

Algebra Liniowa 2 – Lista nr 3
Rozwiązania

Zadanie 1. Oblicz wyznacznik następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie.

Pierwsza z tych macierzy przypomina macierz górnotrójkątną, tylko że podział tej macierzy na trójkąty przebiega teraz wzdłuż ‘niewłaściwej’ przekątnej (tzw. przekątna poboczna). Bezpośrednio nie możemy więc wykorzystać Faktu 2.10 ze Skryptu. Możemy jednak skorzystać z tego samego argumentu: jedynym rozstawieniem wyrazów, które nie zawiera wyrazu 0 jest owa ‘niewłaściwa’ przekątna. Jednak obecnie musimy jeszcze ustalić znak, z jakim iloczyn wyrazów tego rozstawienia występuje w wyznaczniku. W tym celu musimy ustalić liczbę zamian par kolumn, które przeprowadzają to rozstawienie w przekątną główną. Łatwo zauważyć, że potrzeba do tego dwóch takich przestawień. Dlatego wartość szukanego wyznacznika to po prostu iloczyn wyrazów z owej pobocznej przekątnej, tzn. $5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 30$.

Zauważmy przy okazji, że jeżeli w wyjściowej macierzy przestawimy pierwszą i ostatnią kolumnę, a następnie drugą i przedostatnią, to nie zmienimy wyznacznika (Skrypt, Wniosek 2.7, str. 22), a przeprowadzimy zadaną macierz właśnie w macierz górnotrójkątną i teraz już będziemy mogli skorzystać ze wspomnianego Faktu 2.10 (Skrypt, str. 23).

Jak łatwo zauważyć druga macierz to z kolei macierz składająca się z klatek (Skrypt, Fakt 2.11, str. 23), dlatego jej wyznacznik jest równy iloczynowi wyznaczników macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Obydwa te wyznaczniki łatwo oblicza się z definicji

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 3 - \\ &\quad - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8 + 1 + 9 - 3 - 6 - 4 = 5 \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 5 = 15 - 30 = -15$$

Stąd ostatecznie

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-15) = -75.$$

Powinno być jasne, że ostatnia z powyższych macierzy to ‘prawie’ macierz diagonalna – jedyne niezerowe wyrazy tworzą rozstawienie: żadne dwa nie stoją w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie. Dlatego wartością ‘bez znaku’, a więc wartością bezwzględną szukanego wyznacznika jest wartość iloczynu $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 40$. Dla ustalenia znaku tego rozstawienia musimy znaleźć serię zamian par kolumn, która przeprowadzi dane rozstawienie w przekątną główną. Łatwo widzieć, że serie taką tworzą następujące trzy zamiany kolumn: drugiej i ostatniej, następnie trzeciej i ostatniej, w końcu — czwartej i ostatniej. Ta seria zamian generuje taki oto ciąg macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ze względu na nieparzystą liczbę zamian par kolumn prowadzących od pierwszej do ostatniej macierzy w tym ciągu ich wyznaczniki mają przeciwne znaki i tę samą wartość bezwzględną. Ponieważ ostatnia macierz w powyższym ciągu to macierz diagonalna, więc jej wyznacznik wynosi 40 (Skrypt, Fakt 2.9, str. 23). Dlatego wartość wyznacznika pierwotnej macierzy to -40.

Zadanie 2. Powtarzając wielokrotnie operację dodania kolumny (wiersza) do innej kolumny (wiersza) przekształć każdą z poniższych macierzy do postaci z dużą liczbą zer, a następnie oblicz jej wyznacznik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie.

Zacznijmy od pierwszej z powyższych macierzy, tzn. od macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Najpierw odejmujemy pierwszy wiersz od drugiego otrzymując macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Następnie odejmujemy ten sam pierwszy wiersz kolejno od wszystkich pozostałych wierszy, oprócz ostatniego. To da nam kolejno następujące dwie macierze:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

oraz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że w ostatniej z tych macierzy pierwsza kolumna składa się tylko z jednej jedynki w pierwszym wierszu, a poza tym z samych zer. Wykorzystamy tę jedynkę do wyzerowania całego pierwszego wiersza. Dlatego będziemy teraz odejmować tę kolumnę kolejno od wszystkich pozostałych kolumn oprócz ostatniej, bo w ostatniej z nich w pierwszym wierszu już stoi 0. W efekcie po trzech takich odejmowaniach otrzymamy następującą macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz dodamy przedostatni wiersz do ostatniego, co spowoduje, że druga kolumna będzie miała tylko jeden niezerowy wyraz, mianowicie minus jedynkę w przed-

