{C}}, [F(b_2)]_{\mathcal{C}}, [F(b_3)]_{\mathcal{C}}) = ([x^2 + 1]_{\mathcal{C}}, [x^3 + x]_{\mathcal{C}}, [x^4 + x^2]_{\mathcal{C}})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) $F : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, F(A) = A - A^T.$

Dla $M_{2 \times 2}$ wybieramy bazę $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ (jednakową dla dziedziny i przeciwdziedziny). Wówczas:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = ([F(b_1)]_{\mathcal{B}}, [F(b_2)]_{\mathcal{B}}, [F(b_3)]_{\mathcal{B}}, [F(b_4)]_{\mathcal{B}}) = \left(\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}, \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}, \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}, \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) $F : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Dla $M_{2 \times 2}$ wybieramy bazę $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ (jednakową dla dziedziny i przeciwdziedziny). Wówczas:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = ([F(b_1)]_{\mathcal{B}}, [F(b_2)]_{\mathcal{B}}, [F(b_3)]_{\mathcal{B}}, [F(b_4)]_{\mathcal{B}}) = \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}, \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}, \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}, \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 2. Napisz macierze przekształceń liniowych z ćwiczenia 2 w podanych bazach. Porównaj otrzymane macierze z macierzami z ćwiczenia 2. Korzystając z wyników ćwiczenia 3 napisz i sprawdź (znany z wykładu) wzór na zamianę bazy przekształcenia liniowego.

$$(a) F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x+y-z \end{pmatrix}, \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$m_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = ([F(b'_1)]_{\mathcal{C}'}, [F(b'_2)]_{\mathcal{C}'}, [F(b'_3)]_{\mathcal{C}'}) = ([(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})]_{\mathcal{C}'}, [(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})]_{\mathcal{C}'}, [(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})]_{\mathcal{C}'}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ostatnia równość prawdziwa jest TYLKO dlatego, że baza $\mathcal{C}'$ jest bazą standardową)

$$\text{Bazy z ćwiczenia 2: } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = ([F(b_1)]_{\mathcal{C}}, [F(b_2)]_{\mathcal{C}}, [F(b_3)]_{\mathcal{C}}) = ([(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})]_{\mathcal{C}}, [(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})]_{\mathcal{C}}, [(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix})]_{\mathcal{C}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(ostatnia równość prawdziwa jest TYLKO dlatego, że baza $\mathcal{C}'$ jest bazą standardową)

Zamiana bazy (ćwiczenie 3):

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) = ([b'_1]_{\mathcal{B}}, [b'_2]_{\mathcal{B}}, [b'_3]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = m_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(id) \cdot m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) F: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], F(P)(x) = xP'(x), \mathcal{B}' = \mathcal{C}' = (x^2 + 2x, x + 1, 1),$$

$$m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = ([F(b'_1)]_{\mathcal{B}'}, [F(b'_2)]_{\mathcal{B}'}, [F(b'_3)]_{\mathcal{B}'}) = ([2x^2 + 2x]_{\mathcal{B}'}, [x]_{\mathcal{B}'}, [0]_{\mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bo

$$2x^2 + 2x = 2b'_1 - 2b'_2 + 2b'_3$$

$$x = 0b'_1 + 1b'_2 - 1b'_3$$

$$0 = 0b'_1 + 0b'_2 + 0b'_3$$

$$\text{Bazy z ćwiczenia 2: } \mathcal{B} = \mathcal{C} = (x^2, x, 1),$$

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = ([F(b_1)]_{\mathcal{B}}, [F(b_2)]_{\mathcal{B}}, [F(b_3)]_{\mathcal{B}}) = ([2x^2]_{\mathcal{B}}, [x]_{\mathcal{B}}, [0]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bo

$$2x^2 = 2b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$x = 0b_1 + 1b_2 + 0b_3$$

$$0 = 0b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

Zamiana bazy (ćwiczenie 3):

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) = ([b'_1]_{\mathcal{B}}, [b'_2]_{\mathcal{B}}, [b'_3]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id) = (m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $F : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $F(A) = A^T$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}))$,

$$m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = ([F(b'_1)]_{\mathcal{B}'}, [F(b'_2)]_{\mathcal{B}'}, [F(b'_3)]_{\mathcal{B}'}, [F(b'_4)]_{\mathcal{B}'}) = ([(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})]_{\mathcal{B}'}, [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix})]_{\mathcal{B}'}, [(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})]_{\mathcal{B}'}, [(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix})]_{\mathcal{B}'})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bo

$$(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}) = b'_1 \quad (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}) = b'_3 \quad (\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) = b'_2 \quad (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}) = b'_4$$

Bazy z ćwiczenia 2: $\mathcal{B} = \mathcal{C} = ((\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}))$,

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = ([F(b_1)]_{\mathcal{B}}, [F(b_2)]_{\mathcal{B}}, [F(b_3)]_{\mathcal{B}}, [F(b_4)]_{\mathcal{B}}) = ([(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})]_{\mathcal{B}}, [(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})]_{\mathcal{B}}, [(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})]_{\mathcal{B}}, [(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})]_{\mathcal{B}})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zamiana bazy (ćwiczenie 3):

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) = ([b'_1]_{\mathcal{B}}, [b'_2]_{\mathcal{B}}, [b'_3]_{\mathcal{B}}, [b'_4]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id) = (m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $F : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(A) = \text{tr} A$, $\mathcal{B}' = ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}))$, $\mathcal{C}' = (1)$.

