

Algebra liniowa 2

lista 5 (wykład 6.04, ćwiczenia 8.04.2020)

Ćwiczenia

1. Sprawdź, czy poniższe układy równań są niesprzeczne i ustal jaki jest wymiar zbioru ich rozwiązań. W którym z układów można zmienić prawe strony tak by otrzymać układ sprzeczny?

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 3 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = -1 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

2. Dla poniższych układów równań znajdź rozwiązanie ogólne.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

3. Wskaż bazę jądra przekształcenia $(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$ zadanego (w bazie standardowej) każdą z poniższych macierzy. Wskazówka: sprowadź zadanie do rozwiązania odpowiedniego układu jednorodnego.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Znajdź wszystkie wektory przeprowadzane przez przekształcenie o danej macierzy na dany wektor:

$$(a) \begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zadania

1. Wyznacz rozwiązanie ogólne układu w zależności od parametru t . Wskazówka: zastosuj metodę eliminacji Gaussa, traktując t jak znaną liczbę.

$$\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 7x_4 = t \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + tx_4 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} (1+t)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+t)x_2 + x_3 = t \\ x_1 + x_2 + (1+t)x_3 = t^2 \end{cases}$$

2. Znajdź jednorodny układ równań liniowych złożony z (a) dwóch (b) trzech (c) czterech równań, dla

którego wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ stanowią fundamentalny układ rozwiązań.

3. Znajdź bazę każdej z poniższych przestrzeni, a następnie opisz tę przestrzeń przy pomocy układu równań liniowych:

$$(a) \text{ przestrzeń } W = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} < \mathbb{R}^5$$

$$(b) \text{ przestrzeń } U = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}\right\} < \mathbb{R}^4$$

4. Pewien niejednorodny układ m równań liniowych z n niewiadomymi spełnia warunek $\text{rank } A = m$, gdzie A to macierz główna układu. Czy układ ten może być sprzeczny? Odpowiedź uzasadnij.
5. Pewien jednorodny układ m równań liniowych z n niewiadomymi spełnia warunek $n > m$. Czy układ ten może mieć jednoznaczne rozwiązanie? Odpowiedź uzasadnij.

6. Uzasadnij, że jeśli liniowy układ równań ma więcej niż jedno rozwiązanie, to ma ich nieskończenie wiele.
7. *Pewien niejednorodny układ m równań liniowych z n niewiadomymi spełnia warunek $n < m$. Uzasadnij, że można tak zmienić jego prawe strony, by otrzymać układ sprzeczny.
8. *Wytłumacz, jak mając układ równań opisujący podprzestrzeń $W < \mathbb{R}^n$ i wektor $v \in \mathbb{R}^n$ wyznaczyć układ równań opisujący warstwę $v + W$, a następnie opisz układem równań zbiór:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^5$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

9. *Dana jest macierz $A \in M_{m \times n}$. Uzasadnij, że zbiór $W = \{b \in \mathbb{R}^m : AX = b \text{ niesprzeczny}\}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^m$. Uzasadnij, że $\dim W = \text{rank } A$.
10. **Uzasadnij, że $W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0\}$ jest podprzestrzenią $C^\infty(\mathbb{R})$. Uzasadnij, że warstwy tej przestrzeni są postaci: $g + W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f(0) = g(0), f'(0) = g'(0), \dots, f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)\}$. Zinterpretuj rozwijanie funkcji g w szereg Tayora jako wyznaczanie jedynego wielomianu w warstwie $g + W$.