ostatnim wierszu. Istotnie, otrzymana macierz ma następującą postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teraz za pomocą drugiej kolumny ‘zerujemy’ cały przedostatni wiersz. Ponieważ jedynym niezerowym wyrazem w tym wierszu poza potrzebną nam -1 jest 1 w ostatniej kolumnie, dodajemy więc drugą kolumnę do ostatniej otrzymując

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teraz dodajemy ostatni wiersz do trzeciego, aby w zasadzie ‘wyzerować’ trzecią kolumnę (zostanie w niej tylko 1 w ostatnim wierszu):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Używamy teraz trzeciej kolumny do ‘wyzerowania’ ostatniego wiersza, odejmując trzecią od czwartej, a następnie od piątej, ostatniej. W efekcie uzyskamy taką macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W niej dodamy czwartą kolumnę do piątej, co ‘wyzeruje’ tę ostatnią. Istotnie macierz przybierze postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W końcu dodamy drugi wiersz do trzeciego, otrzymując w rezultacie macierz,

która w każdym wierszu i w każdej kolumnie ma tylko jeden niezerowy wyraz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teraz zamieniamy miejscami najpierw drugą i czwartą kolumnę, a następnie trzecią i piątą, co prowadzi do następującej macierzy diagonalnej

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ macierz tę uzyskaliśmy z interesującej nas macierzy w drodze dwóch (parzystel liczby) przestawień par kolumn, więc wyznaczniki obu macierzy są równe. Wyznacznik końcowej macierzy diagonalnej wynosi 4 i tyle wynosi wyznacznik początkowej macierzy z tego zadania.

Rozpatrzmy teraz kolejną macierz, tj. macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Odejmując pierwszą kolumnę kolejno od drugiej, trzeciej, czwartej i piątej otrzymujemy macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Teraz odejmujemy drugą kolumnę — pomnożoną przez 2 od trzeciej, pomnożoną przez 3 od czwartej i pomnożoną przez 4 od piątej otrzymując w efekcie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tę macierz można jeszcze przekształcić i uzyskać 0 w jej lewym górnym rogu, a następnie w całej drugiej kolumnie poza pierwszym jej wyrazem, ale już teraz

widać, że wyznacznik tej macierzy wynosi 0 (kolumna zer; dwie kolumny jednakowe) (Skrypt, Wniosek 2.8, str. 22).

Przekształcanie ostatniej macierzy z tego zadania, a więc macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

zaczniemy od odjęcia drugiego wiersza od każdego z pozostałych otrzymując macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalej używamy trzeciego wiersza do ‘wyzerowania’ pierwszej kolumny:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teraz od drugiego wiersza odejmujemy pierwszy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

po czym od ostatniej kolumny odejmujemy drugą

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

w końcu od czwartej kolumny odejmujemy trzecią

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ w otrzymanej macierzy dwie kolumny są jednakowe, więc jej wyznacznik równa się zero (Skrypt, Wniosek 2.8, str. 22).

Zadanie 3 Ustal, jak zmieni się wyznacznik macierzy $n \times n$, jeśli:

- (a) każdy wyraz macierzy zamienimy na przeciwny,
- (b) każdy wyraz macierzy pomnożymy przez niezerową liczbę $t \in \mathbb{R}$
- (c) pierwszą kolumnę przestawimy na koniec macierzy,
- (d) wiersze macierzy ustawimy w odwrotnym porządku.

Rozwiązanie.