Bazy z ćwiczenia 2: $\mathcal{B} = ((\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}))$, $\mathcal{C} = (1)$.

Zadanie 3 Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazie $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ma macierz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Napisz macierz tego przekształcenia w bazie $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (tzn. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$).

Zgodnie ze wzorem z wykładu:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)$$

oraz

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id) = ([b_1]_{\mathcal{C}}, [b_2]_{\mathcal{C}}, [b_3]_{\mathcal{C}})$$

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id) = ([c_1]_{\mathcal{B}}, [c_2]_{\mathcal{B}}, [c_3]_{\mathcal{B}})$$

przy czym obie powyższe macierze zamiany bazy są wzajemnie odwrotne (czyli wystarczy wyznaczyć jedną z nich). Zauważmy, że:

$$[c_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ bo } c_1 = 2 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$$

$$[c_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ bo } c_2 = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$$

$$[c_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ bo } c_3 = -1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$$

stąd

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Zadanie 4 Korzystając z twierdzenia o indeksie znajdź wymiar każdej z przestrzeni z ćwiczenia 4.

- (a) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y = y - z = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \ker F$,
gdzie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowane $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \end{pmatrix}$. Ponieważ F jest „na” (każdy element $\mathbb{R}^2$ jest postaci $\begin{pmatrix} x-y \\ y-z \end{pmatrix}$), więc $\dim \operatorname{Im} F = 2$, czyli z twierdzenia o indeksie

$$\dim \ker F = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} F = 3 - 2 = 1$$

- (b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\right\} = \ker F$, gdzie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowane jako $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + 2y$. Ponieważ F jest „na” (każdy element $\mathbb{R}$ jest postaci $x + 2y$), więc $\dim \operatorname{Im} F = 1$, czyli z twierdzenia o indeksie

$$\dim \ker F = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Im} F = 2 - 1 = 1$$

- (c) $\{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = P(2) = 0\} = \left\{P \in \mathbb{R}_2[x] : \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \ker F$, gdzie $F : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest zdefiniowane jako $F(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$. Ponieważ F jest „na” (możemy otrzymać każdy element $\mathbb{R}^2$), więc $\dim \operatorname{Im} F = 2$, czyli z twierdzenia o indeksie

$$\dim \ker F = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \operatorname{Im} F = 3 - 2 = 1$$

- (d) $\{A \in M_{2 \times 2} : A = A^\top\} = \{A \in M_{2 \times 2} : A - A^\top = 0\} = \ker F$, gdzie $F : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ jest zdefiniowane jako $F(A) = A - A^\top$. Odwzorowanie F nie jest „na” – możemy otrzymać jedynie macierze postaci $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$, więc $\dim \operatorname{Im} F = 1$. Z twierdzenia o indeksie:

$$\dim \ker F = \dim M_{2 \times 2} - \dim \operatorname{Im} F = 4 - 1 = 3$$

Zadanie 5 Korzystając z twierdzenia o indeksie oblicz wymiary następujących przestrzeni:

- (b) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : \int_0^1 P(x)dx = P'(1) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{pmatrix} \int_0^1 P(x)dx \\ P'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \ker F$, gdzie $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest zdefiniowane jako $F(P) = \begin{pmatrix} \int_0^1 P(x)dx \\ P'(1) \end{pmatrix}$. Obrazem wielomianu stałego 1 jest $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a obrazem wielomianu x jest $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Oznacza to, że $\dim \operatorname{Im} F \geq 2$ (bo mamy dwa liniowo niezależne wektory w $\operatorname{Im} F$), skąd $\dim \operatorname{Im} F = 2$ (bo $\operatorname{Im} F$ jest podprzestrzenią 2-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^2$). Z twierdzenia o indeksie:

$$\dim \ker F = R_3[x] - \dim \operatorname{Im} F = 4 - 2 = 2$$

- (c) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : xP'''(x) + P''(x) = 0\} = \ker F$, gdzie $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ jest zdefiniowane jako $F(P)(x) = xP'''(x) + P''(x)$. Obrazem wielomianu x^3 jest $12x$, zaś obrazem wielomianu x^2 jest 2 . Oznacza to, że $\dim \operatorname{Im} F \geq 2$ (bo mamy dwa liniowo niezależne wektory w $\operatorname{Im} F$), skąd $\dim \operatorname{Im} F = 2$ (bo $\operatorname{Im} F$ jest podprzestrzenią 2-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}_1[x]$). Z twierdzenia o indeksie:

$$\dim \ker F = R_3[x] - \dim \operatorname{Im} F = 4 - 2 = 2$$

Zadanie 6 Dla każdego z poniższych przekształceń liniowych znajdź przestrzenie $\ker F$ i $\operatorname{Im} F$ oraz ich wymiary.

