

Algebra liniowa 2

lista 3 (wykład 23.03, ćwiczenia 25.03.2020)

Ćwiczenia

1. Rozwiąż poniższe układy równań przy pomocy metody Cramera:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ -3x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 2z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x - 2y + 3z - t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ 5x - 2y - 2t = 7 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}, \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3y - z = 2 \\ 4z + 3s = 1 \\ 2s - t = -1 \end{cases}$$

2. Oblicz wyznacznik każdej z poniższych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sprawdź, czy macierz przekształcenia (w dowolnie wybranych bazach) ma zerowy wyznacznik.

(a) $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $F(P(x)) = xP'(x)$, (c) $F : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
(b) $F : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$, (d) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

4. Przy pomocy wzorów Cramera znajdź wielomian stopnia co najwyżej 3, którego wykres przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. W obliczeniach wykorzystaj wzór na wyznacznik Vandermonde'a.

Zadania

1. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Powtarzając wielokrotnie operację dodania krotności jednej kolumny (wiersza) do innej kolumny (wiersza) przekształć każdą z poniższych macierzy do postaci z dużą liczbą zer, a następnie oblicz jej wyznacznik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Ustal jak zmieni się wyznacznik macierzy $n \times n$, jeśli:

- (a) każdy wyraz macierzy zamienimy na przeciwny,
(b) każdy wyraz macierzy przemnożymy przez niezerową liczbę $t \in \mathbb{R}$,
(c) pierwszą kolumnę macierzy przestawimy na koniec macierzy,
(d) wiersze macierzy ustawimy w odwrotnym porządku.

4. Jaki jest wyznacznik macierzy, której jedna z kolumn jest krotnością innej kolumny?

5. Dane są przekształcenia $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $F(P(x)) = xP''(x)$ oraz $G : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$, $G(P) = P(2)$.

- (a) Napisz wzór przekształcenia $G \circ F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$.
(b) Napisz macierze przekształceń F , G i $G \circ F$ w bazach $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, $\mathcal{C} = (1 + x, x + x^2, x^2)$, $\mathcal{D} = (1)$.
(c) Sprawdź (wymnażając macierze), że zachodzi $m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G)m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F)$.

6. Które z poniższych przekształceń są liniowe względem każdej współrzędnej?

- (a) $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(v, w) = v \circ w$,
- (b) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $F(v, w) = v \times w$,
- (c) $F : M_{n \times n} \times M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, gdzie $F(A, B) = AB$,
- (d) $F : M_{n \times n} \times M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, gdzie $F(A, B) = A + B$,
- (e) $F : C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$, gdzie $F(f, g) = f \cdot g$.

7. *Pewna kwadratowa macierz ma następującą postać klatkową: $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, gdzie A i B to kwadratowe macierze, C to macierz prostokątna, a 0 to klatka złożona z samych zer. Powołując się bezpośrednio na definicję wyznacznika uzasadnij, że $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$.
8. *Uzasadnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia $\leq n$, którego wykres przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, o ile $x_0, x_1, \dots, x_n$ są parami różne. Wskazówka: napisz odpowiedni układ równań i posługując się wzorami Cramera oraz wyznacznikiem Vandermonde'a uzasadnij, że ma on dokładnie jedno rozwiązanie.