(a) każdy wyraz macierzy zamieniamy na przeciwny
 Posługując się definicją wyznacznika jako sumy odpowiednich iloczynów wyrazów macierzy (rozstawień z właściwym znakiem, Skrypt, Definicja 2.5, str. 21) wnioskujemy, że zamiana wszystkich wyrazów macierzy na liczby przeciwne spowoduje tylko ewentualną zmianę znaku wszystkich iloczynów powyższej sumy. Rzeczywiście, obecnie (każdy) pojedynczy składnik tej sumy będzie miał postać

$$\pm(-a_{i_1j_1}) \cdot (-a_{i_2j_2}) \cdots (-a_{i_nj_n}) = (-1)^n \cdot (\pm a_{i_1j_1} \cdot a_{i_2j_2} \cdots a_{i_nj_n})$$

Stąd

$$\begin{aligned} \det(-A) &= \sum \pm(-a_{i_1j_1}) \cdot (-a_{i_2j_2}) \cdots (-a_{i_nj_n}) \\ &= \sum (-1)^n \cdot (\pm a_{i_1j_1} \cdot a_{i_2j_2} \cdots a_{i_nj_n}) \\ &= (-1)^n \cdot \sum \pm a_{i_1j_1} \cdot a_{i_2j_2} \cdots a_{i_nj_n} = (-1)^n \det A \end{aligned}$$

Tak więc zamiana każdego wyrazu macierzy na przeciwny powoduje zmianę wyznacznika polegającą na pomnożeniu go przez czynnik $(-1)^n$, a więc ostatecznie taki wyznacznik nie zmieni się, gdy n jest parzyste, a zmieni znak na przeciwny, gdy n jest nieparzyste.

(b) każdy wyraz macierzy mnożymy przez niezerową liczbę $t \in \mathbb{R}$
 Zgodnie z Wnioskiem 2.14.1) (Skrypt, str. 25), wyznacznik macierzy mnoży się przez t , jeśli wybraną kolumnę pomnożymy przez t . Macierz, w której wszystkie wyrazy pomnożono przez t można rozpatrywać jako macierz, którą otrzymano mnożąc przez t kolejno każdą z jej kolumn. Pojawienie się czynnika t w kolejnej kolumnie spowoduje pomnożenie przez to samo t wyznacznika. Dlatego pomnożenie dwóch kolumn przez t spowoduje zmianę wyznacznika o czynnik t^2 ; trzech — o czynnik t^3 . W końcu pomnożenie wszystkich kolumn (a więc wszystkich wyrazów) przez wspólny czynnik t spowoduje pomnożenie wyznacznika przez czynnik t^n , gdzie n jest liczbą kolumn macierzy.

(c) pierwszą kolumnę przestawiamy na koniec macierzy
 Gdy w danej macierzy przestawimy pierwszą kolumnę na koniec, to otrzymamy macierz, w której pierwszą kolumną będzie druga kolumna zadanej macierzy;

drugą — trzecią; itd. Chcąc zaobserwować, co dzieje się z wyznacznikiem musimy odwołać się do jakiegoś twierdzenia, które opisuje zachowanie się wyznacznika pod wpływem zmiany kolumn. Mamy jedno takie twierdzenie — Skrypt, Wniosek 2.7, str. 22, które opisuje to zachowanie, ale tylko w przypadku prostych zmian — zamieniamy miejscami dwie kolumny, co spowoduje zmianę znaku wyznacznika.

Dlatego musimy opisać przestawienie pierwszej kolumny za pomocą zamian (przestawień) par kolumn. Teraz sprawa powinna być już prosta:

- zamieniamy pierwszą kolumnę z drugą. W ten sposób druga kolumna stanie się pierwszą, a dotychczasowa pierwsza powędruje na miejsce drugiej, o jeden ‘krok’ bliżej końca
- zamieniamy obecną drugą kolumnę (a więc pierwszą kolumnę wyjściowej macierzy) z trzecią. W ten sposób pierwotnie trzecia kolumna stanie się drugą, a pierwsza kolumna pierwotnej macierzy znajdzie się na trzecim miejscu
- ...
- zamieniamy obecnie przedostatnią kolumnę (która była początkowo pierwszą) z kolumną ostatnią. W ten sposób pierwsza kolumna została przestawiona na koniec macierzy.

Widać więc, że dokonując $n - 1$ przestawień par kolumn przeniesiemy pierwszą z nich na koniec macierzy. Jedyne co się stało z wyznacznikiem, to ewentualna zmiana znaku, gdyż każda z tych zamian ją powodowała. $n - 1$ takich zamian powoduje zmianę znaku wyznacznika o czynnik $(-1)^{n-1}$ i w zależności od parzystości n powoduje lub nie zmianę znaku pierwotnego wyznacznika.