(a) $F : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, gdzie $F(A) = A + A^T$,

$$\begin{aligned}\ker F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = d = 0, c = -b \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Zatem $\dim \ker F = 1$ (baza: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$), zaś $\operatorname{Im} F$ jest przestrzenią macierzy diagonalnych, czyli $\dim \operatorname{Im} F = 3$ (baza: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

(b) $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, gdzie $F(P)(x) = xP'(x)$,

$$\ker F = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : x(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 0\} = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : 3ax^3 + 2bx^2 + cx = 0\}$$

$$\{ax^3 + bx^2 + cx + d : 3a = 2b = c = 0\} = \{d : d \in \mathbb{R}\}$$

$$\operatorname{Im} F = \{3ax^3 + 2bx^2 + cx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Zatem $\ker F$ to przestrzeń wielomianów stałych, czyli $\dim \ker F = 1$ (baza: 1), a $\operatorname{Im} F$ to przestrzeń wielomianów o zerowym wyrazie wolnym, czyli $\dim \operatorname{Im} F = 3$ (baza: 1, x , x^2).

(c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}$,

$$\ker F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x+y = y+z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = -x, z = -y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Zatem $\dim \ker F = 1$ (baza: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Z tw. o indeksie $\dim \operatorname{Im} F = 2$. Ponieważ $\operatorname{Im} F$ jest 2-wymiarową podprzestrzenią 2-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^2$, więc $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^2$.

(d) $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $F(z) = z + \bar{z}$.

$$\ker F = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 0\} = \{a + ib \in \mathbb{C} : a + ib + a - ib = 0\} = \{a + ib \in \mathbb{C} : a = 0\}$$

$$\operatorname{Im} F = \{z + \bar{z} : z \in \mathbb{C}\} = \{a + ib + a - ib : a, b \in \mathbb{R}\} = \{2a : a \in \mathbb{R}\}$$

Zatem $\dim \ker F = 1$ (baza: i), $\dim \operatorname{Im} F = 1$ (baza: 1).

Zadanie 7 Udowodnij, że jeśli $v_1, \dots, v_n \in V$ są l.z., a $F : V \rightarrow W$ jest liniowe, to $F(v_1), \dots, F(v_n)$ są l.z.
Czy analogiczny fakt jest prawdziwy dla l.n.z.?

Jeśli $v_1, \dots, v_n \in V$ są l.z., to jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych. Przyjmijmy, że jest to v_1 :

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n$$

Ponieważ F jest liniowe, więc:

$$F(v_1) = F(\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_2 F(v_2) + \alpha_3 F(v_3) + \dots + \alpha_n F(v_n)$$

czyli $F(v_1)$ jest kombinacją liniową $F(v_2), \dots, F(v_n)$, tzn. $F(v_1), \dots, F(v_n)$ są l.z.

Nie, wystarczy rozważyć odwzorowanie zerowe F . Wówczas $F(v_1) = \dots = F(v_n) = 0$, czyli $F(v_1), \dots, F(v_n)$ są l.z., pomimo tego, że $v_1, \dots, v_n \in V$ są l.n.z.

Zadanie 8 *Wykaż, że jeśli $P \in \mathbb{R}_7[x]$ i $P(1) = P(2) = \dots = P(8) = 0$, to P jest wielomianem zerowym. Definiując odpowiednie przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_7[x] \rightarrow \mathbb{R}^8$ i używając twierdzenia o indeksie wnioskuje się, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \dots, a_8$ istnieje (jedyne) wielomian P stopnia ≤ 7 taki że $P(1) = a_1, P(2) = a_2, \dots, P(8) = a_8$.

Rozważmy odwzorowanie:

$$F : \mathbb{R}_7[x] \rightarrow \mathbb{R}^8$$

zdefiniowane

$$F(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ \dots \\ P(8) \end{pmatrix}$$

jest odwzorowaniem liniowym. Trzeba udowodnić, że F jest różnowartościowe i „na”. Zauważmy, że:

$$\ker F = \{P \in \mathbb{R}_7[x] : \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ \dots \\ P(8) \end{pmatrix} = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_7[x] : P(1) = \dots = P(8) = 0\}$$

Wielomian stopnia ≤ 7 ma nie więcej niż 7 pierwiastków rzeczywistych, chyba że jest wielomianem zerowym. Skoro wielomian P ma 8 pierwiastków, to jest wielomianem zerowym, czyli

$$\ker F = \{0\}$$

Stąd F jest różnowartościowe. Z twierdzenia o indeksie:

$$\dim \mathbb{R}_7[x] = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F$$

czyli

$$8 = 0 + \dim \operatorname{Im} F$$

Zatem $\operatorname{Im} F$ jest 8-wymiarową podprzestrzenią przeciwdziedziny $\mathbb{R}^8$. Ponieważ $\mathbb{R}^8$ ma tylko jedną podprzestrzeń 8-wymiarową (samą siebie), więc $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^8$, czyli F jest „na”.