

Algebra liniowa 2

lista 4 (wykład 30.03, ćwiczenia 1.04.2020)

Ćwiczenia

1. Wyznacz macierz odwrotną do każdej z poniższych macierzy na dwa sposoby: (a) przy pomocy wyznaczników, (b) przy pomocy operacji elementarnych wierszowych:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Wyznacz macierz odwrotną do każdej z poniższych macierzy, korzystając z jej postaci klatkowej.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sprawdź, czy następujące wektory są liniowo niezależne, zapisując je w dowolnie wybranej bazie i wskazując niezerowy minor maksymalnego stopnia:

(a) $1 + x + 2x^3, 2 + x^2, 1 - x^2 + x^3 \in \mathbb{R}[x]$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

4. Wskaż niezerowy minor maksymalnego stopnia każdej z poniższych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Wyznacz rząd każdej z poniższych macierzy, zaczynając od uproszczenia macierzy przy pomocy operacji elementarnych:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zadania

1. Napisz macierz elementarną, która zastosowana do macierzy prostokątnej $m \times n$:

(a) zamienia i -ty wiersz z j -tym wierszem ($i \neq j$);

(b) mnoży i -ty wiersz przez liczbę $t \neq 0$;

(c) dodaje do i -tego wiersza t -krotność j -tego wiersza ($i \neq j, t \neq 0$).

Napisz analogiczne macierze elementarne dla operacji kolumnowych.

2. Dla każdej macierzy elementarnej E z poprzedniego zadania znajdź macierz E^{-1} .

3. Napisz macierz przekształcenia F (w dowolnie wybranych bazach), napisz macierz przekształcenia F^{-1} (jeśli przekształcenie odwrotne istnieje) oraz napisz wzór przekształcenia F^{-1} , jeśli:

(a) $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x], F(P(x)) = xP'(x) + P(1)$, (c) $F : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^4, F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(b) $F : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3, F(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(-1) \end{pmatrix}$, (d) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

4. Napisz dowolne przekształcenie liniowe $F : V \rightarrow W$, które jest odwracalne lub uzasadnij, że takie przekształcenie nie istnieje, jeśli:

(a) $V = M_{2 \times 2}, W = \mathbb{R}^4$

(c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}_3[x]$

(b) $V = M_{2 \times 3}, W = M_{3 \times 2}$

(d) $V = \mathbb{R}_3[x], W = \mathbb{R}^4$

5. Dana jest macierz postaci $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, gdzie A i B to kwadratowe klatki. Wyraż $\text{rank} P$ przy pomocy $\text{rank} A$ i $\text{rank} B$.
6. Uzasadnij, że dla macierzy $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, gdzie $A, C \in M_{m \times m}$ oraz $B, D \in M_{n \times n}$ zachodzi: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & 0 \\ 0 & BD \end{pmatrix}$.
7. Uzasadnij, że macierz odwrotna do macierzy górnotrójkątnej jest macierzą górnotrójkątną.
8. Uzasadnij, że $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$, gdzie $A, P \in M_{n \times n}$.
9. Uzasadnij, że wielomiany $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}_n[x]$ o tej własności, że P_i jest wielomianem stopnia i są liniowo niezależne.