(d) wiersze macierzy ustawiamy w odwrotnym porządku

Zamieniamy miejscami pierwszą kolumnę z ostatnią, co zmienia znak wyznacznika.

Zamieniamy drugą kolumnę z przedostatnią — ponowna zmiana znaku, a więc wróciliśmy do pierwotnej wartości wyznacznika.

Zamieniamy trzecią z trzecią od końca — kolejna zmiana znaku.

Czwartą z czwartą od końca — powrotna zmiana znaku.

...

Gdy dotrzemy ‘w okolice środkowej kolumny’ (szczegóły zależą od parzystości liczby kolumn!), kończymy, bo wszystkie kolumny znajdują się już na żądanych miejscach. Łatwo się przekonać, że potrzebna liczba zamian wynosi $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, gdzie $\lceil x \rceil$ oznacza funkcję część całkowita.

Zadanie 4 Jaki jest wyznacznik macierzy, której jedna z kolumn jest krotnością innej kolumny?

Rozwiązanie.

Zgodnie z Wnioskiem 2.14.1) (Skrypt, str.25) wyznacznik macierzy mnoży się

przez t , jeśli jedną z jej kolumn pomnożymy przez t (patrz także Skrypt, Fakt 2.13.2), str. 25). Jeśli więc w macierzy jedna z kolumn jest krotnością innej, to jej wyznacznik jest tą samą krotnością wyznacznika macierzy, w której dwie kolumny są jednakowe. A wyznacznik takiej macierzy (Skrypt, Wniosek 2.8, str. 22) wynosi zero. Tak więc wyznacznik macierzy rozważanej w tym punkcie również wynosi zero.

Zadanie 5 Dane są przekształcenia $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $F(P(x)) = xP''(x)$ oraz $G : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$, $G(P) = P(2)$.

- (a) Napisz wzór przekształcenia $G \circ F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Napisz macierz przekształceń F , G , $G \circ F$ w bazach $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, $\mathcal{C} = (1 + x, x + x^2, x^2)$, $\mathcal{D} = (1)$.
- (c) Sprawdź (wyznażając macierze), że zachodzi $m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G)m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F)$.

Rozwiązanie.

- (a) Wzór przekształcenia $G \circ F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$.

Niech $P(x)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia ≤ 3 , tzn. niech $P(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. Wtedy zgodnie z definicją złożenia funkcji i na mocy definicji F oraz G mamy $(G \circ F)(P(x)) = G(F(P(x))) = G(xP''(x)) = 2 \cdot P''(2)$.

- (b) Macierze przekształceń

Zgodnie z definicją macierzy przekształcenia (Skrypt, Definicja 1.23, str. 15) macierz taką tworzy się zapisując w jej kolejnych kolumnach współrzędne w bazie przestrzeni docelowej obrazów wektorów bazy przestrzeni wyjściowej. Dla przekształcenia F przestrzenią wyjściową (a więc dziedziną) jest zbiór (przestrzeń) $\mathbb{R}_3[x]$ z bazą $\mathcal{B}$, natomiast przestrzenią docelową (przeciwdziedziną) — $\mathbb{R}_2[x]$ z bazą $\mathcal{C}$. Obrazy wektorów bazy $\mathcal{B}$ przez F , to odpowiednio

$$\begin{aligned} F(1) &= x \cdot 1'' = 0, \\ F(x) &= x \cdot x'' = x \cdot 1' = x \cdot 0 = 0, \\ F(x^2) &= x \cdot (x^2)'' = x \cdot (2x)' = x \cdot 2 = 2x = 0(1+x) + 2(x+x^2) + (-2)x^2, \\ F(x^3) &= x \cdot (x^3)'' = x \cdot (3x^2)' = x \cdot 6x = 6x^2. \end{aligned}$$

Stąd macierz przekształcenia F w bazach $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{C}$ to

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Z kolei dla przekształcenia G jego wartości na elementach bazy $\mathcal{C}$ to odpowiednio

$$\begin{aligned} G(1+x) &= 1+2=3, \\ G(x+x^2) &= 2+2^2=6, \\ G(x^2) &= 2^2=4 \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy macierz G w bazach $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{D}$ o postaci

$$m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

W końcu analogicznie znajdujemy zarówno wartości przekształcenia $G \circ F$ na elementach bazy $\mathcal{B}$, jak i macierz tego przekształcenia w zadanych bazach ($\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$):

$$\begin{aligned} G \circ F(1) &= 2 \cdot (1'')(2) = 0, \\ G \circ F(x) &= 2 \cdot (x'')(2) = 0, \\ G \circ F(x^2) &= 2 \cdot ((x^2)'')(2) = 2 \cdot 2 = 4, \\ G \circ F(x^3) &= 2 \cdot ((x^3)'')(2) = 2 \cdot (6x)(2) = 2 \cdot 12 = 24; \end{aligned}$$

$$m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 24 \end{pmatrix}.$$

(c) Wzór $m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G)m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F)$.

Z poprzedniego punktu wiemy, jak wyglądają występujące w tym wzorze macierze. Dlatego podstawiamy je do niego, a już natychmiast otrzymujemy łatwym, bezpośrednim rachunkiem żadaną zależność:

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) \cdot m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 24 \end{pmatrix} = m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F). \end{aligned}$$

Zadanie 6 Które z poniższych przekształceń są liniowe względem każdej współrzędnej?

- (a) $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $F(v, w) = v \circ w$,
- (b) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $F(v, w) = v \times w$,
- (c) $F : M_{n \times n} \times M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, gdzie $F(A, B) = AB$,
- (d) $F : M_{n \times n} \times M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, gdzie $F(A, B) = A + B$,
- (e) $F : C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$, gdzie $F(f, g) = f \cdot g$.

Rozwiązanie.

- (a) Przede wszystkim przypomnijmy definicję iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$:

$$v \circ w = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \cdot w_i$$

Na początek udowodnimy, że iloczyn ten jest liniowy względem pierwszej współrzędnej, tzn. że jest addytywny i jednorodny (Skrypt, str. 12). W tym celu wybierzmy dowolny wektor $w \in \mathbb{R}^n$ i ustalmy go. Następnie rozpatrzmy przekształcenie otrzymane w ten sposób z F , nazwijmy je F_w . Jest ono zdefiniowane następująco:

$$F_w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_w(v) = v \circ w.$$

Jeśli przekształcenie to ma być addytywne, to dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}^n$ musi być spełniona następująca równość (*)

$$F_w(u + v) = F_w(u) + F_w(v).$$

Wyznamy więc wartość obu stron powyższej równości korzystając z definicji F_w , samego F oraz iloczynu skłaranego. Wtedy lewa strona tej równości pozwala się wyznaczyć jako

$$F_w(u + v) = F(u + v, w) = (u + v) \circ w.$$

Natomiast prawa strona jest równa

$$F_w(u) + F_w(v) = F(u, w) + F(v, w) = u \circ w + v \circ w.$$

Stąd łatwo zauważyć, że w tym przypadku addytywność przekształcenia F_w (patrz (*) wyżej) oznacza w istocie rozdzielność dodawania (na pierwszej współrzędnej) względem iloczynu skłaranego, tzn. równość

$$(u + v) \circ w = u \circ w + v \circ w,$$

która to własność jest łatwa do bezpośredniego sprawdzenia z definicji iloczynu skłaranego oraz własności dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych. Rzeczywiście, mamy

$$\begin{aligned} (u + v) \circ w &= \sum_{i=0}^{n-1} (u_i + v_i) \cdot w_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (u_i \cdot w_i + v_i \cdot w_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (u_i \cdot w_i) + \sum_{i=0}^{n-1} (v_i \cdot w_i) \\ &= u \circ w + v \circ w \end{aligned}$$

Dowód jednorodności przekształcenia F_w wygląda analogicznie. Sama jednorodność to

$$F_w(tv) = tF_w(v),$$

co po zastosowaniu definicji F_w, F oraz iloczynu skalarnego tym razem daje

$$\begin{aligned} F_w(tv) &= F(tv, w) = (tv) \circ w = \sum_{i=0}^{n-1} ((tv)_i \cdot w_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (t(v_i \cdot w_i)) \\ &= t \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (v_i \cdot w_i) = t \cdot (v \circ w) = t \cdot F(v, w) = t \cdot F_w(v) \end{aligned}$$

W ten sposób udowodnilimy, że iloczyn skalarny, a więc podane w zadaniu przekształcenie $F(u, v)$, istotnie jest liniowe względem pierwszej współrzędnej.

Ponieważ iloczyn skalarny jest przemienny, tzn. $v \circ w = w \circ v$, więc ponieważ przekształcenie F jest liniowe względem pierwszej współrzędnej, jest również liniowe względem swojej drugiej współrzędnej.

- (b) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $F(v, w) = v \times w$,

Z dotychczasowego wykładu powinny być znane następujące podstawowe własności iloczynu wektorowego (jeśli nie — to można je dość łatwo (rachunek!) wyprowadzić bezpośrednio z definicji tego iloczynu):

- $t(v \times w) = (tv) \times w = v \times (tw)$,
- $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$,
- $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

Własności te pozwalają z kolei łatwo uzasadnić liniowość iloczynu wektorowego względem każdego ze swoich dwóch argumentów. Uzasadnienie jest analogiczne do przedstawionego poniżej w punkcie (c), gdzie kontekst macierzowy jest prostszy do ogarnięcia, dlatego zostaje pominięte.

- (c) $F : M_{n \times n} \times M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, gdzie $F(A, B) = AB$,

Ponieważ definicja mnożenia macierzy (metodą “wiersz razy kolumna”) gwarantuje nam, że mnożenie to jest rozdzielne względem dodawania, tzn. mamy

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC,$$

więc rozważane przekształcenie jest addytywne względem każdej ze swoich współrzędnych, gdyż

$$F(A + B, C) = (A + B)C = AC + BC = F(A, C) + F(B, C)$$

oraz

$$F(A, B + C) = A(B + C) = AB + AC = F(A, B) + F(A, C)$$

Ponadto mnożenie macierzy przez skalar ma tę własność, że $tA = At$, co pozwala uzasadnić, że $A(tB) = (At)B = (tA)B = t(AB)$, skąd już

łatwo wywnioskować jednorodność przekształcenia F względem każdej ze współrzędnych:

$$\begin{aligned} F(tA, B) &= (tA)B = t(AB) = tF(A, B); \\ F(A, tB) &= A(tB) = (At)B = (tA)B = t(AB) = tF(A, B) \end{aligned}$$

- (d) $F : M_{n \times n} \times M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, gdzie $F(A, B) = A + B$,

Łatwo się przekonać, że dodawanie współrzędnych nigdy nie może być liniowe, bo (paradoksalnie) nie jest addytywne! Istotnie addytywność np. względem pierwszej współrzędnej oznaczałaby, że dla dowolnych A, B, C mamy $F(A + B, C) = F(A, C) + F(B, C)$. Tymczasem z samej definicji przekształcenia F mamy $F(A + B, C) = (A + B) + C$, podczas gdy $F(A, C) + F(B, C) = (A + C) + (B + C) = (A + B) + 2C$ i jeśli tylko C nie jest zerem, to $F(A + B, C) \neq F(A, C) + F(B, C)$.

- (e) Ponieważ działania dodawania i mnożenia rzeczywistych funkcji ciągłych jednej zmiennej rzeczywistej, a więc funkcji z $C(\mathbb{R})$, mają te same własności co odpowiednie działania liczb rzeczywistych, więc łatwo widzieć, że przekształcenie z tego punktu jest liniowe względem swoich współrzędnych. Rzeczywiście, np. addytywność i jednorodność względem drugiej współrzędnej oznacza, iż zachodzą następujące równości

$$F(f, g + h) = F(f, g) + F(f, h), \quad F(f, tg) = tF(f, g),$$

które po zastosowaniu definicji przekształcenia F ($F(f, g) = fg$) tłumaczą się na następujące równości

$$f(g + h) = fg + fh, \quad f(tg) = t(fg).$$

Te dwie ostatnie równości są zaś w oczywisty sposób prawdziwe, bo dodawanie liczb rzeczywistych jest rozdzielne względem mnożenia, a mnożenie jest łączne i przemienne.

Liniowość względem pierwszej współrzędnej uzasadnia się analogicznie, choć można do tego wykorzystać również fakt przemienności mnożenia, tzn. fakt iż $F(f, g) = F(g, f)$.

Zadanie 7* Pewna macierz kwadratowa ma następującą postać klatkową: $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, gdzie A i B to macierze kwadratowe, C to macierz prostokątna, a 0 to klatka złożona z samych zer. Powołując się na bezpośrednio na definicję wyznacznika uzasadnij, że $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$.

Rozwiązanie.

Powinno być jasne, że rozstawienia całej tej macierzy, które nie zawierają zer — a tylko one wnoszą niezerowe składniki do sumy definiującej wyznacznik — mają tę własność, że ilekroć wyraz takiego rozstawienia pochodzi z kolumny macierzy A , to musi również pochodzić z wiersza tej macierzy. A ponieważ macierz A jest kwadratowa, więc takie rozstawianie definiowane dla całej macierzy zawiera

jako swój ‘lewy górny’ fragment rozstawienie pochodzące z macierzy A . Dalszy ciąg tego większego rozstawienia nie może już zawierać wyrazów ani z wierszy, ani z kolumn macierzy A . Zatem ów ‘dalszy ciąg’ pochodzi tak z kolumn, jak i z wierszy macierzy B , bo stanowią one dopełnienia zbioru kolumn i zbioru wierszy macierzy A właśnie. Dlatego ów ‘dalszy ciąg’ stanowi w istocie rozstawienie wyrazów macierzy B .

Zauważmy, że jest to rozumowanie całkowicie identyczne z tym, przedstawionym w Skrypcie w dowodzie Faktu 2.11 na str. 24. Zatem, podobnie jak w tamtym przypadku również w przypadku rozważanej tu macierzy jej rozstawienia nie zawierające zer pochodzą od połączenia dowolnego rozstawienia macierzy A z dowolnym rozstawieniem macierzy B , co ostatecznie prowadzi dożądanego wzoru, analogicznego do wzoru z Faktu 2.11.

Zadanie 8* Uzasadnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia $\leq n$, którego wykres przechodzi przez punkty $(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}), \dots, (\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix})$, o ile $x_0, x_1, \dots, x_n$ są parami różne. Wskazówka: napisz odpowiedni układ równań i posługując się wzorami Cramera oraz wyznacznikiem Vandermonde’a uzasadnij, że ma on dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie.

Niech $P(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ oznacza poszukiwany wielomian. Wtedy fakt, że pojedynczy punkt $(\begin{smallmatrix} x_i \\ y_i \end{smallmatrix})$ leży na wykresie wielomianu P wyraża się pojedynczą równością $P(x_i) = y_i$; natomiast fakt, że na wykresie tym leżą wszystkie zadane punkty $(\begin{smallmatrix} x_i \\ y_i \end{smallmatrix}), i = 0, 1, \dots, n$ wyraża się wtedy układem $n + 1$ równań postaci

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ \dots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$$

Korzystając z tego, że ogólna postać wielomianu stopnia $\leq n$ wygląda następująco $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ możemy ten układ zapisać w postaci

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Dalej, wiemy, że wielomiany są jednoznacznie wyznaczone przez ciągi swoich współczynników. Dlatego istnienie dokładnie jednego wielomianu, na wykresie którego leżą wszystkie powyższe punkty jest równoważne istnieniu dokładnie jednego ciągu współczynników $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ które stanowią rozwiązanie powyższego układu równań rozpatrywanego jako układ, w którym to właśnie te współczynniki wielomianu są niewiadomymi, a wielkości $x_i^j, i, j = 0, 1, \dots, n$ są współczynnikami równań tego układu. Z Twierdzenia Cramera (Skrypt, Fakt 2.17, str. 30) wiadomo, że układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy

i tylko wtedy, gdy wyznacznik jego macierzy głównej jest $\neq 0$. W powyższym przypadku macierzą główną jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że $\det A^T$ jest wyznacznikiem Vandermonde'a dla liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$, więc wyznacznik ten nie znika, gdyż z założenia liczby $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ są parami różne (patrz Skrypt, Fakt 2.16, str. 29). A ponieważ dla każdej macierzy mamy $\det A = \det A^T$, więc również wyznacznik główny rozpatrywanego układu jest $\neq 0$, a co za tym idzie ten układ równań spełnia warunki Tw. Cramera, tzn. ma dokładnie jedno rozwiązanie. To rozwiązanie jest jednoznacznie wyznaczonym ciągiem współczynników szukanego wielomianu $P(x)$, a więc udowodniliśmy w ten sposób, że taki wielomian P zawsze istnieje i jest on tylko jeden.